

УДК 532.594.013.4+534.2

© 1991 г.

И. А. ЛУКОВСКИЙ, А. Н. ТИМОХА

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТИ И ГАЗА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С АКУСТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ В ГАЗЕ

Анализ устойчивости плоской капиллярной поверхности ограниченного объема жидкости при высокочастотной вибрации поля тяжести позволил сделать вывод о возможности ее стабилизации при отрицательных закритических перегрузках [1, 2]. Автоматически этот вывод распространялся и на тот случай, когда вибрационное воздействие задавалось акустическим источником в газе над жидкостью, т. е. предполагалось, что влияние акустического поля может быть промоделировано вибрациями поля тяжести (см. обзор [2]). Однако в рамках такой упрощенной модели нельзя учесть влияние акустических радиационных сил на свободную поверхность жидкости, наиболее ярко проявляющееся в условиях слабой гравитации, и описать характерные для данной системы виброэффекты [3–5]. Анализ задачи о совместных колебаниях ограниченных объемов жидкости и газа (последний играет роль упругого элемента [6]) [7], позволил объяснить отличное от капиллярного среднее во времени положение поверхности раздела [8]. В то же время принципиальный вопрос о возможности стабилизации равновесной формы при помощи целенаправленно создаваемой акустической волны в газе (см. эксперимент [3]) решен не был.

В настоящей работе показано, что в рамках предположений работы [8] удается не только описать эффект стабилизации при закритических отрицательных перегрузках, но и уточнить диапазон частот, при которых такая стабилизация возможна.

1. Постановка задачи. Пусть в абсолютно твердой цилиндрической полости ($W(y, z) \leq 0$, $x \leq h_1$, $x \geq -h_2$) находится идеальная жидкость (Q_2), которая заполняет лишь часть объема полости, а оставшуюся часть заполняет идеальный газ (Q_1). Пусть Σ — подвижная граница раздела жидкости и газа, $S_i = \partial Q_i \setminus \Sigma$, $S_1 \supset S_0$ — плоская поверхность («крышка»), на которой возбуждаются акустические волны в газе. Выберем систему координат x, y, z , такую, чтобы ось x была перпендикулярна S_0 , параллельна g (ускорению силы тяжести) и направляющей цилиндра (чего можно добиться соответствующей ориентацией сосуда в пространстве).

Движение системы жидкость — газ (см. [9–11]) будем рассматривать при следующих допущениях: движения идеальной жидкости и идеального газа потенциальны (что возможно при малой вязкости сред и достаточно больших линейных размерах полости $v/(l^2\omega) \ll 1$ [9]); газ значительно легче жидкости, первые собственные частоты газа меньше первых собственных частот жидкости (с учетом сжимаемости), а возбуждаемая частота близка к первым собственным частотам газа; числа Бонда $Bo \ll 30$; как и в общепринятой теории колебаний ограниченного объема капиллярной жидкости [11], будем считать угол смачивания постоянным.

Введем обозначения $\varphi_i(x, y, z, t)$ — потенциалы скоростей, $p_i(x, y, z, t)$ — давления, $\rho_i(x, y, z, t)$ — плотности, $x = H(y, z, t)$ — уравнение поверхности раздела Σ , σ — коэффициент поверхностного натяжения, α — угол смачивания, γ_i — постоянные, c — скорость звука в газе. Пусть l — характерный размер цилиндра, $1/\omega$ — характерное время (ω — возбуждаемая частота). Тогда задача, описывающая колебания системы, примет

