

ФИЛЬТРАЦИЯ В ДУПЛЕТЕ

Представлены аналитические решения задачи о капиллярной пропитке и дренировании дуплета — простейшего элемента пористой среды в виде двух капилляров, имеющих общее начало и конец. Радиусы капилляров считаются постоянными, капиллярное давление на фронте вытеснения определяется законом Лапласа, течение жидкостей в капиллярах подчиняется закону Пуазейля. Из решения следует, что если вязкость вытесняющей жидкости больше вытесняемой, то фронты вытеснения в обоих капиллярах движутся поступательно. При противоположном соотношении вязкостей возможна ситуация, когда по узкому капилляру фронт вытеснения непрерывно продвигается вперед, а по широкому — сначала в направлении вытеснения, а затем в обратном направлении. Исследования проведены в предположении, что фронты вытеснения свободно «перескакивают» узлы дуплета. В реальных системах узлы могут оказывать существенное влияние на перемещение капиллярных скачков и на результаты вытеснения. Попытка предсказать количество защемленной в дуплете нефти, не поддающейся вытеснению, уже предпринималась в [1, 2]. В [3] рассматривался случай, когда фронты вытеснения достигают концов обоих капилляров одновременно.

1. Математическая модель фильтрации жидкостей в дуплете капилляров. Система состоит из двух капилляров, начало и конец которых переходит в общие капилляры 0^\mp (фиг. 1) длиной и радиусом соответственно l_0^\pm , r_0^\pm . Параметры капилляров при разветвлении: l_i , r_i ($i=1, 2$), $r_1 < r_2$. Первоначально система наполнена жидкостью вязкости μ^+ . Через начало капилляра 0^- заканчивается (впитывается) жидкость вязкости μ^- . Сжимаемостью жидкостей пренебрегаем. Пусть в момент t фронт вытеснения находится в i -м ($i=1, 2$) капилляре на расстоянии x_i от левого и l_i^+ от правого конца. Очевидно, $x_i + l_i^+ = l_i$. Капиллярный скачок давления в i -м капилляре $\Delta p_i = p_i^+ - p_i^- = 2\sigma \cos \theta / r_i$, где σ — поверхностное натяжение на границе раздела жидкостей, θ — угол смачивания. Скорость течения в каждом капилляре выражается в виде

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{D_i^- \delta p_i^-}{s_i}, \quad D_i^\mp = \left(\frac{a_i r_i^4}{l_i \mu} \right)^\mp \quad (1.1)$$

Здесь s_i — площадь сечения капилляра; a_i — коэффициент, зависящий от конфигурации его сечения; $\delta p_i^- = p^- - p_i^-$; p^- и p^+ — давления в узлах разветвления входного капилляра и их соединения при входе в общий капилляр.

Уравнения сохранения массы жидкостей и уравнения движения имеют вид

$$q_0^- = q_0^+ = q_1^- + q_2^-, \quad q_i^- = q_i^+ \quad (i=1, 2) \quad (1.2)$$

$$q_i^\mp = D_i^\mp \delta p_i^\mp \quad (i=0, 1, 2).$$

Здесь q_i^\mp — объемная скорость фильтрации, т. е. объем жидкости, проходящей в единицу времени через сечение i -го капилляра, p_0^- и p_0^+ — давления в начале входного и в конце выходного капилляров. Из уравнений (1.1), (1.2) следуют уравнения, определяющие положение фронтов в капиллярах 1 и 2

$$dx_i/dt = A(d_j + 2c_j x_j) \quad (i=1, 2; j=2, 1) \quad (1.3)$$

$$A = \frac{D_1 D_2}{s_1 s_2 D_0}, \quad D_i = \frac{D_i^- D_i^+}{D_i^- + D_i^+}, \quad b_i = \frac{D_0 \Delta p_{0j}}{a_i r_i^4}$$

$$c_i = 0,5 \Delta \mu s_i b_i, \quad d_i = s_i [b_i l_i \mu^+ + (-1)^i (\Delta p_1 - \Delta p_2)], \quad \Delta \mu = \mu^- - \mu^+$$

