

УДК 532.526.5

© 1991 г.

Г. Г. ВИЛЕНСКИЙ

О ТРЕХМЕРНОМ ЛОКАЛЬНОМ ОТРЫВЕ

Построено решение задачи о локальном отрыве пространственного пограничного слоя от произвольной гладкой поверхности. Отрыв происходит вдоль предельной линии тока, в точках которой терпит излом ортогональная к ней составляющая поверхностного трения, рассчитанная по уравнениям пограничного слоя. Найдено асимптотическое разложение решения уравнений Навье – Стокса, описывающее поле течения в зоне отрыва. Обобщены на трехмерный случай выводы плоской и авторемодельной теории локального отрыва.

Существует два определения линии отрыва [1]. Согласно первому из них, ею является огибающая предельных линий тока [2], а согласно второму – предельная линия тока, выходящая из седловой особой точки поля поверхностных напряжений [3]. В обоих случаях линия отрыва отождествляется с одной из предельных линий тока или с ее частью. Поэтому представляется целесообразным не связывать процесс построения решения задачи с выбором какого-либо из этих определений, а непосредственно исследовать структуру решений уравнений пограничного слоя в малой окрестности произвольно взятой предельной линии тока. Данный подход позволяет выяснить общие условия, при которых течение перестает быть гладким и приобретает отрывной характер. При этом построенное решение должно обладать свойствами, установленными в ранее опубликованных работах. В частности, необходимо, чтобы при переходе к плоскому обтеканию оно воспроизводило решение, найденное в [4, 5]. Кроме того, согласно выводам работ [6, 7], в окрестности точки нулевого поверхностного трения линия отрыва должна быть огибающей предельных линий тока и совпадать с кривой, ограничивающей область продолжимости решения уравнений пограничного слоя. Причем решение вблизи нее может иметь особенность Гольдштейна [8]. Наконец, в соответствии с данными работ [9–11] в общем случае пространственного локального отрыва следует ожидать сохранения трехслойной структуры потока, свойственной плоской задаче.

1. Рассмотрим установившееся обтекание потоком несжимаемой жидкости гладкой поверхности S , заданной параметрически: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\xi_1, \xi_2)$, где \mathbf{R} – радиус-вектор. Пусть y/\sqrt{Re} – расстояние до S ; $u, v, w/\sqrt{Re}$ – проекции вектора скорости на оси криволинейной ортогональной системы координат ξ_1, ξ_2, y ; K_1, K_2 – кривизны координатных линий ξ_1 и ξ_2 , $H_i = \sqrt{(\partial \mathbf{R} / \partial \xi_i)^2}$, $i=1, 2$; $Re \gg 1$ – характерное число Рейнольдса. Все входящие в задачу физические величины будем считать приведенными к безразмерному виду.

Выберем на S гладкую кривую Γ , определяемую формулами $\xi_1 = \xi_{10}(\sigma)$, $\xi_2 = \xi_{20}(\sigma)$, где σ – длина ее дуги в плоскости переменных (ξ_1, ξ_2) . Введем в окрестности Γ координаты v и σ по формулам $\xi_1 = \xi_{10}(\sigma) + n_x^\circ(\sigma)v$, $\xi_2 = \xi_{20}(\sigma) + n_y^\circ(\sigma)v$ где (n_x°, n_y°) – орт нормали к кривой Γ в плоскости (ξ_1, ξ_2) , направленный в сторону ее центра кривизны. В переменных (σ, v) уравнения трехмерного пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(-t_0 \frac{u}{H_1} + s_0 \frac{v}{H_2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{v} \right) + \left(\frac{n_y^\circ u H^{-1}}{1 - \kappa v} - \frac{n_x^\circ v H_2^{-1}}{1 - \kappa v} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{u}{v} \right) + w \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{v} \right) + \\ & + \frac{u}{H_1 H_2} \left(-\frac{n_x^\circ}{1 - \kappa v} \frac{\partial H_1}{\partial \sigma} + s_0 \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} - \\ & - \frac{v}{H_1 H_2} \left(\frac{n_y^\circ}{1 - \kappa v} \frac{\partial H_2}{\partial \sigma} - t_0 \frac{\partial H_2}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

