**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1991**

УДК 532.51-1 : 537.84

К. П. ГОРШЕНИН

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ БЕСКОНЕЧНО ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В обычной газодинамике стационарное течение невязкого нетеплопроводного газа зависит от одного параметра – числа Маха $\mathrm{M}=v/\sqrt{\gamma p/\rho}$ (см., например, [1]). Стационарное течение в идеальной магнитной газодинамике зависит от двух безразмерных параметров, в качестве которых можно использовать число Маха М, число Альфвена $A=H/(v\sqrt{4\pi\rho})$ и любые их комбинации.

Рассмотрим стационарное течение невязкого нетеплопроводного совершенного газа с бесконечной электрической проводимостью в поперечном магнитном поле. При этом (см., например, [2]) вдоль траектории сохраняются обобщенный интеграл Бернулли, интеграл вмороженности и энтропия

$$\frac{v^2}{2}+c_pT+\frac{H^2}{4\pi\rho}=\mathrm{const} \tag{1}$$

$$\frac{H}{\rho r^\nu}=\mathrm{const},\quad \frac{p}{\rho^\gamma}=\mathrm{const} \tag{2}$$

Здесь $\nu=0$ в плоском и $\nu=1$ в осесимметричном случаях.

Интеграл Бернулли (1) представим в следующих видах:

$$v^2\left[1+\frac{2}{(\gamma-1)\mathrm{M}^2}+2A^2\right]=\mathrm{const},\quad \rho^{\gamma-1}\left[1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2(1+2A^2)\right]=\mathrm{const} \tag{3}$$

$$\frac{H^2}{\rho}\left[1+\frac{1}{(\gamma-1)\mathrm{M}^2A^2}+\frac{1}{2A^2}\right]=\mathrm{const} \tag{4}$$

Из уравнений (2)–(4) следуют параметрические формулы, связывающие значения величин в любых двух точках траектории

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^{1/(\gamma-1)},\quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}_2}\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^{1/2} \tag{5}$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)},\quad \frac{T_1}{T_2}=\frac{F_2}{F_1} \tag{6}$$

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{\mathrm{M}_1^2A_1^2}{\mathrm{M}_2^2A_2^2}\frac{F_2}{F_1} \tag{7}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\nu=\frac{\mathrm{M}_1A_1}{\mathrm{M}_2A_2}\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^{1/2(\gamma-2)/(\gamma-1)} \tag{8}$$

$$F_i=F(\mathrm{M}_i,A_i),\quad F(\mathrm{M},A)=1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2(1+2A^2),\quad I=Hr^\nu$$

При $A=0$ формулы (5)–(6) переходят в известные газодинамические параметрические соотношения [1].

В плоском случае ($\nu=0$) формула (8) выражает связь между параметрами М и A, т. е. они не могут быть заданы произвольно. Нужно задать зависимость от координаты z, отсчитываемой вдоль траектории, какого-либо параметра и значение другого в некоторой точке траектории. Соотношение (7) в этом случае переходит в формулу для H (или для ρ в силу интеграла вмороженности (2)). В осесимметричном случае ($\nu=1$) нужно задавать зависимость от z обоих параметров. Это следствие того обстоятельства, что уравнения (1), (2) содержат не четыре переменные, как в плоском случае, а пять (к МГД-переменным добавляется r). Заметим, что в данном случае форма траектории, на которой реализуется тот или иной режим течения (связанный с конкретным видом функций $M(z)$ и $A(z)$), оказывается однозначно определенной согласно (8).

Параметрические формулы газодинамики применяются при решении задачи об одномерном течении в канале. Аналогично в магнитной газодинамике можно рассматривать одномерное течение или более общий случай – течение в узкой трубке потока [2]; при этом к уравнениям (1), (2) добавляется уравнение

$$\rho v s = \text{const} \tag{9}$$

заменяющее точное уравнение непрерывности. Здесь ρ и v – значения на траектории, охватываемой трубкой потока, s – площадь поперечного сечения трубки. В осесимметричном течении под узкой трубкой потока понимается область течения, между коаксиальными поверхностями, образованными траекториями, так что $s=2\pi f r$ (r – средний радиус трубки, f – ее поперечный размер). Из уравнения (9), используя формулы (5), получим

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{M_2}{M_1}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)/(\gamma-1)} \tag{10}$$

Соотношения (5)–(8) вместе с (10) дают параметрическое решение задачи о течении в узкой трубке потока. Очевидно, функции $M(z)$ и $A(z)$ уже не могут быть произвольными. Они должны обеспечивать достаточно слабое изменение функций $s(z)$ для плоского течения и $f(z)$ для осесимметричного, чтобы трубка оставалась узкой на всем своем протяжении. Отметим соотношение, вытекающее из (10) и (8)

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{M_2^3 A_2^2}{M_1^3 A_1^2}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{3/2} \tag{11}$$

где $g=s/r^{2\nu}$. Сопоставляя формулы (5), (7) и (11), получим параметрическое соотношение

$$(v_1 I_1)/(v_2 I_2) = g_2/g_1 \tag{12}$$

выражающее связь между ускорением плазмы в трубке, распределением в ней электрического тока и ее геометрической характеристикой g ($g=s$ для плоского и $g=f/r$ для осесимметричного случаев).

Рассмотрим течение в сильном магнитном поле: $M \gg 1$, $A \sim 1$. Этот предельный переход можно осуществить в формулах для v, I и g

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^{1/2}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2 \Phi_2}{A_2^2 \Phi_1}, \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{A_2^2}{A_1^2}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)^{3/2} \tag{13}$$

$$\Phi_i = \Phi(A_i), \quad \Phi(A) = 1+2A^2$$

Плоское течение полностью определяется соотношениями (13). В осесимметричном случае формулы для ρ, H, r можно получить, только если задать какую-либо из этих величин. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть в некоторой точке траектории известны значения A_0, v_0, I_0, g_0. Безразмерные функции $v^\circ(z)=v/v_0$, $I^\circ(z)=I/I_0$, $g^\circ(z)=g/g_0$ выражаются, согласно формулам (13), через одну и ту же функцию $A(z)$. Поэтому вместо соотношения (12) можно получить формулы, в которых v°, I° и g° выражаются одна через другую

$$g^\circ = \frac{2A_0^2}{v^\circ[1+2A_0^2-(v^\circ)^2]}, \quad I^\circ = 1 + \frac{1-(v^\circ)^2}{2A_0^2}$$

$$g^\circ = \frac{1}{I^\circ[1+2A_0^2(1-I^\circ)]^{1/2}}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
2. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 3–87.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1990