МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1991

УДК 532.529.5:533.7

Ю. Е. ГОРБАЧЕВ

О МНОГОСКОРОСТНЫХ МОДЕЛЯХ В ТЕОРИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

Газовые смеси и газовзвеси при условии достаточной разреженности возможно описывать системой уравнений Больцмана для функций распределения f_i каждой из компонент [1]. Режимы, допускающие такое описание, рассмотрены в [2]. Различные методы нахождения нормальных решений этой системы предлагались в [3–8]. Основное отличие от случая однокомпонентной системы и связанные с этим трудности заключаются в необходимости ответа на вопрос о выборе медленных (гидродинамических) переменных, т. е. тех величин, в терминах которых возможно проведение сокращенного (макроскопического) описания системы [9]. Для однокомпонентной системы эта проблема решалась достаточно просто: медленными переменными являются средние от столкновительных инвариантов – левых собственных функций интеграла столкновений, соответствующих нулевым собственным числам. В многокомпонентных системах число точных столкновительных инвариантов остается тем же самым, попытка же введения новых гидродинамических переменных связана с понятием приближенных столкновительных инвариантов, впервые рассмотренным и проанализированным в [10, 11]. В настоящей работе будет исследован вопрос о возможности выбора того или иного набора медленных переменных в двухкомпонентных системах с существенно различающимися массами частиц.

Поведение двухкомпонентной смеси может быть описано системой уравнений Больцмана, имеющей в безразмерной форме записи вид

$$\begin{gathered}
\mathrm{Sh}_g K_g \frac{\partial F_g}{\partial \tau} + K_g \mathbf{w}_g \frac{\partial F_g}{\partial \mathbf{x}} = I_{gg} + \alpha_{gp} I_{gp} \\
\mathrm{Sh}_p K_p \frac{\partial F_p}{\partial \tau} + K_p \mathbf{w}_p \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{x}} = I_{pp} + \alpha_{pg} I_{pg}
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\tau = \frac{t}{\tau_h}, \quad x = \frac{r}{L}, \quad \mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{U_i}, \quad U_i = c_i(1+S_i)$$

$$c_i = \left(\frac{kT_i}{m_i}\right)^{1/2}, \quad S_i = \frac{u_i}{c_i}, \quad F_i = \frac{f_i U_i^3}{n_i^0}$$

$$l_i = \tau_{ci} c_i (1+S_i), \quad K = \frac{l_i}{L}$$

$$\mathrm{Sh}_i = \frac{L}{\tau_h c_i (1+S_i)} = \frac{\tau_{ei}}{\tau_h}, \quad \alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i} \frac{n_j}{n_i} \left(\frac{m_i T_g}{\mu T_i}\right)^{1/2}$$

где τ, x, $\mathbf{w}_i$ – безразмерные время, координата, скорость; τ_h, L, U_i – соответствующие макроскопические масштабы, играющие роль единиц измерения (для простоты рассмотрена изотропная ситуация, когда пространственные масштабы в различных направлениях являются величинами одного порядка); τ_e – временной масштаб, характеризующий конвективные процессы (время распространения возмущения на расстояние L); m_i, n_i, $\mathbf{u}_i$, T_i, c_i – масса, численная плотность, средняя скорость, температура и тепловая скорость i-й компоненты, $\mu=m_g m_p/(m_g+m_p)$ — приведенная масса, I_{ij} — обезразмеренные интегралы столкновений J_{ij}, $\tau_{ci}^{-1}=\nu_i\sim n_i\sigma_i c_i$ — частота столкновений частиц i-й фазы друг с другом; σ_{ij} — сечение рассеяния i-й компоненты на j-4 ($\sigma_{ii}\equiv\sigma_i$), K_i, Sh_i — числа Кнудсена и Струхаля i-й компоненты, S_i — скоростное отношение.

Будем считать, что массы частиц компонент существенно отличаются друг от друга: $\varepsilon^2=m_g/m_p\ll 1$ (для приведенной массы имеем $\mu=m_g+O(\varepsilon^2)$). При оценке сечений рассеяния для смеси молекулярных газов характерно $\sigma_g\sim\sigma_p\sim\sigma_{gp}$, а для мелкодисперсной примеси частиц $\sigma_g\ll\sigma_p$, $\sigma_p\sim 4\sigma_{gp}$.