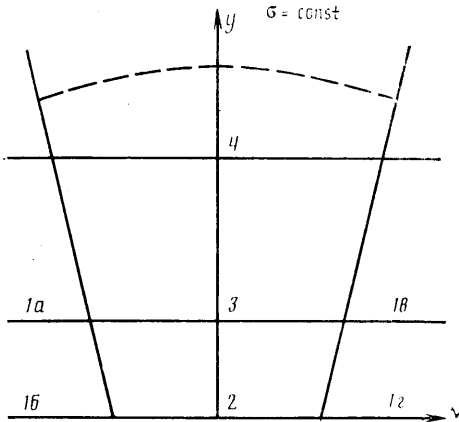
$$= - \left(\begin{array}{l} H_1^{-1} \left(\frac{n_y^\circ}{1-\kappa\nu} \frac{\partial P}{\partial \sigma} - t_0 \frac{\partial P}{\partial \nu} \right) \\ H_2^{-1} \left(\frac{-n_x^\circ}{1-\kappa\nu} \frac{\partial P}{\partial \sigma} + s_0 \frac{\partial P}{\partial \nu} \right) \end{array} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right) \quad (1.1)$$

$$\left(-t_0 H_1^{-1} \frac{\partial u}{\partial \nu} + s_0 H_2^{-1} \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) + \left(\frac{n_y^\circ}{1-\kappa\nu} H_1^{-1} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{n_x^\circ}{1-\kappa\nu} H_2^{-1} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{u}{H_1 H_2} \left(\frac{n_y^\circ}{1-\kappa\nu} \frac{\partial H_2}{\partial \sigma} - t_0 \frac{\partial H_2}{\partial \nu} \right) + \frac{v}{H_1 H_2} \left(\frac{-n_x^\circ}{1-\kappa\nu} \frac{\partial H_1}{\partial \sigma} + s_0 \frac{\partial H_1}{\partial \nu} \right) = 0$$

Здесь (s_0, t_0) — вектор касательной к Γ в плоскости (ξ_1, ξ_2) , а ее кривизна κ , K_1, K_2, H_1, H_2 — величины порядка единицы.

Граничные условия: $u=v=w|_{\nu=0}=0$; u, v при $y \rightarrow \infty$ принимают соответствующие значения из потенциальной теории. Давление P считается известным.

2. Исследуем структуру течения вблизи кривой Γ (т. е. при $\nu \ll 1$) в предположении, что она является предельной линией тока



Фиг. 1

$$\frac{\partial}{\partial y} (-t_0 u H_1^{-1} + s_0 v H_2^{-1}) |_{\nu=0} = 0 \quad (2.1)$$

Разложим величины P, H_1, H_2 в ряды Тейлора по ν

$$P = P_0 + \sum_{j \geq 0} P_{0j} \nu^{j+1},$$

$$H_i = h_{i0} + h_i' \nu + h_i'' \nu^2 + \dots, \quad i=1, 2$$

Следуя [4], можно показать, что в пристеночной области 1b (см. фиг. 1, заимствованную из работы [5]) с локальной переменной $\eta = y(-\nu)^{-1/4}$, $\nu \rightarrow -0$, в кото-

рой силы инерции, трения и давления имеют одинаковый порядок, решенные системы (1.1) представимо в виде следующих разложений по ν :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \eta (-\nu)^{1/4} + \begin{pmatrix} P_{x0} h_{10}^{-1} \\ P_{y0} h_{20}^{-1} \end{pmatrix} \frac{\eta^2}{2} (-\nu)^{3/4} + \begin{pmatrix} c_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \frac{\eta^4}{4!} (-\nu) + \\ &+ \left\{ \begin{pmatrix} c_3 \\ a_3 \end{pmatrix} \left(\eta - \frac{3b_2}{5!} \eta^5 \right) + \begin{pmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \end{pmatrix} \frac{\eta^5}{5!} \right\} (-\nu)^{5/4} + \sum_{i=6}^8 \begin{pmatrix} u_i(\sigma, \eta) \\ v_i(\sigma, \eta) \end{pmatrix} (-\nu)^{i/4} + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w = (b_{31} - (\sigma) - M_0) \frac{\eta^2}{2} (-\nu)^{1/2} + w_3(\sigma, \eta) (-\nu)^{3/4} +$$

$$+ w_5(\sigma, \eta) (-\nu)^{5/4} + w_6(\sigma, \eta) (-\nu)^{6/4} + \dots$$

$$-t_0 h_{10}^{-1} c_0 + s_0 h_{20}^{-1} a_0 = 0$$

$$P_{x0} = n_y^\circ P_0 - t_0 P_{00}, \quad P_{y0} = -n_x^\circ P_0 + s_0 P_{00}$$

