

УДК 533.697.242.011

© 1991 г.

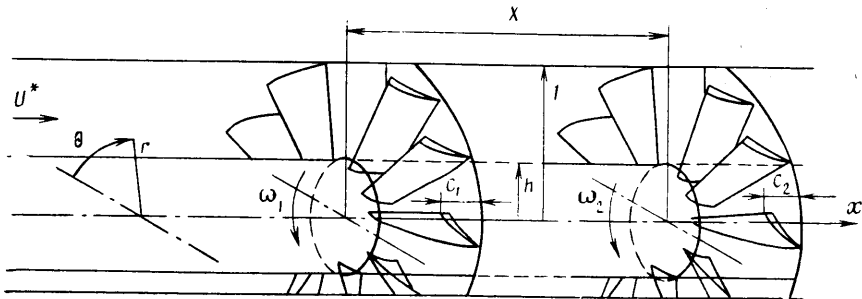
К. С. РЕЕНТ

## **НЕСТАЦИОНАРНОЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ КОЛЬЦЕВЫХ ЛОПАТОЧНЫХ ВЕНЦОВ ТОНКИХ СЛАБОНАГРУЖЕННЫХ ЛОПАТОК ПРИ ИХ ВРАЩЕНИИ ДРУГ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

В рамках линейной теории малых возмущений решена задача о дозвуковом нестационарном обтекании идеальным газом двух вращающихся друг относительно друга кольцевых лопаточных венцов тонких слабонагруженных лопаток. Как и в случае взаимодействия плоских решеток [1], задача сводится к бесконечной системе сингулярных интегральных уравнений для гармонических компонент колебаний в распределении неизвестной аэродинамической нагрузки на одной лопатке каждого венца. Система интегральных уравнений для конечного числа учитываемых гармоник решается численно методом коллокаций. Регуляризация ядер интегральных уравнений производится на основе метода, предложенного в [2].

В настоящее время имеются лишь единичные работы по расчету обтекания двух взаимно вращающихся пространственных венцов. В работах [3, 4] решена задача о нестационарном аэродинамическом взаимодействии венцов прямым численным интегрированием уравнений газовой динамики. В работе [5] для расчета обтекания идеальной несжимаемой жидкостью двух противоположно вращающихся винтов использовался панельный метод, сочетающий прямой численный расчет по времени с аппаратом теории интегральных уравнений. С целью уменьшения времени счета использовалась упрощенная твердовинтовая модель вихревых следов, а также выбиралось одинаковое количество лопастей в обоих винтах, что позволяло уменьшить размерность матрицы коэффициентов влияния. Такие подходы сопряжены с большими затратами расчетного времени и памяти ЭВМ и вряд ли пригодны для многопараметрических исследований особенностей рассматриваемых течений на современных ЭВМ. В этом отношении используемый в данной работе полуаналитический подход обладает по сравнению с численными решениями значительным преимуществом. Кроме того, аналитические соотношения, полученные в процессе решения задачи, как и сами результаты расчетов, позволяют получить информацию о качественных особенностях нестационарного пространственного течения, важную для более эффективной организации прямого численного расчета течения в реальных сильно нагруженных турбомашинах.

1. Рассмотрим обтекание идеальным газом двух кольцевых лопаточных венцов, расположенных в бесконечном цилиндрическом канале, вращающихся с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, как показано на фиг. 1. Ограничимся случаем, когда лопатки представляют собой части винтовых поверхностей нулевой толщины, закрученные таким образом, что при отсутствии источников возмущений однородный осевой поток газа в канале остается невозмущенным. Указанные поверхности образованы радиальным лучом, перемещающимся вдоль оси цилиндрической системы координат и одновременно вращающимся вокруг нее. Параметрам первого венца, расположенного выше по потоку, будем приписывать нижний индекс 1, а параметрам второго — индекс 2. Заданы все геометрические характеристики обоих венцов: число лопаток  $N_v$  ( $v = 1, 2$ ), величина осевой проекции хорды профиля лопаток  $c_v$ , радиус втулки лопаточных колес  $h$  и величина осевого зазора между венцами  $\delta$ . Все параметры с размерностью длины отнесены к радиусу внешнего ка-



Фиг. 1

нала. В неподвижной системе координат однородный осевой поток с плотностью  $\rho_0^*$  и числом  $M_a$  движется со скоростью  $U^*$ . Все величины с размерностью скорости и давления относятся к  $U^*$  и  $\rho_0^* U^{*2}$  соответственно.

Пусть лопатки одного венца или обоих сразу слегка деформированы так, что деформация всех лопаток каждого венца одинакова и фиксирована. В качестве такой деформации в данной работе будем рассматривать стационарное отклонение лопаток от нулевого по всей высоте лопатки угла атаки или их искривление.

