

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1991 г.

А. Е. ИНДЕЙКИНА, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, В. М. ШЕВЦОВА

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В СЛОЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

Во многих технологических процессах используются тонкие протяженные слои неравномерно нагретой жидкости [1–3]. При достаточно малой толщине слоя определяющее влияние на возникновение и развитие движения жидкости оказывают термокапиллярные силы (см., например, [4–6]). Исследование конвективного движения в слое представляет большой интерес для оценки интенсивности теплообмена в технологических процессах.

В данной работе рассматривается нестационарное термокапиллярное движение в слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, в которой в начальный момент времени создана тепловая неоднородность. Получены приближенные формулы для полей скорости, температуры и давления в слое жидкости, а также для формы свободной поверхности.

**1. Постановка задачи.** В начальный момент времени через поверхность внутрь слоя жидкости толщиной  $H$ , расположенного на дне круглой цилиндрической кюветы радиуса  $R$ ,  $R \gg H$ , проходит импульс излучения (например, лазерный пучок). Вследствие поглощения излучения в жидкости возникает область повышенной температуры с максимумом, расположенным на поверхности, нагрев достаточно быстро убывает от центра. Распределение энергии в пучке принимается гауссовым. Образовавшаяся тепловая неоднородность вызывает термокапиллярную и термогравитационную конвекцию в слое. Предполагается, что изменения физических параметров жидкости в результате изменения температуры пренебрежимо малы, за исключением изменения плотности и коэффициента поверхностного натяжения.

Математическая формулировка задачи включает уравнения Навье – Стокса, теплопроводности и неразрывности. В данной работе учитывается изменение толщины слоя жидкости  $h' = h'(r', t')$ , следовательно

$$P' = P_0 + \rho_0 g (h'(r', t') - z') + P^* \quad (1.1)$$

Используя приближение Буссинеска, градиенты давления, входящие в уравнение Навье – Стокса, запишем в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r'} = g \frac{\partial h'}{\partial r'} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^*}{\partial r'}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z'} = -g(1 + \beta(T' - T_0)) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^*}{\partial z'}$$

Здесь  $T_0$  – температура непрогретой жидкости,  $P_0$  – внешнее давление,  $\rho_0$  – исходная плотность,  $\beta = \rho_0^{-1} (\partial \rho / \partial T)_P$  – температурный коэффициент расширения.

С учетом сделанных предположений уравнения движения и переноса

тепла в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + v' \frac{\partial u'}{\partial z'} &= -g \frac{\partial h'}{\partial z'} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^*}{\partial r'} + \nu \nabla^2 u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + v' \frac{\partial v'}{\partial z'} &= g\beta(T' - T_0) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^*}{\partial z'} + \nu \nabla^2 v' \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial r'} + v' \frac{\partial T'}{\partial z'} &= \kappa \nabla^2 T' \\ \frac{1}{r'} \frac{\partial(r'u')}{\partial r'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия на боковых стенках, дне и на оси кюветы будут

$$\begin{aligned} v' = u' = 0 \quad (z' = 0); \quad v' = u' = 0 \quad (r' = R) \\ u' = \partial v' / \partial r' = 0 \quad (r' = 0) \end{aligned}$$

На свободной поверхности имеем [7]

$$(P' - P_0) n_i = \sigma_{ik} n_k + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i + \tau_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \tau_i, \quad i=1, 3, k=1, 3 \quad (1.3)$$

где  $\sigma_{ik}$  — тензор вязких напряжений,  $\mathbf{n}$  — нормаль, направленная внутрь жидкости,  $\tau$  — касательная к свободной поверхности,  $1/R_1 + 1/R_2$  — кривизна поверхности жидкости. Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left( \frac{\dot{h}'}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}} \right) \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= -\frac{\dot{h}'}{(1+(\dot{h}')^2)^{3/2}} - \frac{\ddot{h}'}{r' \sqrt{1+(\dot{h}')^2}} \end{aligned}$$

и из соотношения (1.1)  $P'(r', z'=h', t') = P_0 + P^*$ , уравнение (1.3) в проекциях на оси  $r'$  и  $z'$  принимает вид

$$\begin{aligned} P^* \dot{h}' = 2\rho\nu \dot{h}' \frac{\partial u'}{\partial r'} - \rho\nu \left( \frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \\ - \frac{\sigma \dot{h}'}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}} \left( \frac{\dot{h}'}{1+(\dot{h}')^2} + \frac{\dot{h}'}{r'} \right) + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r'} + \dot{h}' \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right) \frac{1}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} P^* = 2\rho\nu \frac{\partial v'}{\partial z'} - \rho\nu \dot{h}' \left( \frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}} \left( \frac{\dot{h}'}{1+(\dot{h}')^2} + \frac{\dot{h}'}{r'} \right) + \\ + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r'} + \dot{h}' \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right) \frac{\dot{h}'}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кроме того, на поверхности выполняется кинематическое условие, а также условие симметрии

