

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕАЛИЗАЦИИ МОМЕНТНОГО МЕТОДА

Проанализированы трудности, возникающие при решении системы моментных уравнений с использованием двухсторонних распределений. Особенности этих распределений не позволяют реализовать моментный метод (в случае интеграла столкновений в форме Больцмана) в конкретных граничных задачах переноса. В работе предложен метод, позволяющий получить аналитические решения системы моментных уравнений для линеаризованных задач переноса. Точность метода проанализирована на примере одной классической задачи переноса.

Основным уравнением описания газокINETических процессов переноса является уравнение Больцмана. Аналитические решения этого уравнения получены только в линеаризованных плоских задачах с использованием модельной формы оператора столкновений [1]. Невозможность получения решений этого уравнения, а также то обстоятельство, что в большинстве практических ситуаций используется не сама функция распределения, а лишь несколько первых моментов, обусловили широкое использование моментных методов.

Любая система моментных уравнений незамкнута. Общей особенностью всех моментных методов является способ замыкания системы моментных уравнений, который заключается в специальном выборе функций распределения, содержащих неизвестные величины, зависящие от координат и времени. Как и в любом интегральном методе, предполагается, что используемые функции распределения не являются решениями уравнения Больцмана.

Функции распределения, используемые в граничных задачах переноса, должны обладать рядом характерных особенностей. Эти функции вблизи граничной поверхности должны иметь двухсторонний разрывный характер в пространстве скоростей. Кроме того, они должны включать характерные особенности как свободномолекулярных, так и континуальных течений.

Функция распределения, удовлетворяющая этим требованиям для максвелловских граничных условий, разрывна на поверхности так называемого «конуса влияния» в пространстве скоростей [2]. Вне и внутри конуса влияния (области 1 и 2) она дается в виде

$$f_i = n_i(\mathbf{r}, t) \left[\frac{m}{2\pi k T_i(\mathbf{r}, t)} \right]^{3/2} \exp \left[- \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t))^2}{2k T_i(\mathbf{r}, t)} \right] \quad (0.1)$$

Все моменты могут быть выражены через эти характеристические плотности n_i , средние скорости \mathbf{u}_i и температуры T_i . Выбор (0.1) позволяет замкнуть систему моментных уравнений. Увеличение точности моментных методов может быть достигнуто использованием модифицированных двухсторонних максвелловских распределений, предложенных в [3].

1. Обсудим некоторые трудности, возникающие при реализации моментного метода в конкретных задачах переноса. Анализ проведем для случая сферической геометрии.

При использовании моментного метода для сферической модели в важном случае сферической симметрии моментное уравнение переноса любого молекулярного признака $Q(\mathbf{v})$ имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int f Q d\mathbf{v} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \int r^2 Q v_r f d\mathbf{v} - \frac{1}{r} \int f \left[(v_\theta^2 + v_\varphi^2) \frac{\partial Q}{\partial v_r} + \right. \\ \left. + (v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - v_r v_\theta) \frac{\partial Q}{\partial v_\theta} - (v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta) \frac{\partial Q}{\partial v_\varphi} \right] d\mathbf{v} = \Delta Q \end{aligned} \quad (1.1)$$

где r, θ, φ — сферические координаты, ΔQ — момент от оператора столкновений.

Для сферической модели в любой точке пространства $M(\mathbf{r})$ существует свой конус влияния, который описывается в пространстве скоростей уравнением $\chi = \chi_0$, $\chi_0 = \arcsin R/r$, где R — радиус частицы, χ — угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{r} . В пространстве скоростей конус влияния делит молекулы на две группы, которые имеют различные распределения: f_2 для описания молекул, для которых $v_r > v_r^*$, $v_r^* = v \cos \chi_0$, f_1 — всех остальных молекул. В полном скоростном пространстве функция распределения может быть представлена в виде

$$f = 1/2(f_1 + f_2) + 1/2(f_2 - f_1) \operatorname{sign}(v_r - v_r^*) \quad (1.2)$$

Если разрывную функцию распределения (1.2) использовать в моментных уравнениях (1.1), то моменты от оператора столкновений ΔQ в линеаризованном случае будут выражаться через стандартные скобочные интегралы [4] следующего вида:

$$[\Phi(v) \text{sign}(v_r - v_r^*), Q(v)] = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b \, db \, d\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |v_1 - v| e^{-c^2 - \alpha^2} \times \\ \times \Phi(v) \text{sign}(c_r - c_r^*) [Q(v) + Q(v_1) - Q(v') - Q(v_1')] t c_1 \, dc \quad (1.3)$$

где $b \, db \, d\epsilon$ — дифференциальное поперечное сечение для столкновения молекул, v' и v_1' — скорости молекул после столкновения, v и v_1 — первоначальные скорости, $c = (m/2kT)^{1/2} v$, m — масса молекулы.