Аэродинамическое взаимодействие двух венцов удобно представлять следующим образом. Пусть вначале в кольцевом канале вращается один венец. В связанной с ним системе координат формируется некоторое стационарное течение. Важной характеристикой такого течения является степень неоднородностей  $v_{i \max}$  его поля скоростей, которую для  $i$ -ой компоненты вектора скорости  $v_i$  определим как максимальное отклонение от своего осредненного по углу значения

$$v_{i \max}(x, r) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |v_i(x, r, \theta) - v_i'(x, r)|$$

$$v_i'(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_i(x, r, \theta) d\theta$$

В системе координат, вращающейся относительно первого венца, указанное неоднородное поле будет уже нестационарным, причем амплитуда нестационарных колебаний пропорциональна степени неоднородностей.

Применительно к обтеканию двух взаимно вращающихся венцов рассмотренные выше неоднородности являются причиной нестационарного взаимодействия, а величина любой нестационарной характеристики (будь то нестационарные нагрузки на обоих венцах, амплитуды бегущих волн от одного венца к другому, интенсивности сходящих с кромок лопаток нестационарных вихрей и т. д.) определяется величиной степени неоднородностей  $v_{i \max}$ .

На установившемся режиме, не зависящем от начального состояния потока, рассматриваемое течение представляет собой периодическое по времени движение газа. Обозначим через  $w_1$  и  $w_2$  относительные угловые скорости вращения венцов в системах координат, связанных соответственно с первым и вторым венцами. По определению

$$w_\nu = \omega_\nu - \omega_\mu \quad (\nu = 1, 2)$$

где индекс  $\mu$  здесь и везде ниже связан с  $\nu$  по формуле  $\mu = 3 - \nu$ .

Вывод интегральных уравнений повторяет аналогичный вывод работы [1]. Будем предполагать, что режимы, на которых могут существо-

вать собственные решения, не совпадают с рассматриваемыми режимами. В этом случае период колебаний газа  $T_v$  определяется периодом колебаний внешней силы и в системе координат, связанной с  $v$ -ым венцом, равен  $2\pi/(w_v N_v)$  ( $v=1, 2$ ). Рассмотрим какой-либо параметр течения, например давление  $p_v \equiv p_v(x_v, r_v, \theta_v, t)$ , в собственной цилиндрической системе координат  $v$ -го венца. Начало  $v$ -ой координатной системы поместим так, чтобы проекция поверхности лопатки на плоскость переменных  $x_v, r_v$  описывалась множеством точек  $(x_v, r_v)$ :  $\{-c_v/2 < x_v < c_v/2, h < r_v < 1\}$ . Кинематика данного нестационарного процесса такова, что имеет место обобщенная пространственно-временная периодичность параметров течения, выражаемая равенством

$$p_v(x_v, r_v, \theta_v, t) = p_v\left(x_v, r_v, \theta_v + \frac{2\pi}{N_v}, t + \frac{2\pi}{N_v w_v}\right) \quad (1.1)$$

При фиксированных  $x_v$  и  $r_v$  функция  $p_v$  периодична по  $\theta_v$  с периодом  $2\pi$  и по  $t$  с периодом  $T_v$ . Раскладывая ее в двойной ряд Фурье по  $\theta_v$  и  $t$  с учетом (1.1), для  $p_v$  можно получить выражение

$$p_v = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{vjn}(x_v, r_v) \exp(i\beta_{vjn}\theta_v + i\lambda_{vj}t) \quad (1.2)$$

$$\lambda_{vj} = N_v w_v j, \quad \beta_{vjn} = n N_v + \sigma_{vj}, \quad \sigma_{vj} = -j N_v$$

Из полученных формул следует, что  $j$ -ая гармоническая компонента описывает возмущения, фаза которых в произвольной точке потока с координатами  $(x_v, r_v, \theta_v)$  опережает фазу в точке  $(x_v, r_v, \theta_v + 2\pi/N_v)$  на величину  $2\pi\sigma_{vj}/N_v$ .

2. Ограничимся далее линейным анализом малых возмущений. В собственной системе координат  $v$ -го венца линеаризованное уравнение для возмущений давления на фоне основного невозмущенного потока имеет вид

$$L_v p_v \equiv \left[ \nabla_v^2 - M_a^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_v} + \omega_v \frac{\partial}{\partial \theta_v} \right)^2 \right] p_v = 0$$

$$\nabla_v^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_v^2} + \frac{1}{r_v} \frac{\partial}{\partial r_v} \left( r_v \frac{\partial}{\partial r_v} \right) + \frac{1}{r_v^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_v^2}$$

В соответствии с (1.2) будем искать давление в виде суперпозиции гармонических колебаний газа с частотой  $\lambda_{vj}$  и сдвигом фазы между любыми двумя точками потока с координатами  $(x_v, r_v, \theta_v)$  и  $(x_v, r_v, \theta_v + 2\pi/N_v)$ , равным  $2\pi\sigma_{vj}/N_v$ . Комплексная амплитуда  $p_{vj}$   $j$ -ой гармонической компоненты давления  $p_{vj} \exp(i\lambda_{vj}t)$  удовлетворяет уравнению

$$L_{vj} p_{vj} \equiv \left[ \nabla_v^2 - M_a^2 \left( i\lambda_{vj} + \frac{\partial}{\partial x_v} + \omega_v \frac{\partial}{\partial \theta_v} \right)^2 \right] p_{vj} = 0$$