после обезразмеривания вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial ((p_i/p_0)^{1/\mu})}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{1/\mu} \nabla \varphi_i \right) = 0, \quad (x, y, z) \in Q_i \\
 & \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{1/\mu} \nabla \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{Bo}{\omega_*^2} x \right) = -\nabla p_i, \quad (x, y, z) \in Q_i \\
 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_i; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{H_i}{\sqrt{1 + (\nabla H)^2}}, \quad (x, y, z) \in \Sigma \\
 & -p_2 - \frac{1}{\omega_*^2} \operatorname{div} \frac{\nabla H}{\sqrt{1 + (\nabla H)^2}} = -\delta p_1, \quad (x, y, z) \in \Sigma \\
 & -\frac{\partial H}{\partial e} = -\frac{H_z W_z + H_y W_y}{|\nabla W|} = \cos \alpha \sqrt{1 + (\nabla H)^2}, \quad (x, y, z) \in \partial \Sigma \\
 & \int_{S_0} p_1 ds = p_0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{v_0(y, z)}{ck} \sin t, \quad (x, y, z) \in S_0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $v_0(y, z)$ — некоторое заданное распределение нормальных скоростей на S_0 , $Bo = (gl^2 \rho_2)/\sigma$ — число Бонда, $\omega_* = \omega \sqrt{l^3 \rho_2/\sigma}$ — безразмерная частота, p_0 — атмосферное безразмерное давление, $\delta = \rho_1/\rho_2$ — отношение плотностей, $k = \omega l/c$ — волновое число (в газе).

Задача (1.1) содержит малый параметр, пропорциональный числу Маха акустического поля в газе

$$\varepsilon = \sup |v_0| / (c \mu_0) \sim \delta \ll 1, \quad |\mu_0| \sim 1; \quad \mu_1 = \frac{\delta}{|\varepsilon|} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varepsilon \frac{\mu_0 V(y, z)}{k} \sin t; \quad V(y, z) = \frac{v_0(y, z)}{\sup |v_0|} \tag{1.3}$$

Здесь μ_0 — некоторый безразмерный параметр, характеризующий акустическую волну в газе.

При членах, отвечающих за потенциальные силы, также имеется малый параметр ω_*^{-2} , относительно которого будем предполагать

$$\omega_*^{-2} = \mu \delta \varepsilon^2, \quad \mu \sim 1 \tag{1.4}$$

2. Установившиеся режимы движения капиллярно-звуковые равновесные формы. Факт наличия в данной задаче малого параметра дает возможность представить разыскиваемый установившийся режим в виде асимптотических рядов по степеням ε

$$H = \Sigma \varepsilon^k H_k; \quad \varphi_i = \Sigma \varepsilon^k \varphi_i^{(k)}; \quad p_i = \Sigma \varepsilon^k p_i^{(k)}$$

Выбрав в качестве нулевого приближения поверхности Σ ($x = H(y, z, t)$) среднее во времени положение Σ_0 ($x = H_0(y, z)$) и выписав последовательно первые три приближения, получим [7, 8], что каждый установившийся режим определяется однозначно по решению нелинейной стационарной краевой задачи (задачи о капиллярно-звуковой равновесной форме)

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla H_0}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} \right) + Bo H_0 + \frac{1}{4\mu} (k^2 (\Phi_1)^2 - (\nabla \Phi_1)^2) = \text{const}, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0 \\
 & -\frac{\partial H_0}{\partial e} = \cos \alpha \sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}, \quad (x, y, z) \in \partial \Sigma_0; \quad \int_{\Sigma_0} H dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\Delta \Phi_1 + k^2 \Phi_1 = 0, \quad (x, y, z) \in Q_1$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_1 \cup \Sigma_0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \mu_0 \frac{V(y, z)}{k}, \quad (x, y, z) \in S_0 \quad (2.2)$$

Задача (2.1), (2.2) является аналогом задачи о капиллярной равновесной форме и допускает следующую физическую трактовку: на капиллярную поверхность со стороны газа действует распределенное, зависящее от положения границы давление (в данном случае — акустическое радиационное давление), сравнимое по величине с капиллярными и гравитационными силами. (В случае $V \equiv 0$ — задача о капиллярно-звуковой равновесной форме превращается в задачу о капилляре.) Существенным отличием данной задачи от задач типа [12], в которых разыскивается форма равновесия свободной поверхности жидкости, находящейся в гравитационном и магнитном полях, является невозможность описания среднего во времени высокочастотного акустического воздействия в виде эмпирически выбранного потенциала в правой части задачи о капиллярной равновесной форме (как и, например, в задаче о самогравитирующем слое [11]).