Для столкновительных членов J воспользуемся интегралами столкновений больцмановского типа, записанными в симметризованной форме

$$J_{ij}=\frac{(m_i m_j)^3}{\mu_{ij}^2}\int d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i'\, d\mathbf{v}_j'\, \delta_p\delta_E\sigma_{ij}^d(f_i'f_j'-f_if_j)$$

где δ_p и δ_E—δ-функции сохранения импульса и кинетической энергии сталкивающейся пары, штрихи означают принадлежность величин к характеристикам состояния после столкновения; σ^d — дифференциальное сечение рассеяния.

Переход к сокращенному описанию в каждой из компонент связан, во-первых, с существенной разницей во временных масштабах τ_{ci} и τ_h, т. е. с наличием малых параметров $\mathrm{Sh}_i K_i=\tau_{ci}/\tau_h\ll 1$, во-вторых, с возможностью выделения медленных переменных $\Gamma_{i\gamma}=(\chi_{i\gamma},\ f_i)$, где $\chi_{i\gamma}$ — приближенные столкновительные инварианты, введенные в [10]

$$\left(\chi_i, I_i-K_i\mathbf{w}\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}}\right)=(\chi_i,I_i)-K_i\left(\chi_i,\frac{\partial \mathbf{w}_iF_i}{\partial \mathbf{x}}\right)\leqslant O(\mathrm{Sh}_m,K_m) \qquad (2)$$

$$I_i=\sum_j I_{ij},\qquad (\varphi,\psi)=U^{-3}\int\varphi\psi\, d\mathbf{v},\qquad \mathrm{Sh}_mK_m\equiv\max_i\{\mathrm{Sh}_iK_i\}$$

Подразумевается, что χ_i соответствующим образом обезразмерены. Это требование означает, что система рассматривается на таких временах τ_h, когда выполняется неравенство (2). Условие (2) совершенно аналогично тому, которое использовалось в [6]. Его, однако, можно ослабить, но этот вопрос будет рассмотрен отдельно.

Поскольку оператор конвективного переноса целиком характеризуется параметром K_i, то (2) можно заменить на

$$\max_i\{(\chi_i,I_i),K_i\}\leqslant O(\mathrm{Sh}_mK_m) \qquad (3)$$

Из (3) получаем $\mathrm{Sh}_m\geqslant O(1)$, что означает $\tau_h\lessdot\tau_{em}$.

Интегралы J_i имеют лишь по одному точному столкновительному инварианту — 1, которому соответствуют медленные переменные n_i — численные плотности компонент. Еще четыре точных столкновительных инварианта существуют лишь при описании смеси как единого целого, т. е. удовлетворяют соотношению $(\chi_1,\ I_1)+(\chi_2,\ I_2)=0$ и соответствуют сохранению полного импульса и полной энергии системы. При этом удается ввести еще четыре медленные переменные — компоненты вектора общей гидродинамической скорости и общую энергию (для простоты рассматриваем бесструктурные частицы)

$$\rho\mathbf{u}=\sum_i(\mathbf{p}_i,f),\qquad \rho E=\sum_i\left(\frac{(\mathbf{p}_i-m_i\mathbf{u})^2}{2m_i},f_i\right),\qquad \rho=\sum_i m_in_i \qquad (4)$$

При этом получаем односкоростное, однотемпературное описание двухкомпонентной системы.

Для возможности двухскоростного и двухтемпературного описания из (3) получаем необходимое условие

$$\max_i \{K_i, \alpha_{ij}(\chi_{i\Upsilon}, I_{ij})\} \leqslant O(\mathrm{Sh}_m K_m), \quad \chi_{i\mathrm{v}} = \frac{\mathbf{v}_i}{U}, \quad \chi_{iE} = \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i)^2}{kT/\mu} \quad (j \neq i) \tag{5}$$

поскольку для таких χ $(\chi_i, I_{ii})=0$. В (5) U и T — некоторые характерные значения скорости и температуры, которые пока не будут конкретизироваться. Важно только, что для обеих компонент это одни и те же величины.