Коэффициенты трения $c_0(\sigma)$, $a_0(\sigma)$, $-vb_{31}^- = \partial/\partial y$ ($-t_0 h_{10}^{-1} u + s_0 h_{20}^{-1} v$) $|_{y=0}$, а также c_3 , a_3 определяются из решения задачи в целом. Выражения для полиномов i -й степени по η : u_i , v_i , w_i и величин Q_{3i} , c_2 , a_2 , M_0 ввиду их громоздкости не приведены. Точкой обозначено дифференцирование по σ . В области I_2 , где $\eta = yv^{-1/2} \sim 1$, $v \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \eta v^{1/2} + \begin{pmatrix} P_{x0} h_{10}^{-1} \\ P_{y0} h_{20}^{-1} \end{pmatrix} \frac{\eta^2}{2} v^{1/2} + \\ &+ \left\{ \begin{pmatrix} c_2 - \Lambda c_0 \\ a_2 - \Lambda a_0 \end{pmatrix} \frac{\eta^4}{4!} + \begin{pmatrix} c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \frac{\Lambda(1 + b_2 \eta^4/4!)}{b_2 J(\eta = \infty)} J(\eta) \right\} v + \dots \quad (2.3) \\ w &= -(b_{31}^+(\sigma) + M_0) \frac{\eta}{2} v^{1/2} + \dots \\ b_2 &= -t_0 P_{x0} h_{10}^{-2} + s_0 P_{y0} h_{20}^{-2} \\ J(\eta) &= \int_0^\eta \frac{\exp(-b_2 t^4/32)}{(1 + b_2 t^4/4!)^2} dt, \quad \Lambda(\sigma) = b_{31}^+ + b_{31}^- \end{aligned}$$

Здесь для определенности положим $b_2 > 0$. Величины $\Lambda(\sigma)$ и b_{31}^- будут найдены ниже.

В основной части пограничного слоя, т. е. в областях Ia и Ie , где $y \sim 1$, $v \rightarrow \mp 0$, с учетом выражений (2.2), (2.3) из (1.1) получаем

$$\begin{aligned} u &= U_0(\sigma, y) + (\mp v) U_1^\mp(\sigma, y) + \dots \quad (2.4) \\ v &= V_0(\sigma, y) + (\mp v) V_1^\mp(\sigma, y) + \dots \\ w &= W_0^\mp + \dots = \Phi_0 \left(\frac{\pm b_{31}^\mp - M_0}{b_2} + J_1 \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}_{y \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} P_{x0} h_{10}^{-1} \\ P_{y0} h_{20}^{-1} \end{pmatrix} \frac{y^2}{2} + \begin{pmatrix} c_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \frac{y^4}{4!} + \left\{ - \begin{pmatrix} c_3 \\ a_3 \end{pmatrix} 3b_2 + \begin{pmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \end{pmatrix} \right\} \frac{y^5}{5!} + \dots$$

$$\pm \begin{pmatrix} U_1^\mp \\ V_1^\mp \end{pmatrix} = \Phi_0^{-1} \left(\begin{pmatrix} P_{x0} h_{10}^{-1} \\ P_{y0} h_{20}^{-1} \end{pmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} + w \Big|_{y=0^\mp} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \right)$$

$$J_1 = - \int_0^y (\Phi_0'' - b_2 + \Phi_0 G_0 - H_0) \Phi_0^{-2} dy$$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -t_0 U_0 h_{10}^{-1} + s_0 V_0 h_{20}^{-1} \\ \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} &= (-n_x^\circ \dot{h}_{10} + s_0 h_1') \frac{U_0}{h_{10} h_{20}} \begin{pmatrix} V_0 \\ -U_0 \end{pmatrix} - \\ &- (n_y^\circ \dot{h}_{20} - t_0 h_2') \frac{V_0}{h_{10} h_{20}} \begin{pmatrix} V_0 \\ U_0 \end{pmatrix} + \left(\frac{n_y^\circ}{h_{10}} U_0 - \frac{n_x^\circ}{h_{20}} V_0 \right) \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \\ G_0 &= \left[\frac{n_y^\circ}{h_{10}} U_0 - \frac{n_x^\circ}{h_{20}} V_0 \right] + [n_y^\circ \dot{h}_{20} - t_0 h_2'] \frac{U_0}{h_{10} h_{20}} + \\ &+ [-n_x^\circ \dot{h}_{10} + s_0 h_1'] \frac{V_0}{h_{10} h_{20}}, \quad H_0 = -t_0 R_x h_{10}^{-1} + s_0 R_y h_{20}^{-1} \end{aligned}$$

Штрих означает дифференцирование по y .