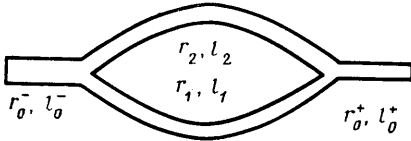
Исключая отсюда t , получим

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{d_j + 2c_j x_j}{d_i - 2c_i x_i} \quad (1.4)$$

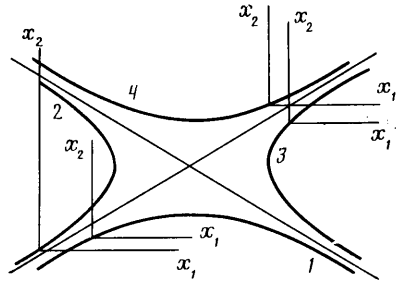
2. Исследование вытеснения жидкости в дуплете. Пусть в начальный момент фронт вытеснения находится в начале разветвления входного капилляра, т. е. $x_1 = x_2 = 0$ при $t = 0$. Из (1.3) следует, что в начальный момент скорости 1-го и 2-го фронтов пропорциональны d_2 и d_1 . Будем рассматривать только те случаи, когда $d_1 > 0$ и в начальный момент ни в одном из капилляров нет обратного течения.

Интегрируя уравнение (1.4), получаем

$$c_1 x_2^2 + d_1 x_1 = c_2 x_2^2 + d_2 x_2. \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Если $\Delta\mu=0$, то $c_i=0$ и $x_2=x_1 d_1/d_2$. В этом случае скорости фронтов 1 и 2 постоянны. Если $x_2^*=l_1 d_1/d_2 < l_2$, то, когда фронт вытеснения выходит из первого капилляра, во втором капилляре он находится на расстоянии $l_2 - x_2^*$ от выхода. Если $x_2^* > l_2$, то фронт раньше проходит второй капилляр. Если $c = d_1^2/4c_1 - d_2^2/4c_2 = 0$, то решение представляется в виде $x_1 = x_2 \sqrt{c_2/c_1}$. Поведение фронтов аналогично предыдущему случаю.

При $\Delta\mu \neq 0$ ($c_i \neq 0$) и $c \neq 0$ уравнение (2.1) представляет собой гиперболу в переменных x_1, x_2 с центром $x_{10} = -0,5 d_1/c_1, x_{20} = -0,5 d_2/c_2$, и осями $2|c_1/c|^{1/2}, 2|c_2/c|^{1/2}$ (фиг. 2). В зависимости от значений постоянных c_i, d_i гипербола содержит либо ветви 1, 4, либо ветви 2, 3 (фиг. 2). Так как интерес представляют только решения, для которых в начальный момент скорости фронтов $v_i(0) > 0$, то $dx_1/dx_2 > 0$ при $t=0$. Это значит, что решениям могут отвечать только такие ветви гиперболы, которые проходят через начало координат и вначале идут в первом квадранте плоскости x_1, x_2 . На фиг. 2 представлены четыре случая, которые могут встретиться при указанных ограничениях. Здесь изображено, как «привязаны» оси координат к возможным вариантам решения, соответствующим физическому смыслу задачи.

Рассмотрим случай $c_1 c_2 > 0$ и соответствующие решения (2.1).

Случай 1: $cc_1 < 0, c_i < 0$. Решению отвечает ветвь 1 гиперболы. Так как $c_i < 0$, то возможны два варианта.

А. $d_1 + 2c_1 l_1 \geq 0$ ($l_1 \leq x_{10}$). Тогда при выходе фронта вытеснения из первого капилляра во втором он будет находиться в точке $x_{20}^* = x_{20} - \sqrt{l_1(l_1 - 2x_{10})c_1/c_2 + x_{20}^2}$ при условии, что $l_2 > x_{20}^*$. Если же $l_2 < x_{20}^*$, то фронт раньше пройдет второй капилляр, а в первом он будет находиться в этот момент в точке $x_1^* = x_{10} - \sqrt{l_2(l_2 - 2x_{10})c_2/c_1 + x_{10}^2}$.

Б. $d_1 + 2c_1 l_1 < 0$. При $x_1^+ = x_{10}$ скорость второго фронта обращается в нуль. В это время он будет находиться в точке $x_2^+ = x_{20} - \sqrt{-c/c_2}$. Если $l_2 > x_2^+$, то фронт 2 станет двигаться назад, в то время как фронт 1 будет продолжать движение вперед. При $l_2 < x_2^+$ фронт 2 подходит к выходу, в то время как фронт 1 будет находиться в точке $x_1^* = x_{10} - \sqrt{l_2(l_2 - 2x_{20})c_2/c_1 + x_{10}^2}$.