Выполнение условия (5) для тяжелой компоненты может обеспечиваться за счет еще одного малого параметра ε. Для того чтобы это показать, перейдем в (5) к новым переменным интегрирования и используем явный вид J_{pg}

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{V} + (1+\varepsilon^2)^{-1}\mathbf{G}, \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{V} - \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^{-1}\mathbf{G}$$

$$(\chi(\mathbf{v}_p), J_{pg}) = \int d\mathbf{V}\, dG\, G^3 \int d\mathbf{n}\, d\mathbf{n}'\, \sigma_{pg}{}^d(G, \mathbf{n}\mathbf{n}') \times$$
$$\times f_p\left(\mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2 G}{1+\varepsilon^2}\mathbf{n}\right) f_g\left(\mathbf{V} + \frac{G}{1+\varepsilon^2}\mathbf{n}\right)\left[\chi\left(\mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2 G}{1+\varepsilon^2}\mathbf{n}'\right) - \chi\left(\mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2 G}{1+\varepsilon^2}\mathbf{n}\right)\right] \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{n}^{(\prime)}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{G}^{(\prime)}$. Выражение (6) является результатом симметризации по переменным интегрирования $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$.

Из (6) видно, что по крайней мере для непрерывных функций χ это скалярное произведение имеет порядок ε^2. К этому же результату можно прийти, считая функции $f_{g,p}$ близкими к равновесию (что является сильным ограничением) и разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора [8]. Существенное отличие приведенного анализа заключается в том, что в нем не накладывается ограничений на ядро оператора I_{pg} и показывается, что асимптотическая малость рассматриваемого скалярного произведения является свойством не функций распределения, а вида оператора $(\cdot, J_{pg})$. Таким образом, параметр α_{ij} в (1) и в (5) следует заменить на α_{ij}', где $\alpha_{gp}' = \alpha_{gp}$, а $\alpha_{pg}' = \varepsilon^2 \alpha_{pg}$.

Остановимся на скалярном произведении

$$\left(\frac{m_g}{2}(\mathbf{v}_g - \mathbf{u}_*)^2, J_{gp}\right), \qquad \mathbf{u}_* = (n_g n_p)^{-1} \int \mathbf{V} f_g f_p\, d\mathbf{v}_g\, d\mathbf{v}_p \tag{7}$$

Используя связь $\mathbf{V} = (1+\varepsilon^2)^{-1}(\mathbf{v}_p + \varepsilon^2 \mathbf{v}_g)$, легко получить $\mathbf{u}_* = (1+\varepsilon^2)^{-1} \cdot (\mathbf{u}_p + \varepsilon^2 \mathbf{u}_g)$. Таким образом, $\mathbf{u}_*$ на малую величину порядка ε^2 отличается от средней скорости движения тяжелой компоненты. Преобразования, аналогичные служившим для получения (6), позволяют записать (7) в виде

$$\int d\mathbf{V}\, dG\, G^3 \int d\mathbf{n}\, d\mathbf{n}'\, \sigma_{gp}{}^d(G, \mathbf{n}\mathbf{n}') f_g\left(\mathbf{V} + \frac{G}{1+\varepsilon^2}\mathbf{n}\right) \times$$
$$\times f_p\left(\mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2 G}{1+\varepsilon^2}\mathbf{n}\right) \frac{m_g}{1+\varepsilon^2} G(\mathbf{n} - \mathbf{n}')(\mathbf{V} - \mathbf{u}_*) \tag{8}$$

Пусть функции распределений $f_{g,p}$ с точностью до малого параметра ε^2 являются характеристическими функциями с носителями в виде «шаров» $D_{g,p}$ (с точностью до $o(\varepsilon)$) с центрами в $o(\varepsilon)$ — окрестности точек $\mathbf{u}_{g,p}$ в пространстве скоростей и радиусами $(kT_{g,p}/m_{g,p})^{1/2}$ (с точностью до $o(\varepsilon)$), различающимися в ε раз. Это подразумевает, что температуры T_g и T_p с точностью до $o(\varepsilon)$ должны быть величинами одного порядка.

