

УДК 532.5.013:534.24

© 1991 г.

А. Г. МОРОЗОВ, В. В. МУСЦЕВОЙ

ВОЗБУЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В СИСТЕМАХ С ДВОЙНЫМ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМ РАЗРЫВОМ

В приложениях встречаются задачи, в которых трехмерные возмущения в сжимаемой среде с тангенциальным разрывом «запрещены» граничными условиями. Примером может служить наблюдаемый скачок скорости вращения в тонких газовых подсистемах плоских галактик [1]. В таких системах динамика двумерных возмущений приобретает принципиально новый характер – возбуждается центробежная неустойчивость с инкрементом, пропорциональным числу Маха $M=V_0/c_s$, при сколь угодно больших его значениях [2, 3]. В этих же системах часто наблюдается близкий к разрыву скачок плотности газа от довольно разреженной внешней части диска галактики к плотному «ядерному» диску [4]. Тем самым создается система тангенциальный разрыв – «стенка», и влияние этой стенки на неустойчивость близкого к ней разрыва скорости представляет несомненный интерес.

В то же время поставленный выше вопрос еще недостаточно изучен в модели плоский тангенциальный разрыв – твердая стенка. В [5, 6] был отмечен эффект усиления звуковой волны, отражающейся от сверхзвукового тангенциального разрыва. Поэтому размещение вблизи него отражающей стенки приводит благодаря многократному отражению звуковой волны к существенному росту ее амплитуды. В [7] была показана возможность раскачки двумерных возмущений в такой системе при $M > 2\sqrt{2}$, однако не был исследован наиболее интересный в данной модели предел $kL \ll 1$ (L – расстояние от разрыва до стенки, k – волновое число). В этом случае при $M \gg 1$ инкремент неустойчивости превышает инкремент неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, а сама неустойчивость приобретает принципиально новый характер – неустойчивости акустического резонанса. Кроме того, с точки зрения упомянутых выше приложений важным оказывается и вопрос о типе стенки (твердая или из несжимаемой или сжимаемой среды) и возможности ее движения (двойной тангенциальный разрыв). Изучению всех этих проблем и посвящена настоящая работа.

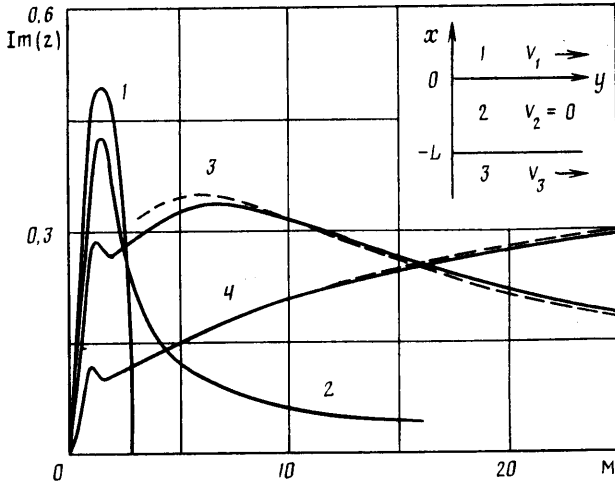
1. Дисперсионное уравнение. Рассматриваемая система состоит из двух однородных параллельных потоков, разделенных слоем покоящегося газа толщины L (фиг. 1). Динамика малых возмущений границ раздела сред описывается системой уравнений [9], получаемой из линеаризованных уравнений газодинамики для фурье-гармоник возмущенных величин $f' = f(x) \exp(iky - i\omega t)$ (учет косых возмущений $f' = f(x) \exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$ приведет к замене в получаемых результатах величины V_0 на $V_0 k_y / \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ [8])

$$\frac{dp_j}{dx} = \rho_{0j} \omega_*^2 \zeta_j; \quad \frac{d\zeta_j}{dx} = \frac{\kappa_j^2}{\rho_{0j} \omega_*^2} p_j \quad (1.1)$$

$$\kappa_j = \left(k^2 - \frac{\omega_*^2}{c_{sj}^2} \right)^{1/2}; \quad u_{xj} = \frac{d\zeta_j}{dt} = -i\omega_* \zeta_j$$

Здесь ρ_{0j} – равновесные плотности сред; $\omega_* = \omega - kV_j$; p_j и ζ_j – амплитуды возмущенных давлений и x -смещений сред; u_{xj} – возмущенная x -компонента скорости среды, $j=1, 2, 3$.