Главная трудность реализации моментного метода — вычисление скобочных интегралов (1.3), содержащих разрывную функцию. В настоящее время существуют аналитические методы вычисления указанных интегралов только в случае плоской геометрии, когда $v_r^* = 0$. Даже в этом случае анализ оказывается чрезвычайно трудоемким, особенно для произвольных потенциалов межмолекулярных столкновений [5].

2. Указанные трудности привели к тому, что в большинстве работ, использующих моментный метод, либо применяются различные модельные формы оператора столкновений, либо анализа основан на максвелловской модели потенциала межмолекулярных столкновений. Ни один из этих подходов не может считаться удовлетворительным.

В данной работе предложен новый приближенный подход, который позволяет существенно упростить процедуру вычисления моментов от оператора столкновений в форме Больцмана. Этот метод заключается в разложении разрывной части функции распределения $\text{sign}(c_r - c_r^*)$ в ряд по полиномам Эрмита в скоростном пространстве

$$\text{sign}(c_r - c_r^*) = \sum_{m,n,p} A_{mnp}(r) H_m(c_r) H_n(c_\theta) H_p(c_\varphi) \quad (2.1)$$

$$A_{mnp} = (2^{m+n+p} m! n! p! \pi^{3/2})^{-1} \int e^{-c^2} \text{sign}(c_r - c_r^*) \, dc$$

Использование (2.1) позволяет избавиться от вычислительных трудностей, связанных с разрывностью функции распределения, и дает возможность выразить скобочные интегралы через стандартные интегралы, табулированные для многих моделей потенциалов межмолекулярных взаимодействий.

В принципе предложенный метод позволяет вычислить эти интегралы с любой точностью. Однако необходимо провести дополнительное математическое исследование для получения оценки остатка используемых разложений. Рассматриваемый метод, основанный на использовании реальных функций распределения, существенно отличен от развитого ранее одним из авторов метода «сглаженной функции распределения» [6, 7].

Точность этого подхода проанализируем обычным в кинетической теории способом путем сравнения приближенного и точного решений классической проблемы переноса тепла между параллельными пластинами с температурной разностью $2\Delta T$.

Одномерное интегральное уравнение переноса любого молекулярного признака $Q(v)$ имеет вид

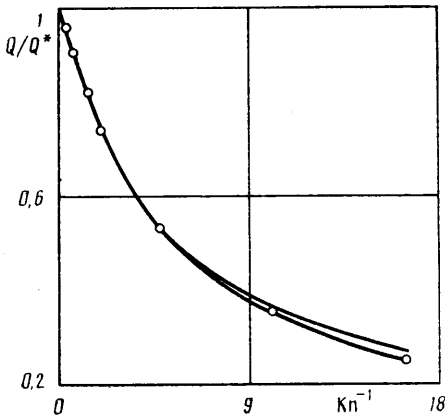
$$\frac{\partial}{\partial x} \int v_x Q(v) f \, dv = \Delta Q \quad (2.2)$$

где x — нормальная координата.

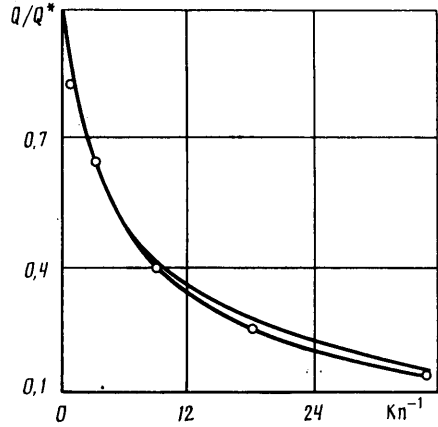
Будем использовать четырехмоментную систему в полном пространстве скоростей, выбирая $Q(v)$ равными: 1, v_x , v^2 , $v_x v^2$. Для замыкания системы используем двухстороннюю максвелловскую функцию распределения в виде

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[v^+(x) + \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^+(x) \right] + \frac{1}{2} \left[v^-(x) + \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^-(x) \right] \text{sign } c_x \right. \\ \left. \right\} \quad (2.3)$$

Температура нижней пластины ($x=l/2$) $T = T_0 - \Delta T$, верхней ($x=l/2$) $T = T_0 + \Delta T$. Предполагается, что $\Delta T \ll T_0$. Это позволяет линеаризовать задачу. На поверхности пластин использованы максвелловские граничные условия путем моделирования процесса обмена энергией с помощью коэффициента аккомодации энергии α_T .