Эти предположения имеют смысл, аналогичный предположениям о соотношении величин $|\mathbf{v}_i-\mathbf{u}_j|$ при различных i, j [6]. Однако последние являются переменными интегрирования, а потому какие-либо предположения о порядках этих величин некорректны с математической точки зрения.

Для проведения оценок выражения (7) воспользуемся теоремой о среднем в следующей форме. Если рассмотреть две ограниченные непрерывные вектор-функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x)$, причем при фиксированном y функция $\varphi(x, y)$ (покомпонентно) не меняет знака, то существует такая точка x_1 из области интегрирования, что

$$\int\limits_D \varphi(x,y)\psi(x)dx\,dy=\psi(x_1)\int\limits_D \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

Если теперь положить $x=\mathbf{V}$, $\psi=\mathbf{V}-\mathbf{u}_*$, остальные переменные интегрирования и функции из (8) обозначить y и φ соответственно, а интегрирование по $\mathbf{V}$ проводить по области D_p, то (согласно предположению о виде D_p) получим

$$\left|\left(\frac{m_g}{2kT_g}(\mathbf{v}_g-\mathbf{u}_*)^2, J_{gp}\right)\right| = \left|(\mathbf{V}_1-\mathbf{u}_*)\left(\frac{m_g}{kT_g}(\mathbf{v}_g-\mathbf{u}_*), J_{gp}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_g^{-2}|\mathbf{V}_1-\mathbf{u}_*|\,(|\mathbf{v}_g-\mathbf{u}_*, J_{gp})\leqslant\varepsilon\,(T_p/T_g)^{1/2}(|\mathbf{v}_g-\mathbf{u}_*|, J_{gp})+o(\varepsilon) \qquad (9)$$

Последнее неравенство в (9) является следствием того, что $\mathbf{V}_1-\mathbf{u}_*$ лежит в области D_p. Таким образом, при $\varepsilon(T_p/T_g)^{1/2}\ll 1$ энергия легкой компоненты в системе координат, движущейся со скоростью, не более чем на величину порядка ε отличающейся от $\mathbf{u}_*$, является приближенным столкновительным инвариантом.

Как показано выше, в упомянутом только что смысле скорости $\mathbf{u}_*$ и $\mathbf{u}_p$ эквивалентны (отличаются на $O(\varepsilon^2)$). На выделенность систем координат, движущихся со скоростью, близкой к $\mathbf{u}_p$, хотя и по другим причинам, обращалось внимание и в [6]. Соответствующая медленная переменная имеет вид

$$^3/_2kT_g+{}^1/_2m_g(\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p)^2+O(\varepsilon^2) \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь возможность введения двухскоростного и двухтемпературного описания системы. Проведенный анализ позволил выявить следующие медленные переменные в системе: $\rho_{g,\,p}$, $\mathbf{u}$, E, определяемые точными столкновительными инвариантами, а также $\mathbf{u}_p$, T_p при $\alpha_{pg}'=\varepsilon^2\alpha_{pg}\ll\mathrm{Sh}_mK_m\ll 1$ и $3kT_g/2+m_g(\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p)^2/2$ при $\varepsilon(T_p/T_g)^{1/2}\alpha_{gp}\ll\mathrm{Sh}_mK_m\ll 1$, определяемые приближенными столкновительными инвариантами. Однако в связи с приближенным характером столкновительных инвариантов определяемые ими медленные переменные задаются с точностью до малого параметра Sh_mK_m. Если же некоторые из медленных переменных окажутся различающимися менее чем на $\mathrm{Sh}_m K_m$, то они будут асимптотически неразличимы.