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + u' \frac{\partial h'}{\partial r'} = v', \quad \frac{\partial h'}{\partial r'} = 0 \quad (r' = 0)$$

На границе задается условие затухания движения  $h' = H$  ( $r' = R$ ). На-

чальные условия для скорости, формы поверхности и температуры имеют вид

$$u' = v' = 0, \quad h' = H, \quad T' = T_0 + (T_1 - T_0) \exp(-r'^2/a'^2 + \alpha(z' - h')).$$

В формулах использованы следующие размерные переменные:  $u'$  — скорость радиального движения,  $v'$  — вертикальная скорость,  $H$  — начальная толщина слоя жидкости,  $a'$  — радиус светового пятна,  $\alpha$  — коэффициент поглощения излучения,  $T_1$  — максимальное значение температуры в нагретой области,  $\nu$ ,  $\kappa$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Пусть  $L$  — характерный размер области, в которой локализовано движение жидкости в радиальном направлении. То, что оно будет локализовано, известно из эксперимента и численных расчетов [5, 8]. Размер  $L$  определяется радиусом круга, вне которого поверхностное натяжение практически не меняется и жидкость не движется. Радиус теплового пятна, нагревающего жидкость при  $t=0$ , по порядку величины порядка  $L$ ,  $a' \ll L$ .

В рассматриваемой области предполагается отсутствие теплообмена с окружающей средой, следовательно, граничные условия для температуры

$$\frac{\partial T'}{\partial r'} = 0 \quad (r' = L), \quad \frac{\partial T'}{\partial z'} + h' \frac{\partial T'}{\partial r'} = 0 \quad (z' = h')$$

Далее будем рассматривать тонкий слой жидкости  $\varepsilon = H/L \ll 1$ . Из уравнения неразрывности следует соотношение между скоростями  $v' \sim \varepsilon u'$ .

Оценим радиальную скорость из уравнения (1.4), предполагая, что поверхность не искривлена. Тогда

$$\rho v \left( \frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \approx \frac{\partial S}{\partial r'} = \frac{d\sigma}{dT'} \frac{\partial T'}{\partial r'}$$

отсюда

$$u' \sim \frac{(-d\sigma/dT') \Delta T H}{\rho \nu L} = u_0$$

Отношение гравитационных и термокапиллярных сил характеризуется числом Бонда

$$\text{Bd} = \frac{\rho_0 g \beta H^2}{(-d\sigma/dT')} = \frac{\rho_0 \beta \Delta T g H}{(-d\sigma/dT') (\Delta T/H)} = \frac{P_g^*}{P_{th}^*}$$

В данной работе рассматривается случай  $\text{Bd} \sim 1$ , следовательно,  $P_g^* \sim P_{th}^*$ , и в качестве масштаба для давления можно взять любую из этих величин. Пусть

$$P_{ch} = P_{th}^* = - \frac{d\sigma}{dT'} \frac{\Delta T}{H}$$

С учетом сделанных оценок введем безразмерные переменные

$$r = \frac{r'}{L}, \quad z = \frac{z'}{H}, \quad h = \frac{h'}{H}, \quad a = \frac{a'}{L}, \quad u = \frac{u'}{u_0}$$

$$v = \frac{v'}{\varepsilon u_0}, \quad P = \frac{P^*}{P_{ch}}, \quad \theta = \frac{T' - T_0}{\Delta T}$$

$$\Delta T = T_1 - T_0, \quad t = \frac{t'}{\tau}$$

Масштаб времени введем позднее.