Асимптотические разложения (2.2)–(2.4) описывают структуру пограничного слоя в малой окрестности произвольно выбранной предельной линии тока Γ . Из формул (2.4) видно, что если $b_{31}^+ = -b_{31}^-$, то поле течения вблизи Γ гладкое и указанная кривая не является особой [5].

Если же $b_{31}^+ \neq -b_{31}^-$, то нормальная к кривой Γ составляющая поверхностного трения τ_v имеет на этой линии излом ($\tau_v|_{v \rightarrow \mp 0} = \mp b_{31}^\mp v + \dots$), а перпендикулярная к поверхности тела скорость $w^\circ = w/\sqrt{\text{Re}}$ при $y \neq 0$ – скачок. Кривизны поверхностных вихревых линий при переходе через кривую Γ терпят разрыв, величина которого определяется функцией $\Lambda(\sigma)$. Действительно, из уравнения поверхностной вихревой линии $d\sigma/dv = -\tau_v/\tau_\sigma$, где τ_σ – проекция поверхностного трения на ось σ , для кривизны κ_0 рассматриваемой вихревой линии получаем

$$\kappa_0|_{v \rightarrow 0} = -\tau_\sigma^{-1} \frac{d\tau_v}{dv} \Big|_{v \rightarrow 0} + \dots, \quad \tau_\sigma \neq 0$$

Таким образом,

$$\kappa_0|_{v \rightarrow +0} - \kappa_0|_{v \rightarrow -0} = -\Lambda \tau_\sigma^{-1}(v=0) \neq 0$$

Из сказанного вытекает, что при $b_{31}^- \neq -b_{31}^+$ кривая Γ – особая. Поэтому для обеспечения гладкого сращивания решений, полученных по разные стороны от этой линии, необходимо ввести в рассмотрение область \mathcal{Z} , где $y \sim 1$, а $v_* = v\varepsilon^{-1} \sim 1$, $\varepsilon(\text{Re}) \ll 1$ [5].

3. В области \mathcal{Z} изучение течения проведем уже на основе уравнений Навье – Стокса. Согласно (2.4), в ней

$$u = U_0 + \varepsilon U_1^\circ + o(\varepsilon), \quad v = V_0 + \varepsilon V_1^\circ + o(\varepsilon), \quad w = W_0^\circ + o(1) \quad (3.1)$$

Давление более не является заданной функцией, а возможно взаимодействие вязкого и потенциального течений, для учета которого введем в разложение давления слагаемое $\delta(\varepsilon)P_*$, т. е.

$$P = P_0 + P_{00}v_*\varepsilon + P_{01}v_*^2\varepsilon^2 + \delta P_* + \dots$$

Из уравнений Навье – Стокса находим

$$U_1^\circ = -U_1^- v_* - B b_2^{-1} \frac{\partial U_0}{\partial y}, \quad V_1^\circ = -V_1^- v_* - B b_2^{-1} \frac{\partial}{\partial y} V_0 \quad (3.2)$$

$$W_0^\circ = W_0^- + \Phi_0 \frac{\partial B}{\partial v_*} \frac{1}{b_2}, \quad \frac{\partial^2 P_*}{\partial v_* \partial y} = 0$$

Здесь функция $B(\sigma, v_*) \rightarrow 0$ ($v_* \rightarrow -\infty$),

$$B(\sigma, v_*) \rightarrow -\Lambda v_* + \dots \quad (v_* \rightarrow +\infty)$$

и подлежит определению.

Рассмотрим область потенциального течения $\mathcal{4}$, в которой v_* , σ , $y^\circ = y \text{Re}^{1/2}/\varepsilon \sim 1$. Из (3.1) вытекает, что в ней

$$u = U_0(y=\infty) + \dots \text{Re}^{-1/2} u^* + \dots$$

$$v = V_0(y=\infty) + \dots + \text{Re}^{1/2} v^* + \dots$$

$$w^\circ = \text{Re}^{-1/2} w^* + \dots,$$

$$P = P_0 + P_{00}\varepsilon + \dots \delta P_* + \dots$$

Поэтому из уравнений Эйлера получаем, что $\delta(\varepsilon) = \text{Re}^{-1/2}$, а так как $\partial w^*/\partial v_*|_{v_*=0} = f_0 b_2^{-1} \partial^2 B / \partial v_*^2$, то

$$\frac{\partial P_*}{\partial v_*} \Big|_{v_*=0} = -\frac{f_0^2 f_1^{-1/2}}{\pi b_2} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 B}{\partial v_2} \frac{dv}{(v-v_*)} \quad (3.3)$$

$$f_1 = s_0^2 h_{20}^{-2} + t_0^2 h_{10}^{-2}, \quad f_0 = \Phi_0(y = \infty)$$

Таким образом, давление в потенциальной области существенно зависит от параметра B , определяющего величину нормальной к Γ составляющей поверхностного трения.

