

УДК 532.527:537.84

© 1991 г.

Н. Ю. КОЛПАКОВ, В. И. КОЛЕСНИЧЕНКО

ЭЛЕКТРОВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Основные трудности в исследовании трехмерных вихревых магнитогиродинамических (МГД) течений связаны с тем, что, во-первых, для нахождения поля электромагнитных сил приходится решать самостоятельную краевую задачу; во-вторых, для большинства сильноточных технологических МГД-процессов и ряда природных явлений режимы этих течений существенно нелинейны. Особое место занимают МГД-течения, генерируемые за счет взаимодействия подводимого к жидкости электрического тока с собственным магнитным полем. Этот класс МГД-течений получил название электровихревых течений [1].

Наличие определенной симметрии в распределении электромагнитных сил и геометрии области жидкого проводника позволяет находить решение в автомодельной форме. Данная работа посвящена точным решениям нелинейных уравнений для осесимметричных электровихревых течений проводящей несжимаемой жидкости в неограниченных цилиндрических полостях.

1. Постановка задачи. Рассматривается осесимметричное с седловой точкой растекание электрического тока в проводящем массиве (фиг. 1), в котором имеется цилиндрическая полость, заполненная жидкостью той же электропроводности. Исследуем две различные ситуации, когда жидкость ограничена плоскостями $z = \pm l$ или цилиндрической поверхностью $r = l$. В меридиональном сечении эти ситуации переходят одна в другую при перемене осей координат, оставляя распределение электрического тока неизменным. Неоднородность растекания тока обуславливает вихревой характер электромагнитной силы, что приводит к движению проводящей жидкости.

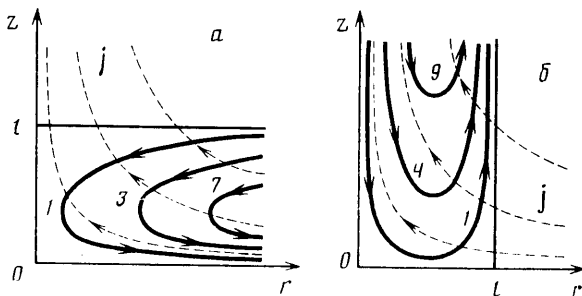
В отсутствие внешних магнитных полей электровихревое течение описывается безразмерными уравнениями магнитной гидродинамики [1]

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + S \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} &= \beta^{-1} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приняты следующие единицы измерения физических величин: ν/l — скорость, l^2/ν — время, $\rho \nu^2/l^2$ — давление, $I \mu_0/l$ — магнитная индукция. Параметр $S \equiv \mu_0 I^2/\rho \nu^2$ определяет интенсивность индуцированного силой Лоренца движения жидкости, число Бэтчелора $\beta \equiv \mu_0 \sigma \nu$ характеризует отношение кинематической вязкости к магнитной; ρ , σ , I , l — плотность, проводимость, некий ток в жидкости, характерный линейный размер.

В задачах об электровихревом течении нет характерной скорости, поэтому аналогом числа Рейнольдса является зависящая от S безразмерная скорость течения жидкости. При $S=0$ жидкость покоится, при малых S электромагнитная сила уравновешивается вязкими членами уравнения движения и скорость $v \sim S$, в нелинейном режиме для невязкого ядра течения $v \sim \sqrt{S}$.

Для проводящих жидкостей $\beta \sim 10^{-7} \dots 10^{-8}$, что позволяет разложить магнитное поле в ряд по степеням β . Обычно ограничиваются членами нулевого и первого порядка по β (так называемые электродинамическое



Фиг. 1.

и безындукционное приближения), магнитное поле при этом удовлетворяет уравнению Лапласа.

В случае азимутального магнитного поля $\mathbf{V}=(0; B_\varphi(r, z); 0)$ растекание тока удобно описывать с помощью функции электрического тока ψ_1 . Тогда, пренебрегая индукционными токами, запишем $\Delta \mathbf{V}=0$ в виде

$$[\partial_z^2 + r\partial_r(r^{-1}\partial_r)]\psi_1(r, z) = 0 \quad (1.2)$$

$$j_r = -r^{-1}\partial_z\psi_1, \quad j_z = r^{-1}\partial_r\psi_1$$

Решение (1.2) для рассматриваемого растекания электрического тока тривиально $\psi_1 = zr^2$. Линии электрического тока имеют гиперболический вид и в меридиональном сечении показаны на фиг. 1, φ — компонента магнитного поля $B_\varphi = rz$. В качестве количественной характеристики тока выберем полный ток I_0 , проходящий через участок цилиндрической поверхности $r=l$, ограниченный плоскостями $z=\pm l$. Тогда $I = I_0/4\pi$.

