

УДК 532.516

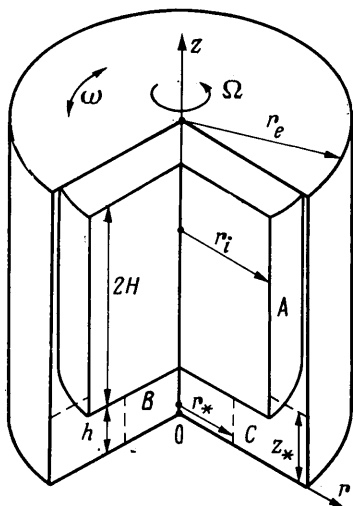
© 1991 г.

Л. Р. ЛОКШИН, Е. М. СМЕРНОВ

ВЛИЯНИЕ ОБЩЕГО ВРАЩЕНИЯ НА ПЕРЕДАЧУ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧЕРЕЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СЛОИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Изучается движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между цилиндром конечной длины и окружающим его кожухом. Движение вызвано малыми крутильными колебаниями кожуха, тогда как вся система равномерно вращается вокруг общей оси симметрии. Уравнение линеаризуется в предположении малости числа Россби. Последовательно рассматриваются три задачи: одномерная задача о колебательном движении в цилиндрическом зазоре, автомодельная задача для течения в торцевых междисковых зазорах и двумерная задача, описывающая течение в угловой области. Установлено, что наложение общего вращения сильно ухудшает демпфирующие свойства слоев жидкости, находящихся между кожухом и торцами цилиндра. Выяснена роль краевых эффектов.

1. Рассмотрим осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в зазоре между ограниченным круговым цилиндром и кожухом (фиг. 1). Будем полагать, что цилиндр и кожух равномерно вращаются вокруг оси симметрии с частотой Ω и, кроме того, кожух совершает крутильные колебания малой амплитуды относительно той же оси с частотой ω . Ограничимся при этом случаем, когда все торцевые стенки ортогональны к оси вращения.



Фиг. 1

Введем цилиндрическую систему координат r', ϵ', z' с началом на торцевой стенке кожуха. Обозначим через $2H$ длину внутреннего цилиндра, а через r_i, r_e — радиусы соответственно внутреннего и внешнего цилиндров. Будем считать, что разность $r_e - r_i$ и расстояние h между торцевыми стенками — величины одного порядка.

Примем Ω^{-1} за характерное время, расстояние h — за характерную длину. Обозначим через θ угловую амплитуду колебаний кожуха и в качестве характерной скорости движения в зазоре примем произведение $\omega \theta r_e$. Положим, что $\theta r_e \ll h$, $\sigma \equiv \omega / \Omega = O(1)$. Тогда число Россби $Ro \equiv \omega \theta r_e / \Omega h \ll 1$ и можно пренебречь конвективной частью ускорения в уравнении движения, записанном во вращающейся си-

стеме координат. Таким образом, задача линеаризуется, и в безразмерном виде описывается системой уравнений [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{2\Omega \times \mathbf{v}}{\Omega} = -\nabla p_* + Ek \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь p_* — модифицированное давление, включающее в себя потенциал центробежных сил и потенциал внешних объемных сил; $Ek = \nu/\Omega h^2$ — число Экмана. На всех ограничивающих стенках ставятся условия непроницаемости и прилипания.

Введем компоненты скорости u, v, w , соответствующие координатам r, ϵ, z . Свяжем u, w с функцией тока Φ

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

а также с окружной компонентой вихря скорости $R = \partial u/\partial z - \partial w/\partial r$. Решение краевой задачи будем искать в виде

$$v = \frac{r h v_0}{r_e}, \quad R = \frac{r h R_0}{r_e}, \quad \Phi = \frac{r^2 h^2 \Phi_0}{r_e^2} \quad (1.2)$$

представив новые переменные v_0, R_0, Φ_0 выражениями

$$\begin{aligned} v_0 &= v_1(r, z) \exp(i\sigma t) + v_1^*(r, z) \exp(-i\sigma t) \\ R_0 &= R_1(r, z) \exp(i\sigma t) + R_1^*(r, z) \exp(-i\sigma t) \\ \Phi_0 &= \Phi_1(r, z) \exp(i\sigma t) + \Phi_1^*(r, z) \exp(-i\sigma t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где v_1, R_1, Φ_1 — комплексные, а v_1^*, R_1^*, Φ_1^* — их комплексно-сопряженные величины. Запись (1.3) означает, что рассматривается случай установившегося колебательного движения; выделение r (или r^2) как множителя в формулах (1.2) ослабляет зависимость v_1, R_1, Φ_1 от радиальной координаты.