Из (3.2) видно, что для U_1^0 и V_1^0 не выполнены условия прилипания. Для устранения этого противоречия требуется рассмотреть область 2 с локальными координатами v_* , $y_* = y e^{-v_*} \sim 1$. По сравнению с (2.2), (2.3) и так как $\partial^2 P_*/\partial v_* \partial y = 0$, в ней

$$u = \sum_{j=0}^7 U_j^* \varepsilon^{(1+j)/4} + \dots, \quad v = \sum_{j=0}^7 V_j^* \varepsilon^{(1+j)/4} + \dots \quad (3.4)$$

$$w = W_0^* \varepsilon^{1/2} + W_1^* \varepsilon^{3/4} + \sum_{j=2}^6 W_j^* \varepsilon^{(j+2)/4} + \dots$$

$$P = P_0 + P_{00} v_* \varepsilon + P_{01} v_*^2 \varepsilon^2 + \dots + \text{Re}^{-1/2} P_* + \dots$$

Подставляя (3.4) в уравнения Навье — Стокса и применяя преобразование Фурье по v_* , можно показать, что $U_2^* \equiv V_2^* \equiv 0$

$$U_0^* = c_0 y_*, \quad V_0^* = a_0 y_*, \quad W_0^* = \frac{\partial}{\partial v_*} (B + (b_{31} - M_0) v_*) \frac{y_*^2}{2}$$

$$U_1^* = \frac{P_{x0} h_{10}^{-1} y_*^2}{2}, \quad V_1^* = \frac{P_{y0} h_{20}^{-1} y_*^2}{2}, \quad W_1^* = (b_{41} - M_1) \frac{y_*^3}{6}$$

$$\begin{pmatrix} U_3^* \\ V_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \frac{y_*^4}{4!} - \begin{pmatrix} c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \frac{B}{b_2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{v_*} \int_{-\infty}^{v_*} \int_{-\infty}^{v_*} B^* \times$$

$$\times x^{i\lambda} H_{i\lambda}^{(1)}(x) e^{-i\lambda v} d\lambda dv dv_* \begin{pmatrix} c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \frac{i\Gamma(3/4)}{2^{3/4} b_2}, \quad x = \sqrt{\frac{i\lambda b_2}{8}} y_*^2$$

$$\begin{pmatrix} U_4^* \\ V_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ a_3 \end{pmatrix} \left[-v_* y_* - \frac{3b_2}{5!} y_*^5 \right] + \begin{pmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \end{pmatrix} \frac{y_*^5}{5!} - \begin{pmatrix} P_{x0} h_{10}^{-1} \\ P_{y0} h_{20}^{-1} \end{pmatrix} \frac{B}{b_2} y_*$$

$$B^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial v_*^2} B(\sigma, v_*) e^{i\lambda v_*} dv_*, \quad i = \sqrt{-1}$$

Величина $b_{41}(\sigma)$ определяется из расчета глобального течения, а M_1 — некоторая известная функция c_0 и a_0 . Под функцией Ганкеля $H_{i\lambda}^{(1)}$ и радикалами понимаются их главные ветви. Вид остальных коэффициентов в дальнейшем не понадобится. Важным является лишь то обстоятельство, что для обеспечения гладкости разложения (3.4) в систему уравнений для U_5^* , V_5^* и W_5^* необходимо введение слагаемых, зависящих от P_* , т. е. $\varepsilon = \text{Re}^{-1/4}$. С учетом (3.3) необходимое и достаточное условие ее разрешимости имеет вид

$$\int_{-\infty}^{v_*} \left\{ (\alpha_1(\sigma) v + B) \frac{\partial B}{\partial v} - \tau_\sigma(\sigma) \frac{\partial B}{\partial \sigma} + \beta_1(\sigma) B \right\} dv +$$

$$+ P_1(\sigma)B = \frac{-\Gamma(\beta_1)}{2\sqrt{2}\Gamma(\beta_1)} \sqrt{\frac{f^1}{b_2}} f_0^2 \int_{v_*}^{+\infty} \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \frac{dv}{(v-v_*)^{1/2}} \quad (3.5)$$

$$P_1 = t_0 h_1' h_{10}^{-2} c_0 - s_0 h_2' h_{20}^{-2} a_0$$

$$\tau_\sigma = n_y^\circ h_{10}^{-1} c_0 - n_x^\circ h_{20}^{-1} a_0,$$

$$\alpha_1 = b_{31}^- - 2P_1$$

где β_1 — известная функция величин b_{31}^- , c_0 , a_0 , n_y° , n_x° , h_{10} , h_1' , $i=1, 2$.