Случай 2: $cc_1 > 0, c_i < 0$ – решению отвечает ветвь 2 гиперболы. Этот случай аналогичен предыдущему, только x_1 и x_2 меняются ролями.

Случай 3: $cc_i > 0, c_i > 0$ – ветвь 3.

Случай 4: $cc_i < 0, c_i > 0$ – ветвь 4.

В 3-м и 4-м случаях координаты фронтов вытеснения 1 и 2 монотонно увеличиваются. Критические точки со сменой знака скоростей фронтов отсутствуют. Зависимость $x_2(x_1)$ можно представить в виде

$$x_2 = x_{20} + \sqrt{x_{20}^2 + x_1(x_1 - x_{10})c_1/c_2} \quad (2.2)$$

Если $x_2^* = x_2(l_1) < l_2$, то фронт вытеснения быстрее проходит первый капилляр, если же $x_2^* > l_2$, то – второй. В случаях 3 и 4 отношения скоростей фронтов $v_2(t)/v_1(t)$ асимптотически стремятся с ростом t к пределу $\sqrt{c_1/c_2}$. Если предположить, что после выхода фронта вытеснения из i -го капилляра в i -м он останавливается, то коэффициент вытеснения нефти из дуплета после прохождения фронтом капилляра 0+ будет определяться соотношением

$$\eta = 1 - s_i(l_i - x_i^*)/v_{0i}, \quad v_{0i} = s_0^- l_0^- + s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_0^+ l_0^+ \quad (2.3)$$

Время движения фронта вытеснения в капилляре находится из уравнений (1.3) или из одного уравнения (1.3) и уравнения (2.1).

Согласно (2.1), необходимое условие одновременного прихода к выходу фронтов вытеснения по обоим капиллярам ($x_1 = x_2 = l$) имеет вид

$$l = a_i a / (1 + \mu^*) = l_*$$

$$a_r = 2r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2), \quad a = l_0^- / r_0^{-4} + l_0^+ \mu^* / r_0^{+4}, \quad \mu^* = \mu^+ / \mu^- \quad (2.4)$$

$$l_1 = l_2 = l$$

При $l > l_*$ фронт вытеснения быстрее проходит по широкому капилляру, а при $l < l_*$ — по узкому.

Если $\mu^* > 1$, то возможно обратное течение в широком капилляре. Чтобы этого не произошло, необходимо $l \leq x_{10}$ или

$$l \geq r_1^3 (r_2 - r_1) a \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует ограничение на величину μ^* при заданном отношении радиусов капилляров $r_1/r_2 = x$

$$\mu^* \leq \frac{2 + x^2(1+x)}{x^2(1-x)} = f(x) \quad (0 < x < 1) \quad (2.6)$$

Таким образом, если $l = l_*$ и $\mu^* \leq f(x)$, то фронты капиллярной пропитки одновременно приходят к выходу из раздвоенных капилляров дуплета.

Выполнения равенства $l_* = l$ можно достичь регулированием параметров, входящих в (2.4), например l_0^- , l_0^+ , μ^* . Пусть l_0^- , l_0^+ таковы, что $l_* > l$. Уменьшением l_0^- , l_0^+ можно добиться выполнения условия $l_* < l$, так как при этом уменьшается l_* .

Это значит, что при уменьшении l_0^- , l_0^+ фронт вытеснения в широком капилляре будет ускоряться относительно фронта в узком капилляре и при достаточно малых значениях l_0^- , l_0^+ фронт 2 будет раньше приходить к выходу, чем фронт 1. Следовательно, изменение параметров дуплета и вязкостей жидкостей может вызвать своего рода инверсию пропитки капилляров. Это показано экспериментально в [4]. При $\mu^* > 1$ и $l_1 > 2x_{10}$, $l_2 > 2x_{20}$, $x_{10} < x_{20} \sqrt{c_2/c_1}$ или $l_1 > x_{10}$, $l_2 > 2x_{20}$, $x_{10} > x_{20} \sqrt{c_2/c_1}$ нефть защемляется в дуплете. Условия защемления можно привести к виду

$$\mu^* > 1, \quad A < 0, \quad l_1 < 2r_1^3 a \Delta r / (1 + \mu^*), \quad l_2 < r_2^3 a \Delta r$$

$$\mu^* > 1, \quad A > 0, \quad l_1 < r_1^3 a \Delta r, \quad l_2 < 2r_2^3 a \Delta r / (1 + \mu^*)$$

$$A = (l_2 / \sqrt{r_2} - l_1 / \sqrt{r_1}) \mu^* - (r_2^{2.5} - r_1^{2.5}) a \Delta r, \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