В безразмерных переменных уравнения и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{\nu\tau} \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\operatorname{Bd}}{\beta_r} \frac{\partial h}{\partial r} + \\ + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 H^2}{\nu\tau} \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^4 \operatorname{Re} \left( u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial P}{\partial z} + \operatorname{Bd} \cdot \theta + \varepsilon^4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Pr} H^2}{\nu\tau} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon^2 \operatorname{Pr} \operatorname{Re} \left( u \frac{\partial \theta}{\partial r} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \\ = \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \operatorname{Re} = \frac{u_0 L}{\nu}, \quad \beta_r = \beta \Delta T$$

Начальные условия при  $t=0$

$$u=v=0, \quad h=1, \quad \theta = \exp(-r^2/a^2 + \alpha H(z-1)) \quad (1.7)$$

Граничные условия

$$u=v = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (z=0)$$

$$u=v = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (r=1)$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (r=0)$$

(1.8)

На свободной поверхности при  $z=h(r, t)$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(z=h) + \varepsilon^2 \dot{h} \frac{\partial \theta}{\partial r}(z=h) = 0$$

$$\frac{L}{u_0 \tau} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} = v$$

$$\partial h / \partial r (r=0) = 0, \quad h(r=1) = 1$$

$$-P \dot{h} = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial v}{\partial r} - 2\dot{h} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} + \dot{h} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\dot{h})^2}} - \quad (1.9)$$

$$- \frac{\varepsilon^2 \sigma}{d\sigma/dT \cdot \Delta T} \frac{\dot{h}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\dot{h})^2}} \left( \frac{\dot{h}}{1 + \varepsilon^2 \dot{h}^2} + \frac{\dot{h}}{r} \right)$$

$$P = \varepsilon^2 \left( 2 \frac{\partial v}{\partial z} - \dot{h} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \varepsilon^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) +$$

$$+ \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} + \dot{h} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{\varepsilon^2 \dot{h}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \dot{h}^2}} + \frac{\varepsilon^2 \sigma}{\frac{d\sigma}{dT} \Delta T} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \dot{h}^2}} \left( \frac{\dot{h}}{1 + \varepsilon^2 \dot{h}^2} + \frac{\dot{h}}{r} \right)$$

Из уравнений (1.6)–(1.9) видно, что в рассматриваемой нестационарной задаче имеется несколько масштабов времени, связанных с развитием скоростного и температурного полей и с изменением толщины слоя.

Введем масштабы времени:  $\tau_1 = H^2/\nu$  – время нестационарного процесса движения жидкости;  $\tau_2 = L/u_0$  – изменение толщины слоя во времени;  $\tau_3 = \text{Pr} H^2/\nu$  – характерное время развития температурного поля.

Будем полагать, что  $\text{Bd} \sim 1$ ,  $\text{Re} \sim 1$ ,  $\text{Pr} \sim 1$ . Тогда  $\tau_1 \sim \tau_3$ ,  $\tau_1/\tau_2 = \varepsilon^2 \text{Re} \ll 1$ .

**2. Случай малых времен.** В этом случае положим  $\tau = \tau_1$ . Пренебрегая в уравнениях (1.6) членами порядка  $\varepsilon^2$  и выше, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\text{Bd}}{\beta_r} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \text{Bd} \theta, \quad \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

На свободной поверхности вместо (1.9) имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad P = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

Начальные условия и оставшиеся граничные условия не изменяются.

Из первого уравнения в (2.2) получим, что  $h=1$ , т. е. на данном этапе форма поверхности не изменяется. Тогда в первом уравнении (2.1) выпадает последнее слагаемое. Решая последовательно уравнения (2.1) методом Фурье, получим выражения в виде ряда для температуры, давления и скоростей  $h=1$

$$\begin{aligned} \theta &= e^{-r^2/a^2} \left( \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \cos \lambda_k z \right) \\ u &= \frac{2r}{a^2} e^{-r^2/a^2} \left( \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} \left( z + \text{Bd} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k F_k(t) - \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) \sin \mu_n z + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sin \mu_n z \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}(t) \right) \\ P &= \text{Bd} e^{-r^2/a^2} \left( \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} (z-1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(t)}{\lambda_k} \sin \lambda_k z \right) \\ v &= \frac{4}{a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) e^{-r^2/a^2} \left( \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} \left( -\frac{z^2}{2} + \text{Bd} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{4} \right) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \bar{F}_k(t) - \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) \frac{\cos \mu_n z - 1}{\mu_n} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \mu_n z - 1}{\mu_n} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}(t) \Big) \\
& \lambda_k = \pi_k, \quad \mu_n = \pi/2 + \pi n \\
& F_k(t) = \frac{2((-1)^k - e^{-\alpha H})}{\alpha H (1 + (\lambda_k/\alpha H)^2)} \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{Pr} t\right) \\
& D_n(t) = \left( \frac{2 Bd}{\mu_n^2} \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} \left( \frac{(-1)^n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n} \right) + \frac{2(-1)^n}{\mu_n^2} \right) \exp(-\mu_n^2 t) \\
& C_{nk}(t) = \frac{2(-1)^{n+k} F_k(t)}{\mu_n^2 - \lambda_k^2 / Pr} \left( \frac{Bd}{\mu_n^2 - \lambda_k^2} + \frac{\lambda_k^2}{Pr \mu_n^2} \right) (1 - \exp((\lambda_k^2 - \mu_n^2)t))
\end{aligned}$$

Полученные ряды просуммированы на ЭВМ. Графики приведены для следующих значений параметров:  $a=0,2$ ,  $\alpha H=2$ ;  $Bd=1$ ;  $Pr=1$ .