Интегродифференциальное уравнение (3.5) замыкает задачу расчета течения в областях 2 и 3. Оно обобщает фундаментальные уравнения плоской [5] и автомодельной [10] теорий локального отрыва. Решая (3.5) численно и используя формулы (3.1)–(3.4), можно предсказать картину течения в отрывной зоне.

Уравнение (3.5) необходимо дополнить некоторым начальным условием по σ . Вопрос о граничных условиях для (3.5) при $v_* \rightarrow \infty$ решается так же, как в [5, 10], т. е. из анализа уравнения (3.5) с нулевой правой частью, что соответствует отсутствию взаимодействия вязкого и потенциального потоков в области, где течение описывается уравнениями пограничного слоя. В частности, из этого соотношения находим уравнение для определения величины Λ

$$-\tau_\sigma \frac{d\Lambda}{d\sigma} + (\alpha_1(\sigma) + \beta_1(\sigma))\Lambda - \Lambda^2 = 0 \quad (3.6)$$

Поэтому $\Lambda=0$, или

$$\Lambda^{-1} = \left(\Lambda_H^{-1} + \int_{\sigma_H}^{\sigma} \frac{1}{\tau_\sigma(t)} \exp \left\{ \int_{\sigma_H}^t \frac{\alpha_1(\tau) + \beta_1(\tau)}{\tau_\sigma(\tau)} d\tau \right\} dt \right) \exp \int_{\sigma_H}^{\sigma} \frac{\alpha_1(t) + \beta_1(t)}{(-\tau_\sigma(t))} dt$$

где $\Lambda_H = \text{const}$, $\sigma_H = \text{const}$.

Если на линии Γ при некотором $\sigma \rightarrow \sigma_0$ $\tau_\sigma = \dot{\tau}_\sigma(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) + \dots$, т. е. касательная составляющая поверхностного трения τ_σ обращается в нуль, то в точках $(\sigma_0, 0)$ и (σ_0, Λ_0) , где $\Lambda_0 = \alpha_1 + \beta_1|_{\sigma=\sigma_0}$, уравнение (3.6) имеет одно из четырех возможных сочетаний особенностей, показанных на фиг. 2. Таким образом, функция $\Lambda(\sigma)$ может оказаться продолжимой через точку $\sigma = \sigma_0$ единственным способом (случай седловой особой точки), бесконечным числом способов (узел), либо — непродолжимой вовсе.

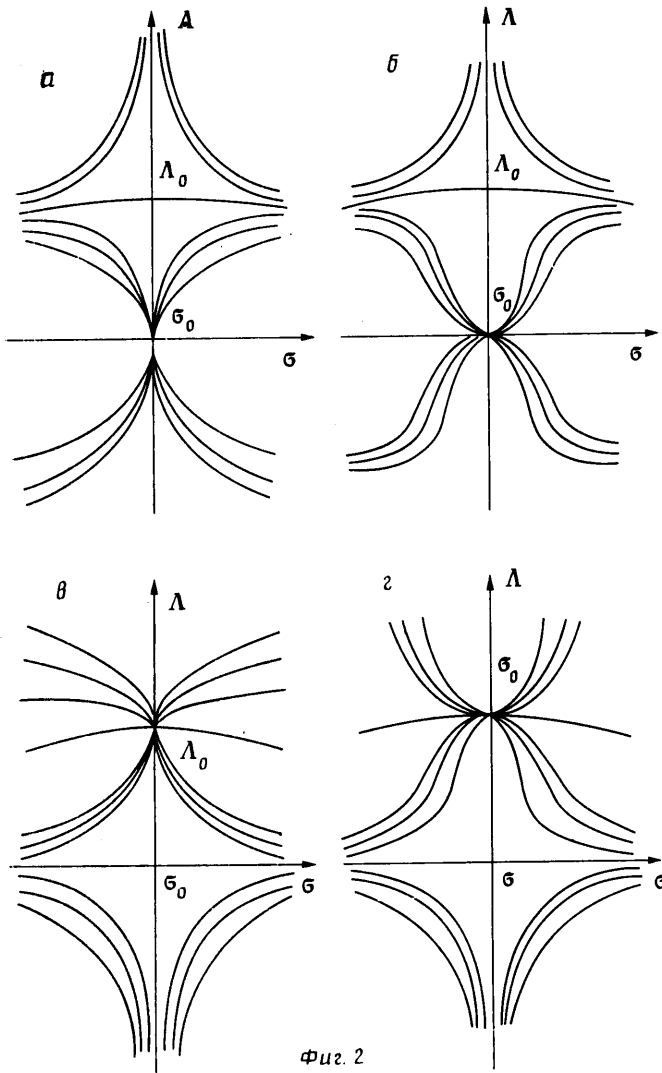
4. Предположим, что линия Γ начинается и заканчивается в точках нулевого поверхностного трения [3, 12]. Тогда в каждой из этих точек встречается бесконечное число решений уравнения (3.6). Поэтому задания величины функции Λ в особых точках не достаточно для ее однозначного отыскания вдоль линии Γ (за исключением той ситуации, когда одна из особых точек — седло).