При построении последовательной асимптотической процедуры следует рассматривать только один из представителей класса эквивалентности асимптотически эквивалентных величин. Таким образом, для существования двухскоростного и двухтемпературного течения помимо (5) необходимо потребовать выполнение неравенств

$$|\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p|/U\gg\mathrm{Sh}_mK_m,\quad |T_g-T_p|/T\gg\mathrm{Sh}_mK_m \qquad (11)$$

причем U и T здесь те же, что и в (5). В соответствии с анализом [6] можно показать, что при $|\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p|\ll c_g$ величины в (5) оцениваются следующим образом: $(\mathbf{v}_i/U,\ I_{ij})\simeq(\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p)/U$. Объединяя неравенства (5) и

(11), получим $\alpha_{ij}' \,\mathrm{Sh}_m K_m \ll \alpha_{ij}' |\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p|/U \leqslant \mathrm{Sh}_m K_m$, откуда $\alpha_{ij}' \ll 1$. При $i=p$, $j=g$ с учетом $\alpha_{gp}' \ll 1$ выписанная цепочка неравенств примет вид

$$\varepsilon \frac{\sigma_{pg}^2}{\sigma_p^2} \frac{\sigma_p}{\sigma_g} \left(\frac{T_g}{T_p}\right)^{1/2} \ll \varepsilon \frac{\sigma_{pg}^2}{\sigma_p^2} \frac{\sigma_p}{\sigma_g} \left(\frac{T_g}{T_p}\right)^{1/2} \frac{|\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p|}{U\,\mathrm{Sh}_m K_m} \ll 1 \qquad (12)$$

Для смеси газов $\sigma_g \sim \sigma_p \sim \sigma_{pg}$, поэтому совместное выполнение неравенств (5) и (11), т. е. реализация двухскоростного течения, возможны при $\varepsilon (T_g/T_p)^{1/2} \ll 1$. Совместно с условием существования дополнительного приближенного столкновительного инварианта (9) получим $\varepsilon \ll (T_g/T_p)^{1/2} \ll \varepsilon^{-1}$.

Для получения более точных оценок рассмотрим несколько ситуаций. В случае $\mathrm{Sh}_g K_g \geqslant \mathrm{Sh}_p K_p$, пользуясь связью

$$\alpha_{gp}' = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sigma_{gp}}{\sigma_p} \frac{\mathrm{Sh}_g K_g}{\mathrm{Sh}_p K_p} \left(\frac{T_g}{T_p}\right)^{1/2}$$

из цепочки неравенств получим $\varepsilon (T_p/T_g)^{1/2} \sigma_p/\sigma_{gp} \geqslant \alpha_{gp}^{-1} \ll 1$, что противоречит принятым предположениям. Если $\mathrm{Sh}_p K_p > \mathrm{Sh}_g K_g$ и $K_g > \alpha_{gp}' |\mathbf{u}_g-\mathbf{u}_p|/U$, то можно получить $1+S_g \gg (T_p/T_g)^{1/2} \sigma_{gp}/\sigma_p (1+S_p)$. Применим для анализа этого соотношения процедуру, предложенную в [6], т. е. рассмотрим течения в системах, движущихся со скоростями $\mathbf{u}_g$ и $\mathbf{u}_p$. В первом случае получим

$$\left(\frac{T_p}{T_g}\right)^{1/2} \frac{\sigma_{gp}}{\sigma_p} \left(1 + \frac{|\mathbf{u}_p-\mathbf{u}_g|}{c_p}\right) \ll 1$$

Для его выполнения необходимо $(T_p/T_g)^{1/2} \ll 1$. Во втором случае

$$\left(\frac{T_p}{T_g}\right)^{1/2} \frac{\sigma_{gp}}{\sigma_p} \ll 1 + \frac{|\mathbf{u}_p-\mathbf{u}_g|}{c_g}$$

что приводит к тем же требованиям.

Таким образом, двухскоростное течение может реализоваться при условии

$$\varepsilon \frac{\sigma_{gp}}{\sigma_p} \left(\frac{T_g}{T_p}\right)^{1/2} \ll \frac{n_p}{n_g} \ll \frac{\sigma_g}{\sigma_{gp}} \qquad (13)$$

что возможно, только если релаксация в легкой компоненте происходит намного быстрее, чем в тяжелой: $\mathrm{Sh}_p K_p \gg \mathrm{Sh}_g K_g$.