В предположении $\text{Re}(\kappa_j) > 0$ решения системы (1.1), удовлетворяю-



Фиг. 1

щие условиям убывания амплитуды возмущенных величин при $|x| \rightarrow \infty$, имеют вид

$$x > 0: \quad \zeta_1 = A e^{-\kappa_1 x}; \quad p_1 = -\rho_{01} \frac{\omega \kappa_1^2}{\kappa_1} A e^{-\kappa_1 x} \quad (1.2)$$

$$-L < x < 0: \quad \zeta_2 = B e^{\kappa_2 x} + C e^{-\kappa_2 x}; \quad p_2 = \rho_{02} \frac{\omega^2}{\kappa_2} (B e^{\kappa_2 x} - C e^{-\kappa_2 x}) \quad (1.3)$$

$$x < -L: \quad \zeta_3 = D e^{\kappa_3 x}; \quad p_3 = \rho_{03} \frac{\omega \kappa_3^2}{\kappa_3} D e^{\kappa_3 x} \quad (1.4)$$

Совокупность этих решений должна удовлетворять условиям сшивки — равенства возмущенных давлений и смещений на границах раздела сред ($x=0$ и $-L$). Выполнение этих условий приводит к дисперсионному уравнению

$$\text{th}(\kappa_2 L) = -Z_2 (Z_1 + Z_3) (Z_2^2 + Z_1 Z_3)^{-1} \quad (1.5)$$

$$Z_1 = r \frac{\omega \kappa_1^2}{\kappa_1}; \quad Z_2 = \frac{\omega^2}{\kappa_2}; \quad Z_3 = R \frac{\omega \kappa_3^2}{\kappa_3}; \quad r = \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}; \quad R = \frac{\rho_{03}}{\rho_{02}}$$

2. Акустический резонанс в системе тангенциальный разрыв — твердая стенка. В случае, когда область $x < -L$ занята твердой стенкой, дисперсионное уравнение может быть получено из (1.5) предельным переходом $R \rightarrow \infty$. При этом учитывается, что условие равенства равновесных давлений диктует связь $(c_{s2}/c_{s1})^2 = \rho_{01}/\rho_{02} = r$.

В пределе одиночного ($kL \rightarrow \infty$) тангенциального разрыва в несжимаемой ($M = V_0/c_{s2} \ll 1$) однородной ($r=1$) среде уравнение (1.5) приводит к классическому результату — неустойчивости Кельвина — Гельмгольца $\omega = kV_0(1+i)/2$ [10, 11]. Приближение стенки к разрыву в несжимаемой среде стабилизирует эту неустойчивость. В пределе $kL \ll 1$ (1.5) имеет решение

$$\omega \approx \frac{kV_0}{1+kL} (kL + i\sqrt{kL}) \quad (2.1)$$

Наиболее интересен предел, в котором сжимаемость среды существенна: $M \gg 1$. В этом пределе одиночный тангенциальный разрыв ($kL \rightarrow \infty$) устойчив при $M > 2\sqrt{2}$ [12] (если $r \neq 1$, то при $M > \sqrt{2}(1+1/\sqrt{r})$). Однако наличие близкой к разрыву твердой стенки приводит даже при $M \gg 1$

(точнее, при $\sqrt{r}M \gg 1$) к раскашке неустойчивости. Действительно, в предположениях $kL \ll 1$ и $|z| \sim 1$ (здесь $z = \omega/kc_{s2}$) из (1.5) следует

$$z \simeq z^\circ = \sqrt{\frac{b(b+i)}{1+b^2}} = \sqrt{\frac{b}{1+b^2}} \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}+b}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}-b}{2}} \right\} \quad (2.2)$$