Если из расчета пограничного слоя известно значение величины $\Lambda(\sigma)$ хотя бы в одной точке, не являющейся особой, то, используя это значение в качестве начального условия для уравнения (3.6), можно определить функцию $\Lambda(\sigma)$ вдоль всей кривой Γ , вплоть до особой точки σ (если только Λ — ограниченная функция). По известной функции $\Lambda(\sigma)$ из локального анализа фундаментального уравнения в окрестности точки σ_0 легко найти функцию $B(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$. Например, если $\Lambda(\sigma_0) = 0$, то

$$B \xrightarrow{\sigma \rightarrow \sigma_0} \Lambda(\sigma)G(v_*) + o(\Lambda(\sigma))$$

$$- \int_{-\infty}^{v_*} (vG' - G) dv = \lambda_0(\sigma_0) \int_{v_*}^{+\infty} G'' \frac{dv}{(v-v_*)^{1/2}} \quad (3.7)$$

$$G \xrightarrow{v_* \rightarrow -\infty} o(v_*), \quad G \xrightarrow{v_* \rightarrow +\infty} -v_*$$



Фиг. 2

где λ_0 — некоторая известная постоянная, т. е. при $b_{31}^-(\sigma_0) \neq 0$

$$G = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\nu_*} \left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-1} e^{-(\sqrt{2\pi/5}) \lambda_0 \lambda^{5/2}} \cdot \sin \left(\lambda \nu + \frac{\sqrt{2\pi}}{5} \lambda_0 \lambda^{5/2} \right) d\lambda + \frac{\pi}{2} \right) d\nu \quad (3.8)$$

Полученная асимптотика дает недостающее начальное условие для уравнения (3.5). Особая точка $\Lambda(\sigma_0) = \Lambda_0$ исследуется аналогично.

Если значения величины Λ не известны ни в одной из точек кривой Γ , а ее концы — узловые особые точки уравнения (3.6), то вопрос о постановке начального условия для уравнения (3.5) существенно усложняется и требует дополнительного исследования. Однако проведение такого анализа является самостоятельной задачей, которая не может быть изложена в рамках данной работы.

5. Рассмотрим теперь уравнение (3.5), предварительно отбросив стоящий в правой части интеграл взаимодействия. В таком виде оно может быть получено из систем уравнений пограничного слоя и совместно с формулами (3.1), (3.4) описывает его состояние в малой окрестности линии Γ . Соответствующая этому уравнению

характеристическая система имеет вид

$$\frac{dv_*}{ds} = \alpha_1(\sigma)v_* + P_1(\sigma) + B$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\tau_\sigma(\sigma), \quad \frac{dB}{ds} = -\beta_1(\sigma)B$$

и при необходимости может быть легко проинтегрирована. Поскольку $P_1 \rightarrow \dot{P}_1(\sigma_0)$ ($\sigma \rightarrow \sigma_0$), то точка $B = \sigma - \sigma_0 = v_* = 0$ является особой. Характеристики, расположенные в плоскости $\sigma = \sigma_0$, описываются уравнением

$$B|B + (1 + \lambda)\alpha_1 v_*|^\lambda = \text{const}, \quad \lambda = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \Big|_{\sigma = \sigma_0}$$