3. Расчет капиллярной пропитки. Рассмотрим частный случай фильтрации в дуплете — капиллярную пропитку, когда $\Delta p_0 = p_0^- - p_0^+ = 0$. Пусть $r_0^- = r_0^+$, $l_0^- = l_0^+$, $l_1 = l_2$, $a_1 = a_2 = a_0^- = a_0^+ = a_0$, $r_1 < r_2$. Тогда $\Delta p_{0i} = \Delta p_i$, $b_i = D_0 \Delta p_j / a_i r_i^4$, $D_0 = a r_0^4 / l_0 (\mu^- + \mu^+)$, $d_i = s_i \Delta p_j (1 + \beta / r_i^{-4} + (-1)^i r_j / r_i)$, $r_i^* = r_i / r_0$, $\beta = l \mu^+ / l_0 (\mu^- + \mu^+)$.

Так как, по предположению, начальные скорости фронтов вытеснения в капиллярах положительны, то $d_i > 0$. Из условия $d_i > 0$ следует

$$r_2^* < r_1^* + \beta (r_1^*)^{-3} \quad (3.1)$$

Только при выполнении этого неравенства скорость в широком капилляре будет положительна в начальный момент.

Отметим, что $v_1(0) > 0$ независимо от выполнения условия (3.1).

Вид решения (2.1) и поведение фронтов вытеснения зависят от знаков c_i и c/c_i . В данном случае выражение

$$\frac{c}{c_i} = \frac{\sqrt{c_1}}{c_2} \left(x_{10}^2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} - x_{20}^2 \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \right) \frac{1}{c_i}$$

можно представить в виде

$$\frac{c}{c_i} = l_0^2 \left(\frac{\mu^+ + \mu^-}{\mu^+ - \mu^-} \right)^2 \frac{r_i^* (r_2^{*2} - r_2^*)}{r_1^* r_2^*} [\beta - \sqrt{r_1^* r_2^*} (\sqrt{r_1^*} + \sqrt{r_2^*})] \times \\ \times ((r_2^*)^{2.5} + (r_1^*)^{2.5}) [\beta + \sqrt{r_1^* r_2^*} (\sqrt{r_2^*} - \sqrt{r_1^*}) (r_2^{*2.5} - r_1^{*2.5})] \quad (3.2)$$

Так как $r_2^* > r_1^*$, то $c/c_i > 0$ при $\beta > f(r_1^*, r_2^*)$ и $c/c_i < 0$ при $\beta < f(r_1^*, r_2^*)$, где

$$f = \sqrt{r_1^* r_2^*} (\sqrt{r_1^*} + \sqrt{r_2^*}) ((r_1^*)^{2.5} + (r_2^*)^{2.5})$$

Таким образом, в зависимости от знаков $\beta - f$ и c_i осуществляется одно из четырех решений, описанных в разд. 2. Отношение скоростей в капиллярах в начальный

момент определяется выражением

$$k = \frac{v_1(0)}{v_2(0)} = \frac{r_1^*(\beta + (r_2^* - r_1^*)r_2^{*3})}{r_2^*(\beta - (r_2^* - r_1^*)r_1^{*3})} \quad (3.3)$$

При $k > 1$ имеем $\beta < r_1^*r_2^*(r_1^{*2} + r_2^{*2})$, при $k < 1$ — соответственно $\beta > r_1^*r_2^*(r_1^{*2} + r_2^{*2})$. Отсюда следует, что отношение скоростей в капиллярах в начальный момент может быть любым. При относительно малых β начальная скорость больше в узком капилляре, при больших — в широком.