где $b = \sqrt{r}MkL$. Максимального значения инкремент этой неустойчивости достигает при $b = 1/\sqrt{3}$, при этом

$$z^\circ = (\sqrt{3}+i)/2\sqrt{2} \quad (2.3)$$

Величина $\text{Re}(z^\circ)$ — монотонно растущая функция b и $\text{Re}(z^\circ) < 1$; $\text{Re}(z^\circ) \rightarrow 1$ при $b \rightarrow \infty$. Следовательно, результат (2.2) означает резонансную раскашку звуковой ветви колебаний среды среднего слоя.

Результаты (2.2), (2.3) согласуются с начальным предположением $|z| \sim 1$ и подтверждаются точным решением уравнения (1.5) — см. фиг. 1. (Инкремент в системе тангенциальный разрыв — твердая стенка: 1 — $kL \rightarrow \infty$; 2 — $kL=1$; 3 — $kL=0,1$; 4 — $kL=0,01$. Штриховые линии 3, 4 — асимптотики (2.2)).

3. Акустический резонанс в системе тангенциальный разрыв — стенка несжимаемой жидкости. Дисперсионное уравнение модели, в которой твердая стенка в области $x < -L$ заменена несжимаемой жидкостью, получается из уравнения (1.5), если $\kappa_3 = k$. Полагая $V_3 = 0$, можно выявить эффекты, связанные только с заменой твердой стенки на несжимаемую жидкость — исключаются из рассмотрения эффекты, обусловленные возможным возбуждением волн вторым тангенциальным разрывом (при $x = -L$). Предположения $\sqrt{r}M \gg 1$; $kL \ll 1$; $|z| \sim 1$ в пределе $R \rightarrow \infty$ приводят к уже известному результату (2.2). С уменьшением параметра R при выполнении условия $\sqrt{r}R \gg 1/kL$ из (1.5) следует:

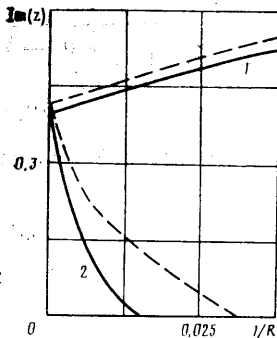
$$z \simeq z^\circ \sqrt{1 + \frac{1}{RkL}} \simeq z^\circ \left(1 + \frac{1}{2RkL} \right) \quad (3.1)$$

Таким образом, замена твердой стенки достаточно плотной несжимаемой жидкостью увеличивает интенсивность раскашки акустического резонанса. Однако применимость результата (3.1) оказывается ограниченной приведенным выше условием на величину параметра R . Точное и асимптотическое решения дисперсионного уравнения в зависимости от значения этого параметра при $M=10$, $kL=0,05$, $r=1$ приведены на фиг. 2 (кривые 1: сплошная — решение (1.5), штриховая — асимптотика (3.1)).

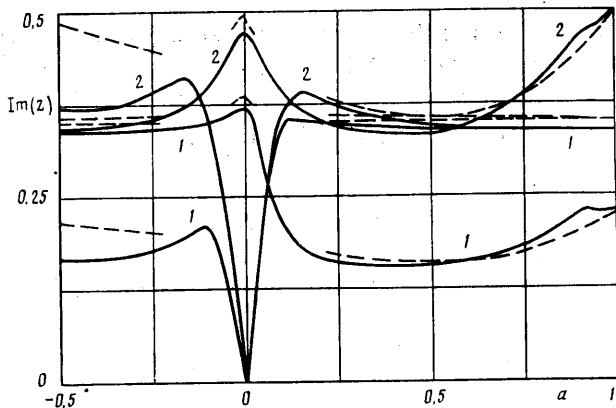
Для изучения влияния на полученные результаты относительного движения газа и несжимаемой жидкости ($V_3 \neq 0$) в пределе малой относительной скорости этих сред ($|aM| \ll 1$) в рамках уже изученной асимптотики $R \gg 1/kL$, $M \gg 1$ решение уравнения (1.5) можно представить в виде $z = z^\circ + \delta z$;

$$|\delta z| \ll |z^\circ|, \quad \delta z \simeq \frac{1}{2RkL} \left[z^\circ + 2aM + 3 \frac{(aM)^2}{z^\circ} \right] \quad (3.2)$$