Фиг. 1



Фиг. 2

Для плоской задачи для модели жестких упругих сфер моменты от интеграла столкновений, содержащиеся в четвертом уравнении системы, могут быть точно вычислены

$$[\text{sign } c_x, c_x c^2] = -2/3 \zeta, \quad [c^2 \text{ sign } c_x, c_x c^2] = \left(2/3 + \frac{\pi}{4} \right) \zeta$$

$$\zeta = \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \sigma^2$$

Здесь σ — диаметр молекулы

Точное решение в четырехмоментном приближении дает следующее выражение для потока тепла:

$$Q = Q^* \left(1 + \frac{\alpha_T}{2 - \alpha_T} \text{Kn}^{-1} \psi \right)^{-1}, \quad \psi = 0,2508 \quad (2.4)$$

$$Q^* = \frac{2\alpha_T p_0}{2 - \alpha_T} \left(\frac{2kT_0}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{\Delta T}{T_0}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{l}$$

где Q^* — свободномолекулярный поток тепла, p_0 — равновесное давление, λ — длина свободного пробега.

Для приближенного решения использовано следующее разложение:

$$\text{sign } c_x = \pi^{-1/2} (1/5 c_x^5 - 5/3 c_x^3 + 15/4 c_x) \quad (2.5)$$

Использование (2.5) позволяет выразить скобочные интегралы, содержащие разрывные функции, в виде суммы стандартных интегралов, вычисление которых не представляет особых трудностей для стандартных потенциалов межмолекулярных взаимодействий. Кроме того, можно использовать табулированные интегралы. Для молекул в виде жестких упругих сфер скобочные интегралы имеют следующие значения:

$$[c_x^3, c_x c^2] = \frac{4}{5} (2\pi)^{1/2} \zeta, \quad [c_x^5, c_x c^2] = \frac{30}{7} (2\pi)^{1/2} \zeta, \quad [c_x^3 c^2, c_x^2] = 6 (2\pi)^{1/2} \zeta$$

$$[c_x^5 c^2, c_x c^2] = \frac{123}{4} (2\pi)^{1/2} \zeta, \quad [c_x c^2, c_x c^2] = \frac{4}{3} (2\pi)^{1/2} \zeta$$

Для потока тепла имеем

$$Q_a = Q^* \left(1 + \frac{\alpha_T}{2 - \alpha_T} \text{Kn}^{-1} \psi_a \right)^{-1} \quad \psi_a = 0,266 \quad (2.6)$$

Сравнение точного (2.4) и приближенного решений (2.6) показывает, что наибольшее отличие имеет место при $Kn \rightarrow 0$ и составляет около 7%. При $Kn=1$ отличие не превышает 1%. В свободномолекулярном режиме решения, естественно, совпадают.

На фиг. 1 приведено сравнение результатов, полученных использованием различных теоретических моделей (кривая 1 — точное решение, кривая 2 — приближенное решение) с экспериментальными данными [8] для аргона ($\alpha_T=0,826$). На фиг. 2 приведены теоретические и экспериментальные результаты для азота ($\alpha_T=0,760$). Экспериментальные результаты изображены точками.

Проведенное сравнение указывает, что даже небольшое число членов в разложении (2.5) обеспечивает высокую точность метода. В области малых чисел Кнудсена приближенное решение даже лучше описывает экспериментальные результаты, чем точное решение. Здесь сказываются особенности континуальной функции распределения. Разрывная функция распределения, представленная разложением (2.5), лучше учитывает эти особенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнений Больцмана. М.: Мир, 1978. С. 495 с.
2. Lees L. Kinetic theory description of rarefied gas flow // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1965. V. 13. № 1. P. 278–311.
3. Krook M. Continuum equations in the dynamics of rarefied gases // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. № 4. P. 523–541.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
5. Дерягин Б. В., Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. О построении решений кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 167–172.
6. Ивченко И. Н. Об одном методе решения граничных задач переноса при произвольных числах Кнудсена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 182–185.
7. Ivchenko I. Evaporation (Condensation) theory of spherical particles with all Knudsen numbers // J. Colloid and Interface Sci 1987. V. 120. № 1. P. 1–7.
8. Teagan W. P., Springer G. S. Heat-transfer and density-distribution measurements between parallel plates in the transition regime // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 3. P. 497–506.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1990