Другими словами, если отношение длины l раздвоенных капилляров к длине l_0 входного (выходного) капилляра меньше некоторой критической величины l_*^* , то начальная скорость вытеснения больше в узком канале, при $l^* = l/l_0 > l_*^*$ начальная скорость фронта вытеснения больше в широком канале.

Наиболее выгодная ситуация при вытеснении создается в случае одновременного подхода фронтов вытеснения по обоим капиллярам к выходу, т. е. при $x_1 = x_2 = l$. Тогда из уравнения (2.1) следует

$$l(c_1 - c_2) = d_2 - d_1 \quad (3.4)$$

При капиллярной пропитке имеем

$$\frac{d_i}{c_i} = 2l_0 \frac{\mu^+ + \mu^-}{\mu^- - \mu^+} [\beta + (-1)^i (r_2^* - r_1^*) r_i^{*3}]$$

С учетом этого из (3.4) следует

$$l_*^* = 2r_1^*r_2^*(r_1^{*2} + r_2^{*2}) \quad (3.5)$$

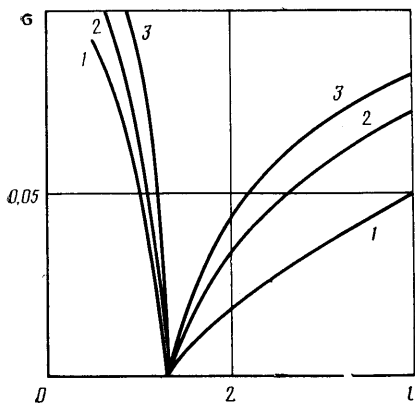
Отметим, что условие полного вытеснения начальной жидкости из выбранного дуплета зависит только от его геометрических параметров и не зависит при $\mu^- > \mu^+$ от вязкости жидкостей. При $\mu^- < \mu^+$ для выполнения условия $x_1 \approx x_2 = l$ требуются условия $x_{10} \approx l$, $x_2(x_{10}) = l$.

4. Примеры расчетов. Рассмотрим дуплет с параметрами $l = 10$ мм, $r_1 = 0,1$ мм, $r_0 = r_2 = 0,2$ мм. Значения длин концевых капилляров варьировались в пределах $2,5 \leq l_0 \leq 20$ мм. Кривые на фиг. 3 представляют собой зависимости «остаточной» насыщенности вытесняемой жидкости от l^* . Номера кривых соответствуют значениям $\mu^* = \mu^+/\mu^- = 1,15; 5; 20$. Критическое значение $l_0 = L$, согласно (3.5), равно 8 мм. В этом случае $\sigma = 0$. При $l_0 > L$ фронт пропитки быстрее проходит узкий капилляр, а при $l_0 < L$ — широкий. При $\sigma = 0$ решением (2.1) становятся прямые — асимптоты гипербола (фиг. 2). Чем больше μ^* , тем больше $\sigma(l^*)$. Исключение составляет точка $l^* = 1,25$, в которой $\sigma = 0$ во всех рассмотренных случаях и которая лежит на асимптоте (фиг. 2).