Учет движения стенки несжимаемой жидкости в первом порядке по малому параметру $|aM| \ll 1$ изменяет лишь вещественную часть безразмерной частоты z (по сравнению с результатом (3.1)). Инкремент же неустойчивости изменяется только во втором порядке по параметру $|aM| \ll 1$. И, поскольку $\text{Im}(z^\circ) > 0$, это изменение, согласно (3.2), демонстрирует некоторую стабилизацию неустойчивости при наличии относительного движения стенки и слоя газа (см. фиг. 3 — инкременты по (1.5))



Фиг. 2



Фиг. 3

при $M=10$; $kL=0,05$, штриховые — асимптотики в моделях: 1 — $R=100$, 2 — $R=20$).

В противоположном пределе ($|aM| \gg 1$) асимптотика акустического резонанса ($M \gg 1$, $kL \ll 1$) не зависит от направления движения среды в области $x < -L$. Действительно, из уравнения (1.5) в этом случае можно получить

$$z \approx z^0 \left(1 + \frac{g}{2b} z^0{}^2 \right); \quad g = \frac{\sqrt{r}}{Ra^2 M} \quad (3.3)$$

В пределе $g \ll b$ относительное движение сред с границей раздела $x = -L$ также приводит к дестабилизации по сравнению с моделью с твердой стенкой в области $x < -L$ ($\text{Im}(z) > \text{Im}(z^0)$). Однако величина этого дестабилизирующего эффекта убывает с ростом скорости движения несжимаемой среды (см. фиг. 3).

Приведенные выше результаты не исчерпывают полной картины неустойчивых колебаний в системе тангенциальный разрыв — движущаяся стенка несжимаемой жидкости. Действительно, в покоящейся несжимаемой неоднородной среде могут распространяться внутренние гравитационные волны, частота которых пропорциональна квадратному корню из произведения градиентов давления и плотности среды [8]. В пределе однородной покоящейся жидкости частота этих волн стремится к нулю (усиление внутренних волн при их отражении от сдвигового слоя в рамках линейной теории исследовалось для несжимаемого непрерывно стратифицированного потока Буссинеска с гельмгольцевским профилем скорости в [13]).

Равенство частоты нулю означает стационарность возмущений параметров жидкости относительно самой жидкости, что приводит к отличию от нуля осредненного обмена энергией между колебаниями и основным течением [8]. В рамках рассматриваемой модели при $V_3 \neq 0$ такие возмущения в несжимаемой жидкости представляют собой поверхностную моду разрыва (составляющая волнового вектора по поперечной к разрыву координате отсутствует, а вместе с ней — и поток энергии в область $x \rightarrow -\infty$). Однако энергия может высвобождаться или поглощаться при резонансе между указанной поверхностной модой разрыва и акустическими колебаниями в среднем газовом слое. Из-за эффекта Доплера такие возмущения должны обладать фазовой скоростью $\omega/k \approx aV_0$, и естественно поставить вопрос об устойчивости возмущений подобного типа.

В случае малых скоростей $|aM| \ll 1$ в рамках стандартной асимптотики акустического резонанса ($M \gg 1$; $kL \ll 1$) и приближения плотной

стенки ($R \gg 1$) из уравнения (1.5) для $|z| \sim |aM|$ следует:

$$z \approx \frac{aM}{1+RkL} (RkL + i \operatorname{sign}(a) \sqrt{RkL}) \quad (3.4)$$

Тем самым в рассматриваемом ($|aM| \ll 1$) пределе неустойчивость волн, существующих только при $a \neq 0$, представляет собой классическую неустойчивость Кельвина — Гельмгольца (ср. с (2.1)).