Ряд очевидных подстановок в систему (1.1) и исключение из нее p_* путем перекрестного дифференцирования уравнений для u и w приводит к следующей системе уравнений для величин $v_1(r, z), R_1(r, z), \Phi_1(r, z)$:

$$\begin{aligned} i\sigma v_1 + 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= Ek \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \\ i\sigma R_1 - 2 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= Ek \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2} \right) \\ R_1 &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поставленная задача симметрична относительно плоскости $z=1+H/h$ (фиг. 1). Для детального анализа целесообразно выделить три области течения. Будем считать, что область A охватывает большую часть цилиндрического зазора, область B является центральной частью торцевого зазора, а область C — угловая, в которой $r \geq r_*$, $z \leq z_*$; значения r_* и z_* будут определены ниже.

2. Рассматривая движение в области A , ограничимся случаем $H \gg r_e - r_i$. Пренебрегая влиянием концевых эффектов, можем положить $\Phi_1 = 0, R_1 = 0, \partial v_1/\partial z = 0$. Тогда система (1.3) сведется к уравнению для нахождения зависимости $v_1(r)$

$$i\gamma v_1 = v_1'' + 3v_1'/r \quad (2.1)$$

где штрих обозначает дифференцирование по r ; $\gamma = \omega h^2/\nu = \sigma/Ek$ — безразмерный параметр.

Граничные условия к (2.1) запишем в виде

$$v_1 = 0, \quad r = r_i; \quad v_1 = 1/2, \quad r = r_e \quad (2.2)$$

Решение задачи (2.1), (2.2) не зависит от величины Ω . Следовательно, наложение общего вращения не изменяет характеристик колебательного движения в протяженных цилиндрических слоях. Предполагая далее, что $r_i, r_e \gg r_e - r_i$, опуская для этого случая второй член в правой части уравнения (2.1) и вводя величины $x = r_e - r$, $d = r_e - r_i$, получим задачу

$$i\gamma v_1 = \frac{d^2 v_1}{dx^2} \quad (2.3)$$

$$v_1 = 1/2, \quad x = 0; \quad v_1 = 0, \quad x = d$$

описывающую поле скорости вязкой жидкости между двумя параллельными твердыми поверхностями, одна из которых совершает колебательное движение в своей плоскости. Решение этой задачи приводится, например, в [2] и имеет вид

$$v_1 = \frac{\sin[k(d-x)]}{2 \sin(kd)}, \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad (2.4)$$

Введем коэффициент K_1 передачи крутильных колебаний через тонкие цилиндрические слои и определим его как отношение амплитуды $\partial v / \partial r$, взятой при $r = r_i$, к соответствующей величине, вычисленной при $r = r_e$. Согласно (2.4)

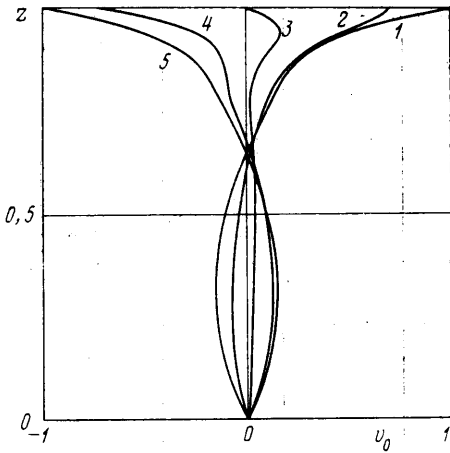
$$K_1 = \frac{1}{|\cos(kd)|} = (\operatorname{ch}^2 a + \sin^2 a)^{-1/2}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma d^2}{2}} \quad (2.5)$$

3. Анализ течения в области B естественно провести в предположении $r_i, r_e \rightarrow \infty$, т. е. рассмотреть задачу об относительном движении жидкости, находящейся между двумя безграничными дисками. В этом случае уравнения (1.4) допускают решение, не зависящее от r , а соответствующая система уравнений и граничные условия принимают вид (точка над символом означает дифференцирование по z)