3. Устойчивость капиллярно-звуковой равновесной формы. Исследование устойчивости капиллярно-звуковой равновесной формы проведем, основываясь на идее первого метода Ляпунова. С этой целью из исходной нелинейной системы уравнений выведем уравнения возмущенного движения, описывающие движения системы относительно найденного положения равновесия. Как и выше, рассматриваемый динамический процесс разделим на «медленные» и «быстрые» движения, причем относительно последних проведем операцию усреднения в общепринятом в вибрационной механике смысле. Следовательно, характер поведения возмущений (затухание или нарастание их во времени) и будет означать для введенной в рассмотрение капиллярно-звуковой равновесной формы ее устойчивость или неустойчивость по отношению к «медленной» составляющей движения.

Уравнения в вариациях примут вид (ψ_i — вариация φ_i , q_i — вариация p_i , f — вариация H)

$$\begin{aligned} & \nabla \psi_{it} + \nabla q_i + \varepsilon \{ k_i^2 p_i^{(1)} \nabla \psi_{it} + k_i^2 q_i \nabla \varphi_i^{(1)} + \\ & + \nabla (\nabla \varphi_i^{(1)}, \nabla \psi_i) \} + \varepsilon^2 \{ \dots \} + \dots = 0, \quad (x, y, z) \in Q_i \\ & k_i^2 q_{it} + \Delta \psi_i + \varepsilon k_i^2 \{ (1 - \gamma_i) (p_i^{(1)} q_i)_i + \operatorname{div} (p_i^{(1)} \nabla \psi_i) + \\ & + \operatorname{div} (q_i \nabla \varphi_i^{(1)}) \} + \varepsilon^2 \{ \dots \} + \dots = 0, \quad (x, y, z) \in Q_i \\ & \frac{\partial \psi_i}{\partial n} + \varepsilon \{ \varphi_{ixx}^{(1)} f - \varphi_{iy}^{(1)} f_y - \varphi_{iz}^{(1)} f_z - (\varphi_{ixy}^{(1)} H_{0y} + \varphi_{ixz}^{(1)} H_{0z}) f \} \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} + \\ & + \varepsilon^2 \{ \dots \} + \dots = \frac{f_i}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}}, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0 \\ & - [q_2 + \varepsilon \{ p_{ix}^{(1)} f \} + \dots] + \mu \mu_1 \varepsilon^3 \left\{ B_0 f - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} - \frac{\nabla H_0 (\nabla H_0, \nabla f)}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{3/2}} \right) \right\} = \\ & = -\mu_1 \varepsilon [q_1 + \dots], \quad (x, y, z) \in \Sigma_0 \\ & - \frac{\partial f}{\partial e} = \cos \alpha \frac{(\nabla f, \nabla H_0)}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} + \varepsilon \{ \dots \} + \dots, \quad (x, y, z) \in \partial \Sigma_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_i, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad (x, y, z) \in S_0$$

где $k_1^2 = k^2$, $k_2^2 = k^2 \gamma_1 / \gamma_2$ — (2π) -периодические коэффициенты порядка ε^2 , ε^3 — выписаны в [13], их учет в уравнениях не влияет на окончательный результат. Введем в рассмотрение быстрое t и медленное $\tau = \varepsilon^{1/2} t$ времена (выбор такого τ обусловлен тем, что при членах, отвечающих за потенциальные силы, стоит величина ε^3). Усредним задачу по быстрым переменным. После достаточно громоздких выкладок получим следующую задачу, описывающую малые усредненные по быстрым колебаниям относительные движения системы:

$$\Delta \psi_2 = 0, \quad (x, y, z) \in Q_2; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_2$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \frac{f_\tau}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}}, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0$$

$$(3.2)$$

$$\psi_{2\tau} + \mu \mu_1 A f = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial e} = \cos \alpha \frac{(\nabla H_0, \nabla f)}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} \quad (x, y, z) \in \partial \Sigma_0$$

$$A f = \text{Bo} f - \text{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} - \frac{\nabla H_0 (\nabla H_0, \nabla f)}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{3/2}} \right) +$$

$$+ 0,5 \mu^{-1} ((k^2 \Phi_1 \psi - (\nabla \Phi_1, \nabla \psi)) + 0,5 (k^2 (\Phi_1)^2 - (\nabla \Phi_1)^2) \chi f)$$