Система (1.1) допускает несколько вариантов разделения переменных, позволяющих находить решения в автомодельной форме. Первая ситуация — электровихревое течение между горизонтальными плоскостями (фиг. 1, а) — принадлежит к классу Кармана с переменной автомодельности $\eta = z/l$, для второй ситуации — электровихревое течение в вертикальном цилиндре (фиг. 1, б) — переменная автомодельности $\xi = r^2/l^2$. Согласно [2], число исследованных гидродинамических задач в последнем случае ограничено, а задач в МГД-постановке не имеется вообще.

2. Электровихревое течение в автомодельном классе Кармана. Согласно теореме Гельмгольца, векторное силовое поле $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{V} = (-2rz^2; 0; -r^2z)$ при дополнительном условии задания нормальной составляющей функции \mathbf{f} на границах жидкой области может быть однозначно представлено в виде суммы безвихревого и соленоидального полей

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi_1 + \mathbf{F}_1, \quad (2.1)$$

$$\Phi_1 = -r^2z^2/2 - z^4/6, \quad \mathbf{F}_1 = (-rz^2; 0; 2z^3/3)$$

Разложение (2.1) дает возможность судить о направлении циркуляции жидкости. Можно показать, что циркуляция \mathbf{F}_1 на замкнутом контуре $z=l, r=0, z=0, r=\text{const}$ (фиг. 1, а) отрицательна, а на контуре $z=-l, r=0, z=0, r=\text{const}$ — положительна. Баланс вихревой компоненты электромагнитной силы на этих контурах приводит к тому, что возникает двухвихревое течение, сходящееся к оси z около плоскостей $z=\pm l$ и расходящееся в центре слоя. Обратим внимание, что при смене растекания тока по направлению на обратное, направление и структура течения не меняются, так как параметр $S \sim I^2$.

Представим функцию тока Стокса меридионального течения в виде

$\psi(r, z) = \xi\varphi(\eta)$, тогда

$$v_r = -\sqrt{\xi} d\varphi/d\eta, \quad v_z = 2\varphi \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) и (2.2) уравнение движения (1.1) в стационарном случае запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\partial_{\xi} p_m(\xi, \eta) &= 2\varphi\varphi'' - (\varphi')^2 - \varphi''' - S\eta^2 \\ \partial_{\eta} p_m(\xi, \eta) &= 2\varphi'' - 2\varphi\varphi' \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $p_m = p + SB\varphi^2/2$ — полное магнитное давление, штрих означает дифференцирование по η . Из (2.3) следует, что давление является линейной функцией координаты ξ

$$p_m = p_m(0, 0) - \xi\lambda/2 + 2\varphi' - \varphi^2$$

где λ — постоянная интегрирования. Тогда уравнение для функции тока примет вид

$$0 = \varphi''' + (\varphi')^2 - 2\varphi\varphi'' + S\eta^2 - \lambda \quad (2.4)$$

Граничными условиями задачи служат условия прилипания

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0, \quad \varphi(-1) = \varphi'(-1) = 0 \quad (2.5)$$