На фиг. 1 кривые 1 показывают распределение температуры по радиусу на поверхности жидкости, сплошная линия соответствует моменту времени  $t=0,01$ , штриховая  $t=0,1$ . Кривые 2 представляют распределение температуры внутри слоя при  $z=0,4$ . Кривая 3 соответствует температуре для времен порядка  $t \geq 1$ , которая в этом случае не зависит от глубины. Это предельное распределение будет использовано в качестве начального для случая больших времен.

На фиг. 2, а показано распределение давления по радиусу. Кривые 1-3 соответствуют различным глубинам: 1 -  $z=0,2$ , 2 -  $z=0,6$ , 3 -  $z=0,8$ . Сплошные линии соответствуют малым временам  $t=0,01$ , штриховые  $t=0,1$ .

На фиг. 2, б и 3 показано распределение радиальной (фиг. 3) и вертикальной скоростей (фиг. 2, б) на поверхности слоя в различные моменты времени. Кривые 1-3 соответствуют временам 0,01, 0,1 и  $t \geq 1$ . Качественное поведение радиальной скорости аналогично полученному в работах [5, 8], движение жидкости локализовано.

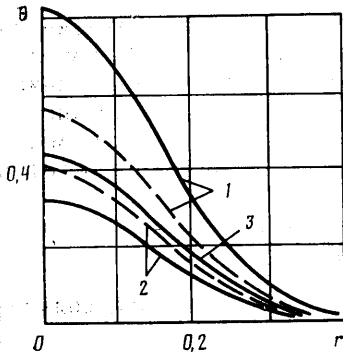
Вертикальная составляющая начиная с некоторого момента (кривая 2, фиг. 2, б) становится отрицательной. Это говорит о том, что появляется движение поверхности, направленное внутрь слоя, т. е. начинается искривление поверхности, которое увеличивается со временем.

**3. Случай больших времен.** При  $\tau = \tau_2$  нестационарные члены в уравнениях (1.6) имеют порядок  $\epsilon^2$  и ими следует пренебречь. Но в этом случае сохраняется уравнение для формы поверхности, и система уравнений (1.6) - (1.9) принимает вид

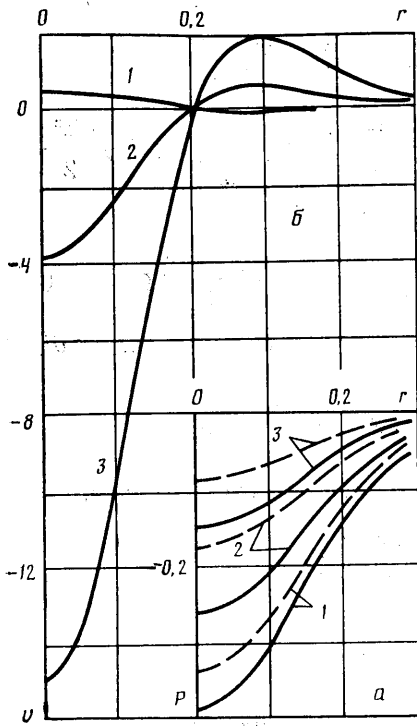
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{Bd}{\beta_r} \frac{\partial h}{\partial r}, & \frac{\partial P}{\partial z} &= Bd \theta \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0, & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Граничные условия

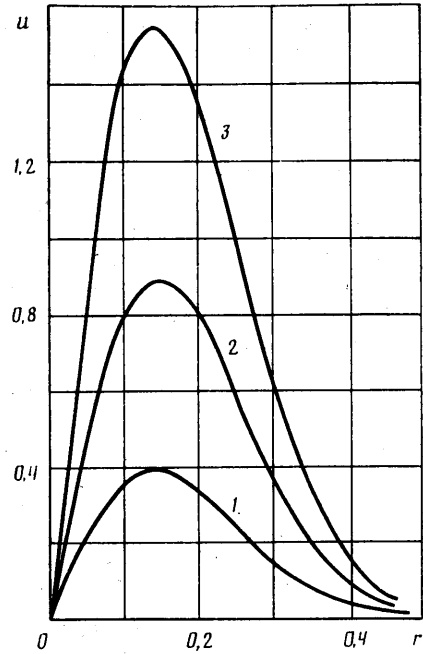
$$u = v = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (z=0); \quad u = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (r=0) \tag{3.2}$$