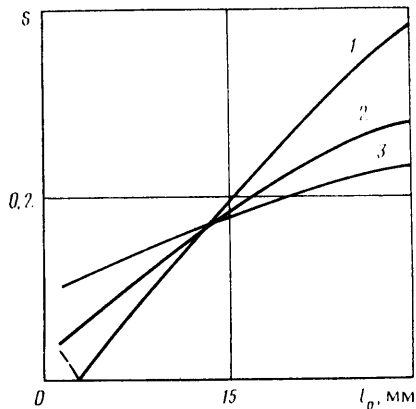
Второй расчет остаточной насыщенности был выполнен для дуплета с параметрами $l_1 = l_2 = l_0 = 10$ мм, $r_0^- = r_0^+ = r_2 = 0,2$ мм, $r_1 = 0,1$ мм. Вытесняющая жидкость — вода, $\mu^- = 1$ мПа·с. Рассматривалось вытеснение трех жидкостей; их вязкости, поперечные натяжения и углы смачивания были следующими: $\mu_1^+ = 1,15$ мПа·с, $\sigma_1 = 48$ мПа·м, $\theta_1 = 45^\circ$ (кривая 1 на фиг. 4, 5); $\mu_2^+ = 5$ мПа·с, $\sigma_2 = 41,3$ мПа·м, $\theta_2 = 43^\circ$ (кривая 2); $\mu_3^+ = 10$ мПа·с, $\sigma_3 = 38$ мПа·м, $\theta_3 = 43^\circ$ (кривая 3). На фиг. 4 и 5 введено обозначение $s = (1 - l_i^-/l) r_i^{*2} / (r_1^{*2} + r_2^{*2})$, где s — отнесенный к суммарному объему капилляров 1 и 2 объем оставшейся нефти в i -м капилляре в тот момент, когда в j -м капилляре фронт вытеснения подошел к выходу. На фиг. 4, 5 изображена зависимость остаточной насыщенности нефти в дуплете s от длины l_0^- входного капилляра дуплета соответственно при $\Delta p_0 = 0$ и 98 Па. Штрихпунктирные части кривых 1–3 соответствуют более быстрому прохождению фронта пропитки по широкому капилляру, сплошные — по узкому капилляру. При $\mu^* > 4$ фронт вытеснения быстрее идет по узкому капилляру при любых значениях l_0^- . При $\mu^* < 4$ и $l_0^- < l_0^+$ фронт вытеснения быстрее идет по широкому капилляру, а при $l_0^- > l_0^+$ — по узкому. При $\mu^* = 1,15$ имеем $L = 5,7$ мм (фиг. 4, кривая 1). Если между концами дуплета создать перепад давления, то значения L увеличиваются. При $\Delta p_0 = 98$ Па значениям μ_i^* ($i = 1-3$) соответствуют $L = 12,9; 22,8$ и > 30 мм (фиг. 5). При определенных значениях параметров дуплетов инверсию в продвижении фронта можно достичь изменением вязкости.

Из сравнения фиг. 4 и 5 следует также очевидный вывод о том, что остаточная насыщенность меняется при воздействии на капиллярную пропитку градиента давления. При этом увеличение или уменьшение зависит от всех параметров системы и наложение на капиллярную пропитку $\Delta p_0 > 0$ может быть как полезным, когда «остаточная» насыщенность в дуплете уменьшается, так и вредным, когда она возрастает (фиг. 4, 5).

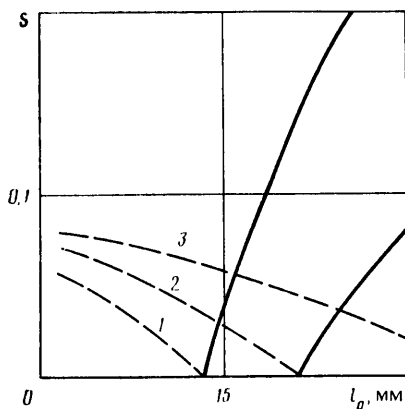
Характер влияния μ^* на «остаточную» насыщенность зависит при $\Delta p_0 = 0$ от геометрических параметров системы (фиг. 3, 4). При $l_0^- = l_0^+$, $r_0^- = r_0^+$ с увеличением μ^* увеличивается σ (фиг. 3).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Если вход и выход у дуплета разные, то при относительно малых длинах входа l_0 характер зависимости «остаточной» насыщенности от μ^* остается таким же, как и в предыдущем случае, а при больших l_0 эта зависимость обратная, т. е. s увеличивается с уменьшением μ^* (фиг. 4). При наложении градиента давления на капиллярную пропитку при малых и достаточно больших l_0 зависимость $s(\mu^*)$ имеет тот же характер, что и в предыдущем случае, а при средних значениях эта зависимость значительно более сложная (фиг. 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moorev T. F., Slobod R. L. The effect of viscosity and capillarity on the displacement of oil by water // Producers monthly. 1956. V. 20. № 10. P. 20–30.
2. Rose W., Witherspoon P. A. Trapping Oil in a Pore Doublet // Producers Monthly. 1956. V. 20. P. 32–38.
3. Chatzis I., Morrow N., Lim H. Magnitude and detailed structure of residual oil saturation // Soc. Pet. Eng. J. 1983. V. 23. № 2. P. 311–326.
4. Landlaw W. G., Wardlaw N. C. The theoretical and experimental investigation of trapping in pore doublets // The Can. J. Chem. Eng. 1983. V. 61. P. 719–727.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1988