Поэтому при $\lambda > 0$ указанная точка для них является седловой, а при $\lambda < 0$ — узлом. С учетом того, что $\beta_1(\sigma_0) = b_{31}^- - \tau_\sigma$, для отнесенной к b_{31}^- величины нормальной составляющей поверхностного трения $A = -(b_{31}^- v_* + B)/b_{31}^-$ в особой точке $\Lambda = \Lambda_0$ (т. е. $\lambda = b_{31}^+ / b_{31}^-$) получим

$$(A + v_*)|A - \lambda v_*|^\lambda = c$$

Данное уравнение совпадает с соответствующими решениями работ [10] и [13] и, как известно, свидетельствует о возможности наличия особенности Гольдштейна. При этом уравнение (3.5) в плоскости $\sigma = \sigma_0$ принимает вид [13]

$$\frac{\lambda_0}{b_{31}^-(\sigma_0)} \int_{v_*}^{+\infty} \frac{A'' dv}{(v - v_*)^{1/2}} = \int_{-\infty}^{v_*} \{AA' - (\lambda - 1)A - v\lambda\} dv$$

$$A \xrightarrow{v_* \rightarrow -\infty} -v_* + A_- (-v_*)^{-\lambda},$$

$$A \xrightarrow{v_* \rightarrow +\infty} \lambda v_* + A_+ v_*^{-1/\lambda}, \quad \lambda > 0$$
(3.9)

Таким образом, построенное в [13] решение описывает то из двух предельных решений общей задачи, которое соответствует особой точке (σ_0, Λ_0) уравнения (3.6).

6. Итак, подобно плоской и автомодельной теориям [5, 10] в общем случае пространственного обтекания возможно существование особой предельной линии тока, в окрестности которой решение уравнений пограничного слоя в главном приближении характеризуется изломом нормальной к ней составляющей поверхностного трения. Вдоль этой кривой возникает область вязко-невязкого взаимодействия, а сама она является линией локального отрыва. Как свидетельствуют результаты исследования, выполненного в [11], зарождение особой линии такого типа может происходить, например, в точке растекания, лежащей в плоскости симметрии течения.

Проведенный анализ показывает, что по дуговой координате линии локального отрыва решение фундаментального уравнения может оказаться продолжимым единственным способом, бесконечным числом способов либо непродолжимым. Кроме того, в точках нулевого поверхностного трения возможны решения двух типов. Один из них соответствует классическому и был описан в [13, 11]. Решение другого типа получено в данной работе. Оно выражается формулой (3.8) и реализуется в окрестности точки растекания. Однако в отличие от полученного в [13] для отыскания указанного решения не требуется задания закона его затухания в натекающем пограничном слое. В данном случае для выделения единственного решения фундаментального уравнения достаточно использовать ослабленные краевые условия, приведенные в задаче (3.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tobak M., Peake D. J.* Topology of three-dimensional separated flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* V. 14. Palo Alto, Calif., 1982. P. 61–85.
2. *Maskell E. C.* The significance of flow separation in the calculation of a general fluid flow // 9th Congr. Int. Mecanique. Appl. V. 3. Brussels, 1957. P. 226–231.
3. *Lighthill M. J.* Laminar boundary layers 1963. ch 2. P. 79. Oxford: Oxford Univ. Press.
4. *Рубан А. И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 6. С. 42–52.
5. *Рубан А. И.* Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1982. № 1. С. 42–51.
6. *Brawn S. N.* Singularities associated with separating boundary layers // *Phil. Trans. Roy. Soc. London (A).* 1965. V. 25. № 1084. P. 409–444.
7. *Buckmaster J.* Perturbation technique for the study of three-dimensional separation // *Phys. Fluids.* 1972. V. 15. № 12. P. 2106–2113.
8. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1948. V. 1. P. 43–69.
9. *Заметаев В. Б.* Особое решение уравнений пограничного слоя на тонком конусе // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 2. С. 65–72.
10. *Заметаев В. Б.* Локальный отрыв на тонком конусе, предшествующий появлению вихревой пелены // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 6. С. 21–28.
11. *Заметаев В. Б.* Формирование особенностей в пространственном пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. № 2. С. 58–64.
12. *Perry A. E., Chong M. S.* A series-expansion study of the Navier – Stokes equations with applications to three-dimensional separation patterns // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 173. P. 207–223.
13. *Brawn S. N.* Marginal separation of a three-dimensional boundary layer on a line of symmetry // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 158. P. 95–111.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.V.1989