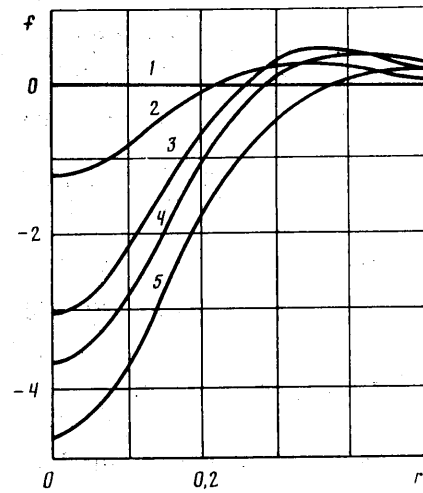
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

на свободной поверхности  $z=h(r, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} = v, \quad h(t=0)=1, \quad \frac{\partial h}{\partial r} (r=0)=0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad P=0$$

Условия при  $r \rightarrow 1$  остаются те же, что и для случая малых времен. Решая уравнение температуры, из (3.1) получим

$$\theta = \theta(r, t), \quad \theta(r=1) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r=1) = 0$$

Следовательно, при больших временах устанавливается равномерное распределение температуры по  $z$ . Так как  $Pr \sim 1$ ,  $Re \sim 1$ ,  $\varepsilon^2 \ll 1$ , в уравнении (1.6) для температуры исключается перенос тепла в направлении  $r$  как за счет конвекции, так и за счет теплопроводности, и естественно для вида  $\theta(r, t)$  взять предельное выражение для случая малых времен с учетом того, что в случае больших времен свободная поверхность деформирована. Тогда

$$\theta(r, t) = e^{-r^2/a^2} \frac{1 - \exp(-\alpha H h(r, t))}{\alpha H h(r, t)}$$

Далее, решая (3.1) с использованием условий (3.2) и (3.3), получим

$$P = Bd \cdot \theta(r, t)(z-h)$$

$$u = \frac{\partial \theta}{\partial r} (-z + Bd) \left( \frac{z^3}{6} - \frac{hz^2}{2} + \frac{h^2 z}{2} \right) + \frac{Bd}{\beta_T} (1 - \beta_T \theta) \dot{h} \left( \frac{z^2}{2} - h \right)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \left( \frac{z^2}{2} - Bd \left( \frac{z^4}{24} - \frac{z^3 h}{6} + \frac{h^2 z^2}{4} \right) \right) +$$

$$+ Bd \left( \dot{h} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \dot{h} \frac{1 - \beta_T \theta}{\beta_T} \right) \right) \left( \frac{z^3}{6} - \frac{hz^2}{2} \right) + Bd \left( (1 - \beta_T \theta) / \beta_T \right) \frac{\dot{h}^2 z^2}{2}$$

Для  $h(r, t)$  получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \left( \frac{h^2}{2} - \frac{Bd h^4}{8} \right) + \frac{Bd}{\beta_T} (1 - \beta_T \theta) \frac{\dot{h} h^3}{3} \right) \right\} \quad (3.4)$$

Найдем асимптотическое поведение  $h(r, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда  $\partial h / \partial t \cdot (t \rightarrow \infty) = 0$  и

$$r \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \left( \frac{h^2}{2} - \frac{Bd h^4}{8} \right) + \frac{Bd}{\beta_T} (1 - \beta_T \theta) \frac{\dot{h} h^3}{3} \right) = \text{const}$$

при  $r \rightarrow 1$ ,  $\partial \theta / \partial r \rightarrow 0$ ,  $\dot{h} \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 1$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , следовательно,  $\text{const} = 0$ , т. е.

$$\frac{8h\dot{h}Bd}{3(4 - Bd h^2)} = - \frac{\beta_T}{1 - \beta_T \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