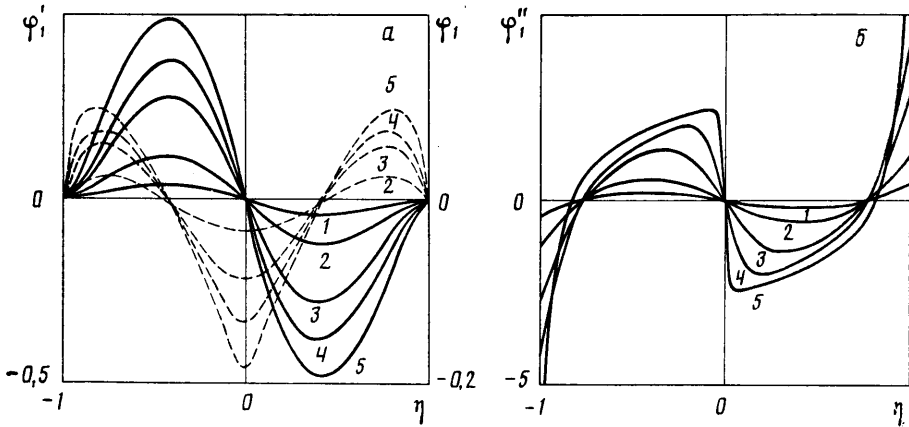
Двухпараметрическая краевая задача (2.4), (2.5) является задачей на собственные значения. При $\eta = \pm 1$ имеем связь $\lambda(S) = \varphi'''(\pm 1) + S$. Отметим, что при $S=0$ (2.4) совпадает с дифференциальным уравнением осесимметричного течения вблизи критической точки.

Решение линейной задачи (ползущее течение) имеет вид $\varphi = -S(\eta - 2\eta^3 + \eta^5)/60$; $\lambda = 0, 2S$. Как и ожидалось, электровихревое течение симметрично относительно плоскости $\eta=0$, тороидальный вихрь при $\eta > 0$ вращается против часовой стрелки, вдоль оси z жидкость течет в сторону уменьшения плотности тока. Полагая границей применимости стоксова приближения условие $Re \approx 1$, получим, что линейное решение справедливо до $S \approx 107$.

Аналитическое решение краевой задачи (2.4), (2.5) при больших значениях параметра S получить не удалось, дифференциальное уравнение численно интегрировалось методом Кутты — Мерсона. Недостающие граничные условия $x_1 = \varphi''(1)$ и $x_2 = \varphi'''(1)$, появляющиеся при сведении краевой задачи к задаче Коши, определялись с помощью оптимизационной процедуры Хука — Дживса [3]. Метод прямого поиска для определения минимума функции $|\varphi(x_1, x_2, \eta = -1)| + |\varphi'(x_1, x_2, \eta = -1)|$ обеспечивал выход решения на границу $\varphi(-1) = \varphi'(-1) = 0$ с точностью 0,01% максимального значения.

На фиг. 2 приведены результаты численного интегрирования в широком диапазоне значений параметра S : 10, 10², 10³, 10⁴, 2·10⁷ (кривые 1—5 соответственно). Вертикальные профили скорости изображены на фиг. 2, а; для удобства все величины нормированы на \sqrt{S} : $\varphi_1 = \varphi/\sqrt{S}$, $\varphi_1' = \varphi'/\sqrt{S}$. Экстремумы осевой скорости $v_z/2 = \varphi(\eta)$ (сплошные линии) в стоксовом режиме приходятся на $\eta = \pm 0,5$ и с ростом S смещаются к центру слоя. Радиальная скорость $-v_r/\sqrt{\xi} = \varphi'(\eta)$ (штриховые линии) существенно меняется с увеличением параметра S . В нелинейном режиме электровихревого течения имеет место резкое нарастание φ' вблизи твердых границ $\eta = \pm 1$, что свидетельствует о формировании пограничного слоя. На свободной границе $\eta = 0$ происходит вытягивание эпюры скорости, по форме напоминающей струйное течение.

Распределение φ -компоненты завихренности $\varphi''(\eta)\sqrt{\xi}$ поперек слоя видоизменяется с возрастанием полного тока I_0 следующим образом (фиг. 2, б). При малых S завихренность слабо отличается от линейного решения $S\sqrt{\xi}(5\eta^3 - 3\eta)/15$. При больших S функция $\varphi_1'' = \varphi''(\eta)/\sqrt{S}$



Фиг. 2

имеет большие градиенты около свободной и твердых границ. Так, при $S=2 \cdot 10^7$ (кривая 5 на фиг. 2, б) видно, что двухвихревое течение разделяется на невязкое ядро течения, два пограничных слоя у твердых поверхностей и свободный пограничный слой около $\eta=0$. Линии тока $\varphi/\varphi_{\max}=C$ для $S=2 \cdot 10^7$, $\varphi_{\max}=19,25$ изображены на фиг. 1, а.