Интересна и асимптотика больших скоростей $|aM| \gg 1$. В том же предположении $|z| \sim |aM|$ из дисперсионного уравнения (1.5) можно получить

$$z \approx aM \left\{ 1 + i \operatorname{sign}(a) \sqrt{\frac{kL - i \sqrt{r}(1-a)/a^2 M}{R[1+b(1-a)]}} \right\} \quad (3.5)$$

Этот результат и означает возбуждение резонанса с поверхностной модой колебаний в несжимаемой жидкости.

Инкременты точных решений дисперсионного уравнения (1.5) вместе с инкрементами асимптотик (3.2), (3.3), (3.5) приведены на фиг. 3.

4. Акустический резонанс в системе тангенциальный разрыв — стенка сжимаемого газа. Рассмотрим сначала случай неподвижного газа в области $x < -L$ ($a=0$). В рамках асимптотики акустического резонанса ($M \gg 1$; $kL \ll 1$) при достаточно большом скачке плотности на границе $x = -L$ ($R \gg rM^2$) решение уравнения (1.5) может быть представлено

$$z = z^0 + \delta z; \quad \delta z = \frac{M \sqrt{r}(1-ib)}{2\sqrt{R}(1+ib)}; \quad |\delta z| \ll 1 \quad (4.1)$$

Здесь учтено, что из равенства равновесных давлений следует: $(c_{s2}/c_{s1})^2 = \rho_{03}/\rho_{02} = R$. Замена твердой стенки даже весьма плотной (и, следовательно, холодной) стенкой газа уменьшает интенсивность раскочки акустического резонанса.

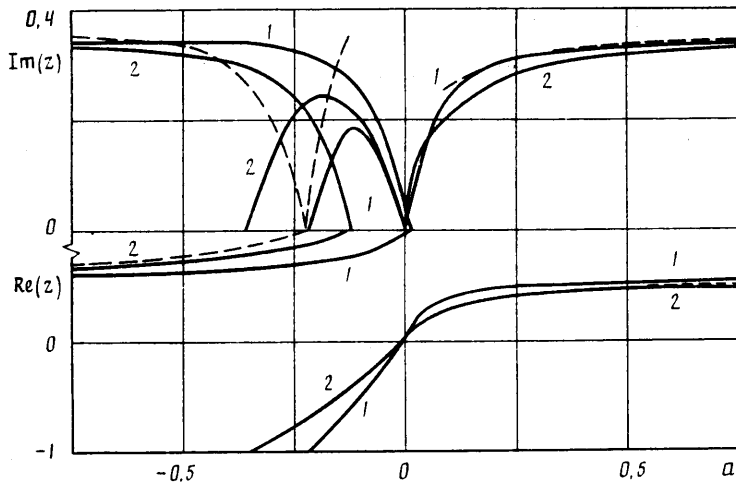
Нетрудно обобщить этот результат и на модель со слабым относительным движением сред в областях $x \geq -L$, в пределе $|aM| \ll 1$. Из (1.5) в рамках асимптотики акустического резонанса в этом случае

$$\delta z \approx \frac{M \sqrt{r}(1-ib)}{2\sqrt{R}(1+ib)} \left(1 + \frac{aM}{z^0} \right) \quad (4.2)$$

В случае совпадения направлений разделенных потоков ($\operatorname{sign}(V_1, V_3) = 1$), раскочка акустического резонанса имеет дополнительную тенденцию к стабилизации, а при несовпадении направлений потоков ($\operatorname{sign}(V_1, V_3) = -1$), его возбуждение усиливается по сравнению с неподвижной стенкой газа.