Интегрируя, получим

$$(4 - Bd h^2) = C(1 - \beta_T \theta)^{-3/4}$$

При  $r \rightarrow \infty$  получим:  $C = 4 - Bd$

$$\left( \frac{4}{Bd} - h^2 \right) = \left( \frac{4}{Bd} - 1 \right) \left( 1 - \beta_T e^{-r^2/a^2} \frac{1 - e^{-\alpha H h}}{\alpha H h} \right)^{-3/4} \quad (3.5)$$

Это уравнение можно решить численно. Чтобы получить приближенное аналитическое решение уравнения (3.5), заметим, что  $\beta_T \sim 10^{-3} \ll 1$ , тогда

$$h^2 \approx \frac{4}{Bd} + \left( 1 - \frac{4}{Bd} \right) \left( 1 + \frac{3}{4} \beta_T e^{-r^2/a^2} \frac{1 - e^{-\alpha H h}}{\alpha H h} \right)$$

Далее, считая, что искривление поверхности мало, запишем  $h(r, t \rightarrow \infty) = 1 + x(r)$ , где  $x(r) \ll 1$ . Пренебрегая в разложении слагаемыми



порядка  $x^2$  и выше, получим

$$h(r, t \rightarrow \infty) \cong 1 + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{4}{\text{Bd}}\right) \beta_T \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} e^{-r^2/a^2} \quad (3.6)$$

Теперь в приближении малых деформаций решим (3.4). Запишем

$$h(r, t) = 1 + \beta_T f(r, t) \quad (3.7)$$

где  $f \sim 1$ . При этом предположим, что  $\partial h / \partial t = \beta_T \partial f / \partial t \sim 1$ , т. е.  $\partial f / \partial t \sim 1 / \beta_T$ . Тогда

$$\theta \approx e^{-r^2/a^2} \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} + \beta_T f(r, t) \left( e^{-\alpha H} - \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} \right) = e^{-r^2/a^2} (A + \beta_T f(r, t) B) \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в уравнение (3.4), используя разложение в ряд по степеням  $\beta_T$ , получим в нулевом порядке по  $\beta_T$

$$\beta_T \frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{2A}{a^2} \left(1 - \frac{4}{\text{Bd}}\right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-r^2/a^2} + \frac{\text{Bd}}{3} \left(f + \frac{f}{r}\right) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r=0) = 0; \quad f(r \rightarrow \infty) = \frac{\partial f}{\partial r}(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$f(t=0) = 0$$

Решив (3.9) с помощью преобразований Ганкеля нулевого порядка, получим

$$h(r, t) = 1 + \beta_T \frac{3}{8} \left(1 - \frac{4}{\text{Bd}}\right) \frac{1 - e^{-\alpha H}}{\alpha H} \left\{ e^{-r^2/a^2} - \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\text{Bd}}{\beta_T a^2} t\right)^{-1} \exp \left[ - \frac{r^2}{a^2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\text{Bd}}{\beta_T a^2} t\right)^{-1} \right] \right\} \quad (3.10)$$

В пределе при  $t \rightarrow \infty$  выражение (3.10) согласуется с асимптотическим решением (3.6).

На фиг. 4 показано отклонение формы поверхности от плоской в различные моменты времени. Кривые 1–5 соответствуют времени 0,  $10^{-4}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $\infty$ . Графики построены для следующих значений параметров:  $a=0,2$ ,  $\alpha H=2$ ,  $\text{Bd}=1$ ,  $\beta_T=10^{-3}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Распопов С. Ф., Суходольский А. Т.* Применение лазерно-индуцированного эффекта Марангони для записи дифракционных решеток // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. № 8. С. 1709–1710.
2. *Веденов А. А., Гладуш Г. Г.* Физические процессы при лазерной обработке материалов. М.: Энергоатомиздат, 1985. 207 с.
3. *Винаров А. Ю., Кафаров В. В., Быков В. А. и др.* Голографическое исследование межфазной турбулентности и переноса кислорода в биологических средах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 4. С. 986–990.
4. *Ostrach S.* Low-gravity fluid flows // Ann. Rev. Fluid. Mech. V. 14. Palo Alto. Calif. 1982. P. 313–345.
5. *Альварес-Суарес В. А., Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении, вызванном локальным нагревом жидкости импульсом ультрафиолетового излучения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 165–168.
6. *Кожухарова Ж., Славчев С.* Нестационарное термокапиллярное течение в тонком слое вязкой жидкости // Теоретична и приложна механика. София. 1983. Т. 14. № 4. С. 64–73.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
8. *Вальциферов Ю. В., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М.* Термокапиллярная конвекция в слое жидкости при локальном нагреве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 151–156.

Москва

Поступила в редакцию  
4.X.1989