3. Электровихревое течение с переменной автомодельности $\xi = r^2/l^2$. Перейдем к исследованию течения в неограниченной цилиндрической полости (фиг. 1, б). В отличие от предыдущей ситуации, когда движение проводящей жидкости происходило преимущественно в радиальном направлении, течение в цилиндре в основном вертикально — вдоль оси z . Поле электромагнитных сил в обоих случаях одинаково, однако представление объемной силы (2.1) из-за изменения геометрии жидкой области иное

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi_2 + \mathbf{F}_2 \quad (3.1)$$

$$\Phi_2 = -r^2 z^2 + r^4 / 16, \quad \mathbf{F}_2 = (-r^3/4; 0; z r^2)$$

Анализируя баланс вихревой компоненты \mathbf{F}_2 на замкнутых контурах, приходим к выводу, что течение также имеет двухвихревую структуру, причем при $\eta > 0$ жидкость опускается у оси z и поднимается около поверхности цилиндра.

Функция тока в отличие от данных разд. 2 пропорциональна координате η : $\psi = \eta f(\xi)$, а компоненты скорости

$$v_r = -f/\sqrt{\xi}, \quad v_z = 2\eta df/d\xi \quad (3.2)$$

Подставив (3.1), (3.2) в уравнение (1.1), получим для стационара следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2\partial_\xi p_m(\xi, \eta) &= 4f'' - (f^2/\xi)' - S\eta^2 \\ \eta^{-1}\partial_\eta p_m(\xi, \eta) &= 8(\xi f'')' + 4ff'' - 4(f')^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по координате ξ . В рассматриваемом автомодельном классе полное давление квадратично по η , а уравнение для функции тока имеет вид

$$\begin{aligned} p_m &= p_m(0, 0) - (2\lambda + 1/2 S \xi) \eta^2 + 2f' - 1/2 f^2 \xi \\ 2(\xi f'')' + ff'' - (f')^2 + 1/4 S \xi + \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Считая поверхность цилиндра твердой и непроницаемой, примем в качестве граничных условий при $r=l$ ($\xi=1$) условия прилипания $v_r=v_z=0$. На оси симметрии z положим условие отсутствия источников и условие равенства нулю касательных напряжений $v_r=\partial_r v_z=0$. В результате функция $f(\xi)$ будет удовлетворять граничным условиям

$$f(0)=f(1)=f'(1)=0, \quad f''(0)<\infty \quad (3.5)$$

Асимптотическое решение (3.4), (3.5) при $v \rightarrow \infty$ имеет вид $f=-S\xi(\xi-1)^2/96$; $\lambda=-S/12$ и описывает электровихревое течение, расходящееся радиально в плоскости $\eta=0$.

Для системы (3.4), (3.5) также ставилась задача Коши при $\xi=0$

$$f(0)=0, \quad f'(0)=\kappa_1, \quad f''(0)=\kappa_2, \quad \lambda=\kappa_1^2-2\kappa_2 \quad (3.6)$$

которая содержит два параметра: κ_1 и κ_2 . Перебирая эти параметры, можно получить все семейство решений исходной краевой задачи для различных значений параметра S .

Процедура численного интегрирования задачи (3.4)–(3.6) описана выше. Особая точка $\xi=0$ исключалась построением внутреннего решения до $\xi=\xi_1$

$$f(\xi_1)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_1^n$$

$$a_0=0, \quad a_1=\kappa_1, \quad a_2=\kappa_2/2, \quad a_3=(\kappa_1\kappa_2-S)/24$$

$$a_4=\kappa_2^2/144, \quad a_5=(2\kappa_1\kappa_2^2-3S\kappa_2)/5760$$

$$a_6=(4\kappa_2^3+3S^2+\kappa_1^2\kappa_2^2-3S\kappa_1\kappa_2)/172800$$

Здесь ξ_1 порядка шага интегрирования.

Радиальные профили осевой $f_1'=f'/\sqrt{S}$ (штриховые линии) и радиальной $f_1=-f/\sqrt{S}\xi$ (сплошные) составляющих поля скорости при различных S показаны на фиг. 3: $S=5,76$; 36 ; 144 ; 400 ; 432 (кривые 1–5 соответственно). С ростом параметра S в приосевой области цилиндрической полости формируется струйное течение. Линии тока при $S=432$ изображены на фиг. 1, б.