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (x, y, z) \in Q_1$$

(3.3)

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -[\Phi_{1xx} f - \Phi_{1yy} f - \Phi_{1zz} f - (\Phi_{1y} H_{0y} + \Phi_{1z} H_{0z}) f] \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}}, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_0 \cup S_1$$

Задача (3.2) по структуре совпадает с известной задачей о малых колебаниях капиллярной жидкости в ограниченной полости. В отличие от последней в ней имеются члены, представляющие вариацию акустического радиационного давления. Как и в задачах о колебаниях капиллярной жидкости, введем в рассмотрение задачу о нормальных колебаниях, представив решение задачи (3.2) в виде

$$f = e^{i\lambda \tau} h, \quad \psi_2 = i\lambda e^{i\lambda \tau} \Phi_2;$$

$$\Delta \Phi_2 = 0, \quad (x, y, z) \in Q_2; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_2$$

(3.4)

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \frac{h}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}}; \quad -\lambda^2 \Phi_2 + \mu \mu_1 A h = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0$$

Если все частоты нормальных колебаний λ действительны ($\lambda^2 > 0$), то капиллярно-звуковая равновесная форма устойчива, в противном случае ($\lambda^2 < 0$) имеет место неустойчивость.

4. Устойчивость «тривиальной» капиллярно-звуковой равновесной формы. Если угол смачивания $\alpha = \pi/2$, а $v_0(y, z) = \text{const}$ (возбуждается плоская звуковая волна), то ($\varepsilon = -v_0 / (c \sin(kh_1))$), $\mu_0 = -\sin(kh_1)$, $V(y,$

$z) \equiv 1$) задача (2.1), (2.2) имеет «тривиальное» решение $H_0(y, z) \equiv 0$, $\Phi_1 = k^{-2} \cos kx$, названное таким образом потому что его вид не зависит от величины значений $k, h_1, h_2, \text{Во}$, и т. д. Данное решение описывает тот случай, когда в объеме Q_1 устанавливается плоская стоячая волна

$$\varphi_1 = \varepsilon k^{-2} \sin t \cos(kx) + O(\varepsilon^2); \quad \varphi_2 = O(\varepsilon^2); \quad H \equiv 0$$

Задача (3.4) с учетом (3.3) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_2 = 0, \quad (x, y, z) \in Q_2; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_2 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = h, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0 \\ -\lambda^2 \Phi_2 + \mu \mu_1 (\text{Во} h - \Delta h) + 0,5 \mu_1 \psi = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0 \\ \Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (x, y, z) \in Q_1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = h, \quad (x, y, z) \in \Sigma_0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in S_1 \cup S_0; \quad \frac{\partial h}{\partial e} = 0, \quad (x, y, z) \in \partial \Sigma_0 \end{aligned}$$

где Σ_0 — плоская поверхность $x=0$. Задача легко решается методом Фурье, а

$$\lambda_{pq}^2 = \kappa_{pq} \text{th}(\kappa_{pq} h_2) \mu_1 \mu (\text{Во} + \kappa_{pq}^2) - \frac{\mu_1}{2} \begin{cases} \frac{\text{cth} \xi h_1}{\xi} & \kappa_{pq}^2 > k^2 \\ -\frac{\text{cth} \xi h_1}{\xi}, & \kappa_{pq}^2 < k^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\xi = \sqrt{|\kappa_{pq}^2 - k^2|}$$

где κ_{pq}^2 — собственные значения задачи в сечении цилиндра

$$\begin{aligned} \Delta h_{pq} + \kappa_{pq}^2 h_{pq} = 0, \quad (y, z) \in S_0; \quad \frac{\partial h_{pq}}{\partial e} = 0, \quad (y, z) \in \partial S_0 \\ \int h_{pq} ds = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если все $\lambda_{pq}^2 > 0$, то «тривиальная» капиллярно-звуковая равновесная форма устойчива.