Если принять во внимание приведенную в [6] оценку, согласно которой для мелкодисперсной примеси $\sigma_g/\sigma_p < \varepsilon$, а $\sigma_p/\sigma_{gp} \sim 4$, то из (13) получим $1/4 \ll \varepsilon n_g/n_p \ll 4 (T_p/T_g)^{1/2}$. Поскольку $T_g \geqslant T_p$, то необходимые условия существования двухскоростного течения не выполняются.

Обсудим в связи с этим так называемую модель вложенных континуумов. Она описывает совершенно иной режим течения, когда $\mathrm{Sh}_g K_g \ll 1$, а $\mathrm{Sh}_p K_p \gg 1$. В этом случае для тяжелой компоненты наступает бесстолкновительный режим и функция f_p на временах характерного изменения f_g является медленной переменной. Поэтому если начальное распределение f_p° близко к δ-образному, то оно сохраняется во всей области течения. Такая функция распределения приводит к обращению в ноль тензора напряжений и средней энергии внутреннего движения в тяжелой компоненте, а следовательно, для первых четырех моментов n_p и u_p имеем замкнутую систему уравнений (содержащую медленные переменные — характеристики легкой компоненты). В результате получаем двухжидкостную модель Рахматулина, характеризующуюся отсутствием давления в тяжелой компоненте [12] (случай достаточно крупных частиц, когда реализуется газодинамический режим их обтекания и используемый подход неприменим, разумеется, исключается из проводимого рассмотрения (см. [13])).

Более общая ситуация заключается в том, что функция распределения f_p° имеет такой вид, при котором ее несколько первых моментов отличны от нуля, а остальные или обращаются в ноль, или являются малыми порядка некоторой величины $\gamma \ll 1$ (или меньше). Тогда уравнения для этих моментов асимптотически отщепляются. В результате получим систему, в которую в качестве неизвестных будут входить медленные переменные для легкой компоненты и несколько первых моментов от f_p°.

Помимо рассмотренного выше случая с δ-образным распределением примером может служить ситуация, когда f_p° имеет максвелловский вид f_{pm}°. В этом случае тяжелая компонента будет описываться пятью ее моментами n_p, $\mathbf{u}_p$, T_p, не меняющимися на тех же временах, что и сама f_p. В этом смысле можно говорить о двухскоростных, двухтемпературных моделях. Если, как было рассмотрено выше, $f_m^\circ = f_{pm}^\circ + O(\gamma)$, то условие применимости двухжидкостной модели $\mathrm{Sh}_p K_p \gg 1$ можно существенно расширить, поскольку $I_{pp}(f_{pm}^\circ) \equiv 0$ и, следовательно, $I_{pp}(f_p^\circ) = O(\gamma)$. В результате требуемое условие можно записать в виде $\mathrm{Sh}_p K_p \gg \gamma + \varepsilon^2 \alpha_{pg}$. Если удается сделать γ достаточно малым ($\gamma \lessapprox \varepsilon^2 \alpha_{pg}$), то последнее условие примет вид $\mathrm{Sh}_p K_p \gg \varepsilon^2 \alpha_{pg}$ и его нельзя будет ослабить. Если окажется $\mathrm{Sh}_p K_p \ll 1$, то скорости $\mathbf{u}_p$ и $\mathbf{u}_g$ станут асимптотически эквивалентными во введенном выше смысле.

Важным следствием изложенного является то, что уточнение этих моделей должно проводиться не в плане применения метода типа Чепмена — Энскога для системы кинетических уравнений, а в более точном решении кинетического уравнения для тяжелой компоненты в условиях переходного режима (это гораздо более сложная задача). Упрощающим обстоятельством здесь является наличие малого параметра ε, позволяющего использовать разложения по этому параметру, предложенные в [6, 8]. При численной реализации такой задачи наиболее перспективны, по-видимому, методы, основанные на решении для тяжелой компоненты соответствующей многочастичной задачи [14], которое проводится на основе траекторных методов [15, 16].