В другом пределе, $|aM| \gg 1$, асимптотика акустического резонанса с газовой стенкой качественно отличается от случая стенки из несжимаемой жидкости (3.3). Действительно, для газовой стенки в этом пределе $\kappa_3/k = \sqrt{1-R}(z-aM)^2 \approx -i\sqrt{R}(z-aM) \approx i\sqrt{R}aM$, а для стенки из несжимаемой жидкости $\kappa_3 = k$. Это отличие приводит к тому, что интенсивность раскочки акустического резонанса зависит от знака скорости стенки $V_3 = aV_0$

$$z = \sqrt{\frac{b}{b^2 + (1+d)^2}} \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + (1+d)^2} + b}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + (1+d)^2} - b}{2}} \right\}; \quad d = \frac{\sqrt{r}}{a\sqrt{R}} \quad (4.3)$$



Фиг. 4

В рассматриваемой модели, как и в модели со стенкой из несжимаемой жидкости, из дисперсионного уравнения в пределе $|aM| \ll 1$ можно получить выражение (3.4). Совпадение результатов для стенок из сжимаемой и несжимаемой сред в этом пределе естественно, поскольку движущийся со скоростью, существенно меньшей скорости звука, газ ведет себя подобно несжимаемой среде [8], и возмущения в нем представляют собой поверхностную моду разрыва.

Однако в противоположном пределе $|aM| \gg 1$ картина неустойчивостей в модели с газовой стенкой будет существенно отличаться от подобной картины в модели со стенкой из несжимаемой среды. Поскольку $c_{s1} < c_{s2}$ при $R > 1$, в модели с газовой стенкой не должно возбуждаться неустойчивости с $|\text{Re}(z)| > 1$, аналогичной описываемой формулой (3.5). Этот результат, непосредственно вытекающий из дисперсионного уравнения (1.5), виден на фиг. 4, где при $M=10$, $kL=0,05$, $r=1$ изображены инкременты неустойчивостей и фазовые скорости волн в единицах c_{s2} в моделях: 1 — $R=100$, 2 — $R=20$.

Авторы признательны Ю. В. Мусцевой за помощь в вычислениях и обсуждение результатов, а также А. М. Безбородову, А. В. Володину, В. В. Леви и Ю. М. Торгашину за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rubin V. C., Ford W. K. Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions // *Astrophys. J.* 1970. V. 159. № 2. Pt 1. P. 379–403.
2. Морозов А. Г. Раскачка спиральных возмущений в дисках плоских галактик неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца // *Письма в «Астрон. журн.»* 1977. Т. 3. № 5. С. 195–198.
3. Морозов А. Г., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Фридман А. М. Моделирование процесса генерации спиральной структуры галактик на установке с вращающейся жидкостью // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39. Вып. 11. С. 504–507.
4. Sanders D. B., Solomon P. M., Scoville N. Z. Giant molecular clouds in the Galaxy. 1. The axisymmetric distribution of H_2 // *Astrophys. J.* 1984. V. 278. № 1. Pt 1. P. 182–203.
5. Miles J. W. On the reflection of sound at an interface of relative motion // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. V. 29. № 2. P. 225–228.
6. Ribner H. S. Reflection, transmission and amplification of sound by a moving medium // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1958. V. 29. № 4. P. 435–441.
7. Кольхалов П. И. Неустойчивость тангенциального разрыва в газе, движущемся вблизи твердой стенки: Препринт № 824. М.: ИКИ АН СССР, 1983. 15 с.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
9. Морозов А. Г., Файнштейн В. Г., Фридман А. М. Об аналогии между процессами образования спиральных рукавов галактик и волн плотности во вращающейся лабораторной плазме // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 4. С. 1249–1262.
10. Helmholtz H. von. On discontinuous movements of fluids // Phil. Mag. 1868. V. 36. № 244. P. 337–348.
11. Kelvin L. Hydrokinetic solutions and observations // Phil. Mag. 1871. V. 42. № 281. P. 362–377.
12. Ландау Л. Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44. № 4. С. 151–153.
13. Lindzen R. S. Stability of a Helmholtz velocity profile in a continuously stratified infinite Boussinesq fluid-applications to clear air turbulence // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. № 6: P. 1507–1514.

Волгоград

Поступила в редакцию
3.X.1990