5. Устойчивость в круговом цилиндре. Рассмотрим устойчивость «тривиальной» капиллярно-звуковой равновесной формы в цилиндре кругового сечения (l — радиус). Собственными функциями задачи Неймана (4.2) являются функции (в полярной системе координат)

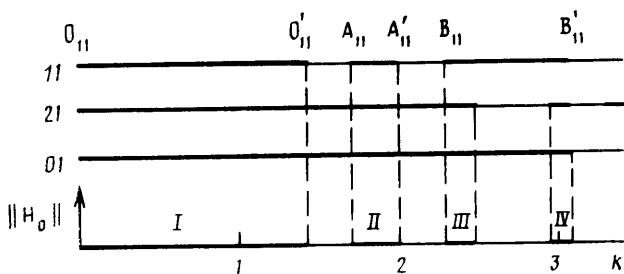
$$h_{pq}(r, \theta) = J_p(\kappa_{pq} r) \sin p\theta, \quad J_p(\kappa_{pq} r) \cos p\theta$$

Все рассуждения и вычисления будем проводить для системы вода — воздух при атмосферном давлении и температуре $\approx 20^\circ \text{C}$. Для того чтобы исследовать на устойчивость указанный режим, необходимо воспользоваться выражением для λ_{pq}^2 (4.1).

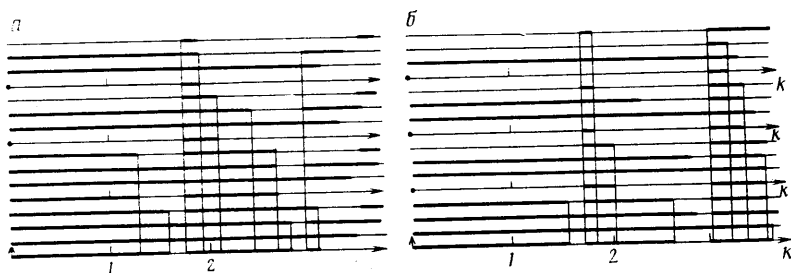
Поведение системы при малых положительных перегрузках. На фиг. 1 приведены диаграммы устойчивости исследуемого динамического режима (учитывается пять первых по возрастанию κ_{pq}^2 форм h_{pq}). Результаты анализа устойчивости каждой формы (с индексом pq) размещены на оси pq . Выделены диапазоны устойчивости, диапазоны неустойчивости отмечены осевой линией. Резюме дается на фазовой картине ($k, \|H_0\| = \sup |H_0|$).

При $(\text{Во} + \kappa_{11}^2) > 0$ (фиг. 1), $\text{Во} = 10$; $\varepsilon = 0,007$, $h_1 = 2$ для исследуемой капиллярно-звуковой равновесной формы характерно следующее.

Имеется диапазон (O_{pq}, O_{pq}') , в котором капиллярно-звуковая равновесная форма устойчива при возбуждениях по формам pq , причем чем больше κ_{pq}^2 , тем точка O_{pq}' расположена правее. Размер первого диапазона устойчивости I на фазовой картине определяется самой левой из всех точек O_{pq}' — точкой O_{11}' . За первой собственной частотой газа по данной моде (точка A_{pq}) следует небольшой участок устойчивости (A_{pq}, A_{pq}') . Благодаря этому участку может возникнуть диапазон



Фиг. 1



Фиг. 2

устойчивости II (если точка O_{21}' расположена правее A_{11}). Вслед за диапазоном устойчивости (A_{pq}, A_{pq}') следуют попеременно (увеличиваясь в размерах) участки устойчивости и неустойчивости (B_{pq}, B_{pq}'), (C_{pq}, C_{pq}') и т. д. по форме h_{pq} . Благодаря наличию этих участков, возникают «островки» устойчивости III и IV. На возникновение и размеры диапазонов правее IV начинают влиять шестая, седьмая формы и т. д. Потеря устойчивости «тривиальной» капиллярно-звуковой равновесной формы при $(\text{Bo} + \kappa_{11}^2) > 0$, как это было в задаче об устойчивости нижнего положения маятника на упругом основании с вертикально вибрирующей точкой подвеса, имеет резонансный характер. В диапазонах неустойчивости [6] могут возникать новые устойчивые режимы движения.