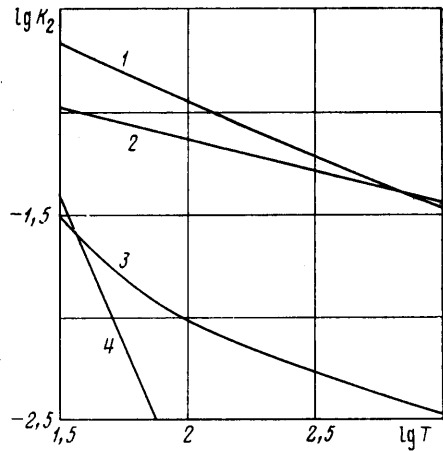
$$\begin{aligned} i\sigma v_1 + 2\dot{\Phi}_1 &= \operatorname{Ek} \ddot{v}_1, \quad i\sigma R_1 - 2\dot{v}_1 = \operatorname{Ek} \dot{R}_1, \\ R_1 &= \dot{\Phi}_1 \\ v_1 &= 1/2, \quad \Phi_1 = \dot{\Phi}_1 = 0, \quad z = 0 \\ v_1 &= 0, \quad \Phi_1 = \dot{\Phi}_1 = 0, \quad z = 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полученная задача существенно сложнее рассмотренной в предыдущем пункте, так как здесь сохраняется взаимодействие окружного и радиального движений посредством силы Кориолиса. Для случая $\operatorname{Ek} \ll 1$ в [3] аналитически рассмотрено развитие колебательных движений во времени; в частности, решена и задача (3.1). Отметим также, что при $\Omega \rightarrow 0$ (тогда $\sigma^{-1} \rightarrow 0$ и $T \equiv \operatorname{Ek}^{-1} \rightarrow 0$) задача (3.1) сводится к (2.3), в которой следует положить $x = z$; $d = 1$.

В силу линейности задачи (3.1) ее аналитическое решение может быть получено при произвольных значениях числа Экмана, однако из-за высокого (6-го) порядка системы (3.1) запись явного выражения требует очень громоздких преобразований. Поэтому в настоящей работе было отдано предпочтение конечно-разностному методу нахождения интересных решений. Производные искомых функций аппроксимировались со вторым порядком точности на равномерной сетке, содержащей 80 шагов. Полученная система алгебраических уравнений решалась методом матричной прогонки. Граничные значения определялись согласно усло-



Фиг. 2



Фиг. 3

вию Тома; при этом возникла необходимость организации итерационного процесса.

Расчеты проведены для значений T от 30 до 1200 и $\sigma=1; 2; 3$. При $\sigma=1$ и 3 в течении с ростом T выделяется ядро с однородным по z профилем v_1 и два вязких слоя вблизи дисков. Колебания окружной компоненты скорости в ядре отстают по фазе от колебаний возмущающего диска. В зависимости от T это отставание составляет от четверти до половины периода колебаний; большим значениям T соответствует меньшее отставание, а также меньшая амплитуда колебаний в ядре. При $\sigma=2$ имеет место резонанс [3]. Движение жидкости в большей части зазора в этом случае слабо зависит от T . В качестве примера на фиг. 2 приведены зависимости $v_0(z)$, рассчитанные для случая $\sigma=2; T=126$ при $ot=0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi$ (кривые 1–5).

Введем коэффициент K_2 , который определяется аналогично K_1 и характеризует передачу крутильных колебаний через междисковые слои. Зависимости $K_2(T)$ для $\sigma=1; 2; 3$, полученные при решении задачи (3.1), приведены на фиг. 3 (кривые 1–3). Кривая 4 соответствует формуле (2.5) для $\sigma=1$. Сопоставление кривых показывает, что наложение общего вращения сильно ухудшает демпфирующие свойства слоя вязкой жидкости, расположенного между дисками.

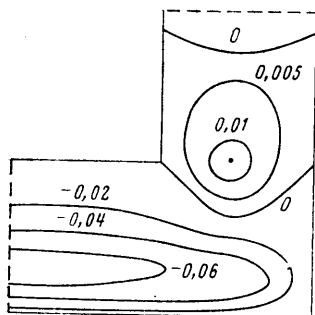
4. Для анализа течения в угловой области C была проинтегрирована система (1.4). На твердых границах ставились условия

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 1/2, \quad \Phi_1 = \partial\Phi_1/\partial z = 0, \quad z=0, \quad r_* \leq r \leq r_e \\
 v_1 &= 0, \quad \Phi_1 = \partial\Phi_1/\partial z = 0, \quad z=1, \quad r_* \leq r \leq r_i \\
 v_1 &= 1/2, \quad \Phi_1 = \partial\Phi_1/\partial r = 0, \quad r=r_e, \quad 0 \leq z \leq z_* \\
 v_1 &= 0, \quad \Phi_1 = \partial\Phi_1/\partial r = 0, \quad r=r_i, \quad 1 \leq z \leq z_*
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