Тяжелая компонента может существенным образом искажать функцию распределения легкой компоненты. В [17] с использованием модельного кинетического уравнения для f_g в режиме, когда f_p — медленная переменная, было показано, что уже в нулевом приближении по параметру τ_g/τ_h функция f_g не максвелловская, в соответствующих уравнениях Эйлера появляются дополнительные источниковые члены, а коэффициенты переноса превращаются в анизотропные тензоры.

Если интересоваться временами τ_h, когда $\mathrm{Sh}_p K_p \ll 1$, задача существенно усложняется в связи с возникновением сингулярного возмущения и необходимостью сшивать решение в начальном слое (область которого может оказаться сравнимой с макроскопическими масштабами течения) с нормальным решением.

Рассмотрим, как влияет на вид уравнений для медленных переменных соотношение величин α_{ij} и K_i. Вследствие свойства, доказанного на основании представления (6), для тяжелой компоненты все определяется соотношением K_p и $\alpha_{pg}' = \varepsilon^2 \alpha_{gp}$, если $\alpha_{pg}' \ll K_p$, то в нулевом приближении по K_p источниковые (обменные) члены в соответствующих уравнениях могут быть отброшены, если же $\alpha_{pg}' \gtrapprox K_p$, то влияние обменных членов будет существенным, а при $\alpha_{pg}' \gg K_g$ имеем пространственно однородный случай. При проведении подобного анализа для g-фазы в уравнении для энергии следует сравнивать и $\varepsilon (T_p/T_g)^{1/2} \alpha_{gp}$ и K_g.

Автор выражает глубокую благодарность Е. Г. Колесниченко за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Дубровский Г. В. и др.* К кинетической теории смеси газа с твердыми частицами: Препринт № 941. Л.: ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, 1985. 44 с.
2. *Дубровский Г. В., Кондратенко А. В., Федотов В. А.* Кинетическая модель структурной газовзвеси // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 137–143.
3. *Сирович Л.* Кинетическое моделирование газовых смесей // Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. С. 246–269.
4. *Струминский В. В.* Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 203–210.
5. *Лунькин Ю. П., Мымрин В. Ф.* Кинетическая модель газовзвеси // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 1. С. 134–139.
6. *Галкин В. С., Макашев Н. К.* Условия применимости и молекулярно-кинетический вывод уравнений многотемпературной, многоскоростной газодинамики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 6. С. 1443–1453.
7. *Струминский В. В., Шавалиев М. Ш.* Явления переноса в многоскоростных и многотемпературных смесях газов // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 83–90.
8. *Fernandez de la Mora J., Fernandez-Feria.* Two-fluid Chapman – Enskog theory for binary gas mixtures // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 7. P. 2063–2072.
9. *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965. 307 с.
10. *Колесниченко Е. Г.* О методике вывода гидродинамических уравнений для сложных систем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 96–105.
11. *Колесниченко Е. Г., Лосев С. А.* О переходе от кинетического к макроскопическому описанию динамики многоатомных и химически реагирующих газов // Аэродинамика разреженных газов. Вып. 11. Физическая газокинетика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. С. 20–32.
12. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
13. *Горбачев Ю. Е., Круглов В. Ю.* Расчет параметров течения двухфазной смеси при обтекании сферы с учетом столкновений частиц между собой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 93–96.
14. *Рудяк В. Я.* О связи основного кинетического уравнения Каца с уравнениями Лиувилля и Больцмана // Тр. 9-й Всесоюз. конф., т. 1, 1987. Свердловск: Уральск. ун-т. 1988. С. 14–22.
15. *Рамм М. С., Шмидт А. А.* Обтекание затупленного тела потоком газовзвеси. 1. Учет отражения дисперсных частиц от обтекаемой поверхности, оценка вклада столкновений между частицами: Препринт № 1097. Л.: ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, 1987. 24 с.
16. *Горбачев Ю. Е., Круглов В. Ю., Рябинина Т. Н.* Истечение в вакуум бинарной смеси газов при значительном различии молекулярных весов компонент // Инж.-физ. журн. 1990. Т. 58. № 6. С. 932–938.
17. *Горбачев Ю. Е.* Кинетическая модель несущей фазы в гетерогенной среде // ПМТФ. 1989. № 6. С. 106–114.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.VII.1990