В экспериментальной работе [3] отмечалось два эффекта: путем выбора параметров акустического поля можно добиться динамической устойчивости системы жидкость – газ даже в тех случаях, когда $(\text{Bo} + \kappa_{11}^2) < 0$; эффект стабилизации носит резонансный характер. На примерах покажем, что надлежащим выбором ε и h_1 можно добиться устойчивости капиллярно-звуковой равновесной формы при отрицательных перегрузках, превышающих критическую.

Динамическая устойчивость «тривиальной» капиллярно-звуковой равновесной формы при отрицательных перегрузках. Первая ситуация изображена на фиг. 2, а ($h_1=1$; $\varepsilon=0,0035$; $\text{Bo}=-7,5; -5,0; 0,0; 5,0$). Здесь выделяется диапазон устойчивости, в котором плоская форма равновесия устойчивости при $(\text{Bo} + \kappa_{11}^2) < 0$, $(\text{Bo} + \kappa_{pq}^2) > 0$, $pq \neq 11$. Показано, что при уменьшении отрицательных перегрузок и переходе к положительным выделенный диапазон устойчивости увеличивается в размерах. На фиг. 2, б для случая $(\text{Bo} + \kappa_{11}^2) < 0$, $(\text{Bo} + \kappa_{21}^2) < 0$, $(\text{Bo} + \kappa_{pq}^2) > 0$, $pq \neq 11, 21$ ($h_1=1,25$; $\varepsilon=0,0025$; $\text{Bo}=-10,5; -7,5; -3,7; 0,5$) также удается выделить диапазон устойчивости и показать, что при переходе к положительным перегрузкам он может только расти. Список аналогичных примеров можно продолжить.

Таким образом, при высокочастотном акустическом воздействии на свободную поверхность ограниченного объема жидкости со стороны дополняющего сосуда газа в слабом гравитационном поле можно не только влиять на форму поверхности раздела (капиллярно-звуковую равновесную форму), но и подходящим выбором частоты воздействия, мощности акустического сигнала и расстояния до источника можно добиться стабилизации плоской поверхности раздела жидкости и газа при отрицательных перегрузках, превышающих критическую. Эффект динамической стабилизации системы носит резонансный характер, поскольку диапазоны частот, в которых поверхность раздела приобретает дополнительный запас устойчиво-

сти, примыкает к первым собственным частотам газа. Указанные эффекты носят нелинейный характер и качественно описываются моделью (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брискман В. А. Параметрическая стабилизация границы раздела жидкостей // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 5. С. 1041–1044.
2. Неволин В. Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. № 6. С. 1028–1042.
3. Wesseln Ph. S. Acoustic pumping in cryogenic liquids // Design. News. 1967. V. 22. № 12. P. 96–98, 101–102.
4. Корнфельд М., Молохова Н. Вспучивание поверхности жидкости под действием ультразвука // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 3. С. 476–477.
5. Ганиев Р. Ф., Лакиза В. Д., Цапенко А. С. О динамическом поведении свободной поверхности жидкости в условиях, близких к невесомости при вибрационных воздействиях // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 5. С. 102–107.
6. Новиков Л. З., Харламов С. А. Об особенностях поведения маятника с упругим подвесом на вибрирующем основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 5. С. 3–13.
7. Луковский И. А., Тимоха А. Н. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Установившиеся режимы движения: Препринт № 88–9. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1988. 39 с.
8. Луковский И. А., Тимоха А. Н. К задаче управления свободной поверхностью ограниченного объема жидкости при помощи звука // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 7. С. 52–55.
9. Любимов В. Д., Черепанов А. А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 8–13.
10. Луковский И. А., Тимоха А. Н. О свободных колебаниях системы жидкость – газ в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. С. 5–12.
11. Гидромеханика невесомости/Под ред. А. Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976. 504 с.
12. Шашин В. М., Шувалов Н. И. Равновесные формы свободной поверхности жидкости в гравитационном и магнитном полях с учетом сил поверхностного натяжения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 113–116.
13. Луковский И. А., Тимоха А. Н. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Устойчивость установившихся режимов: Препринт № 10. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1988. 47 с.

Киев

Поступила в редакцию
19.X.1989