4. Дифференциальное вращение в цилиндре. Исследуем влияние электровихревого течения на азимутальное вращение проводящей жидкости в вертикальном цилиндре, граница которого вращается с постоянной угловой скоростью Ω . В этом случае φ -компонента скорости не зависит от η , что исключает обратное влияние вращения на электровихревое течение, и удовлетворяет уравнению

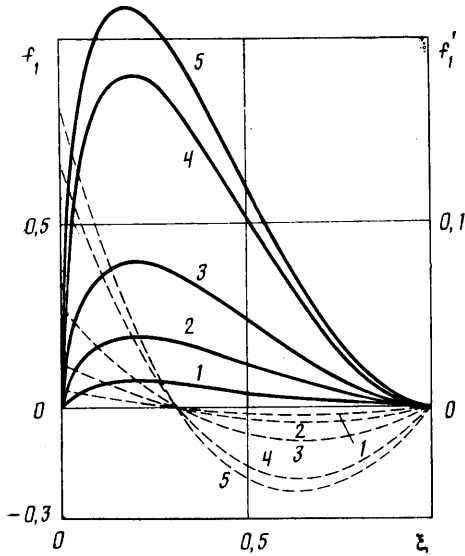
$$\partial_t f_2 - 2ff_2' = 4\xi f_2'' \quad (4.1)$$

где $f_2(\xi) = \sqrt{\xi} v_\varphi$, за единицу скорости вращения принято Ωl . Уравнение (4.1) с граничными условиями $f_2(0)=0$, $f_2(1)=1$ в стационарном случае дважды интегрируется

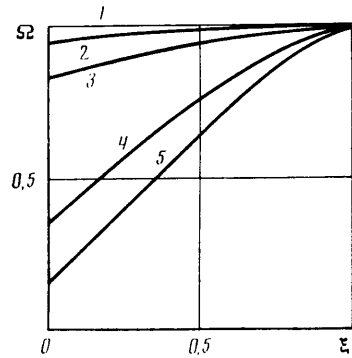
$$f_2(\xi) = \kappa_3 \int_0^\xi \exp\left\{-\int_0^\xi f d\xi/2\xi\right\} d\xi$$

где $\kappa_3=f_2'(0)$ зависит от меридиональной циркуляции.

На фиг. 4 представлены результаты численного интегрирования совместной системы уравнений (3.4), (3.6) и (4.1). Радиальное распределение угловой скорости $\Omega=f_2/\xi$ зависит от параметра S . При $S=0$ (кривая 1) в жидкости, естественно, наблюдается твердотельное вращение.



Фиг. 3



Фиг. 4

С ростом S : 36, 144, 400, 432 (кривые 2–5 соответственно) вращение в центральной области замедляется, а размеры этой области увеличиваются. Таким образом, во вращающемся цилиндрическом сосуде при осесимметричном растекании электрического тока в проводящей жидкости происходит «вытеснение» вращения к стенке.

В заключение оценим границы применимости магнитного приближения Стокса $Re_m = \beta Re = \beta v_{\max} \ll 1$, так как в задачах об электровихревых течениях в неограниченном объеме компоненты поля скорости имеют положительную степенную зависимость от координат [4]. Так, в классе Кармана (2.2) v_z не зависит от r , а v_r пропорциональна r , во втором авторском классе (3.2) v_r не зависит от z , v_z линейна по z . В обоих случаях для нелинейного режима течения $v_{\max} \sim \sqrt{S}$, поэтому справедливо $S \ll \beta^{-2}$. Для проводящих жидкостей $\beta \sim 10^{-7} \dots 10^{-8}$, следовательно, влиянием движения жидкости на распределение электромагнитных сил можно пренебречь до $S \sim 10^{12} \dots 10^{14}$. В рассматриваемом случае значения параметра S заведомо удовлетворяют этому условию. При больших числах Бэтчелора необходимо решать самосогласованную систему уравнений (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
2. Гольдшиг М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
4. Колпаков Н. Ю., Колесниченко В. И. Электровихревое течение вблизи критической окружности // Магнит. гидродинамика. 1990. № 3. С. 99–106.

Пермь

Поступила в редакцию
18.VII.1990