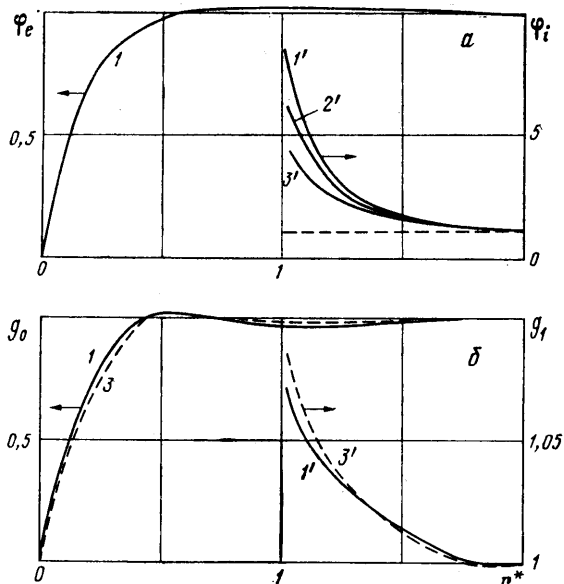
Для границ, проходящих внутри жидкости, принималось

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial R_1}{\partial z} &= 0, \quad z=z_*. \\
 \frac{\partial v_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial R_1}{\partial r} &= 0, \quad r=r_*.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Последние условия соответствуют сделанным выше допущениям о том,



Фиг. 4



Фиг. 5

что в области A решение не должно зависеть от z , а в области B — от r .

Уравнения (1.4) аппроксимировались со вторым порядком точности на равномерной сетке с пятиточечным шаблоном. Для нахождения решений использовался метод установления и схема переменных направлений; при расчетах по каждому из направлений применялась матричная прогонка. Условия для значений R_1 на твердых границах ставились по методу Тома. Во всех расчетах использовалась сетка с 1241 узлом.

Численные решения получены для $\sigma=1$ и 2 при изменении T от 31,5 до 125. Безразмерный геометрический параметр $b=r_i/h$ изменялся от 1,5 до 100. Специальные расчеты показали, что для всех вариантов значений параметров можно было принять $r_*/h=b-1$, $z_*/h=3$. При этом на границе $z=z_*$ профиль $v_1(r)$ практически совпадал с задаваемым формулой (2.4), а на границе $r=r_*$ значения $v_1(z)$ отличались от полученных в автомодельной задаче (пункт 3) не более чем на 1,3%.

На фиг. 4 изображены линии равных значений функции Φ_0 , полученные при нулевой фазе для $\sigma=2$, $T=31,5$; $b=100$. Видно, что при приближении к границе $r=r_*$ линии спрямляются, т. е. значение Φ_0 перестает зависеть от r . Отметим, что линии равных значений Φ_0 не являются, вообще говоря, линиями тока: для построения последних необходимо домножить Φ_0 на r^2 . Однако для больших b обе картины будут практически совпадать. По мере продвижения в цилиндрический зазор интенсивность меридиональной циркуляции ослабевает и при $z > z_*$ практически исчезает. Проведенное сопоставление данной картины течения с аналогичными, полученными для разных значений b , показало, что при $b > 1,5$ зависимость от этого параметра слабая.

Введем величины $\varphi_e(z)$, $\varphi_i(z)$, $g_0(r)$, $g_1(r)$, каждая из которых является отношением амплитуды производной окружной скорости по нормали к стенке к соответствующей величине, полученной в одномерной (автомодельной) задаче. Пусть φ_e обозначает отношение, вычисленное для цилиндрической стенки $r=r_e$, φ_i — для $r=r_i$; g_0 — для торцевой стенки $z=0$, g_1 — для $z=1$. Зависимости $\varphi_e(z)$, $\varphi_i(z)$, изображенные на фиг. 5, а, и зависимости $g_0(r)$, $g_1(r)$, показанные на фиг. 5, б, где $r^*=(r_e-r)/(r_e-r_i)$, полученные для $T=31,5$; $\sigma=2$ при различных значениях b : кривые 1, 1' — при $b=$

$=100$; кривые $3, 3'$ — при $b=1,5$ и кривая $2'$ — при $b=3$. Видно, что в целом значение параметра b слабо влияет на поведение функций $\varphi_e(z)$, $\varphi_i(z)$ и $g_0(r), g_1(r)$.

Пользуясь фиг. 5 и аналогичными, полученными для других комбинаций σ, T , можно оценить вклад угловой области в коэффициент передачи крутильных колебаний. Важный вывод заключается в том, что при $b=O(10)$ и больших этот вклад невелик. Таким образом, в практических расчетах для учета общего вращения можно использовать результаты, представленные в пункте 3 для автономной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 304 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 121–128.
3. Jacobs C. Transient motions produced by disks oscillating torsionally about a state of rigid rotation // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1971. V. 24. № 2. P. 221–236.

Ленинград

Поступила в редакцию
1.III.1990