Для решения задачи о взаимодействии венцов воздействие каждого из них на поток будем описывать с помощью дипольных особенностей, распределенных по винтовым поверхностям, соответствующим невозмущенным положениям лопаток. Будем исходить из известного решения [2, 6, 7] для решетки из  $N_v$  равномерно распределенных в окружном направлении диполей, интенсивность которых колеблется с частотой  $\lambda_{vj}$ , а сдвиг фазы колебаний между двумя соседними из них равен  $2\pi\sigma_{vj}/N_v$ . Обозначим амплитуды  $x$ -й и  $\theta$ -й компонент скорости, индуцированных такой решеткой

$$v''_{xvj} = K_{vj}^x(x_v, r_v, \theta_v, x_{0v}, r_{0v}, \theta_{0v}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_{vjn}^x \exp(i\beta_{vjn}\theta_v)$$

$$v''_{\theta vj} = K_{vj}^\theta(x_v, r_v, \theta_v, x_{0v}, r_{0v}, \theta_{0v}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_{vjn}^\theta \exp(i\beta_{vjn}\theta_v)$$

где  $(x_{0v}, r_{0v}, \theta_{0v})$  — координата одного из диполей, а  $k_{vjn}^x$  и  $k_{vjn}^z$  —  $n$ -ые компоненты Фурье функций  $K_{vj}^x$  и  $K_{vj}^z$ . Отметим, что функции  $K_{vj}^x$  и  $K_{vj}^z$  содержат как акустические, так и вихревые компоненты.

Компонента скорости, нормальная к лопаткам венца, получается с помощью линейной комбинации  $x$ -й и  $\theta$ -й составляющих. Амплитуда ее, которую мы будем обозначать как  $K_{vj}^r$ , раскладывается по углу в аналогичный ряд Фурье

$$K_{vj}^r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_{vjn}^r \exp(i\beta_{vjn}\theta_v)$$

Воздействие каждого элементарного участка лопатки  $v$ -го венца на поток можно представить как воздействие нестационарного диполя, интенсивность которого складывается из гармонических компонент с частотами  $\lambda_{vj}$  и неизвестными амплитудами  $\Delta p_{vj}$  ( $v=1, 2; j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Нормальная к лопаткам компонента  $v_{\tau v}''$  скорости, индуцируемой всеми  $j$ -ыми гармоническими составляющими решетки диполей, может быть представлена в виде

$$v_{\tau v}'' = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta p_{vj} \exp(i\lambda_{vj}t) K_{vj}^r(x_v, r_v, \theta_v, x_{0v}, r_{0v}, \theta_{0v})$$

а суммарная нормальная компонента от всех элементарных участков

$$v_{\tau v}' = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda_{vj}t) \times \int_{h-c_v/2}^{h+c_v/2} \int \Delta p_{vj}(x_{0v}, r_{0v}) K_{vj}^r(x_v, r_v, \theta_v, x_{0v}, r_{0v}, \theta_{0v} = \omega x_{0v}) dx_{0v} dr_{0v} \quad (2.1)$$

Рассмотрим теперь поле возмущений от решетки диполей, соответствующей  $v$ -ому венцу, в системе координат, связанной с другим венцом. Обозначим через  $X$  расстояние между началами координатных систем ( $X = \delta + c_1/2 + c_2/2$ ). Положим

$$X_v = \begin{cases} X, & v=1 \\ -X, & v=2 \end{cases}$$

Преобразование переменных при переходе из одной системы координат в другую будет осуществляться по формулам

$$x_v = x_\mu + X_v, \quad \theta_v = \theta_\mu + w_\nu t, \quad r_v = r_\mu \quad (2.2)$$

Индуцируемая  $v$ -ым венцом  $x$ -я компонента скорости в другой системе координат с учетом (2.1) и (2.2) преобразуется к виду

$$v_{xv}'(x_\mu + X_v, r_\mu, \theta_\mu + w_\nu t, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\lambda_{\mu n}t) \times \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{h-c_v/2}^{h+c_v/2} \int \Delta p_{vj}(x_{0v}, r_{0v}) \exp(i\beta_{vjn}\theta_\mu) k_{vjn}^x(x_\mu + X_v, r_\mu, x_{0v}, r_{0v}) dx_{0v} dr_{0v}$$

Выражение для  $\theta$ -й компоненты скорости имеет аналогичный вид, только вместо ядра  $k_{vjn}^x$  должно стоять ядро  $k_{vjn}^\theta$ . Из комбинаций  $x$ -й и  $\theta$ -й компонент легко получить нормальную к лопаткам  $\mu$ -го венца компоненту скорости.

Интегральные уравнения для определения неизвестных распределений амплитуд интенсивностей диполей  $\Delta p_{vj}(x_{0v}, r_{0v})$  получаются из условий непротекания на поверхности лопаток. Пусть стационарная деформация лопаток описывается заданной функцией  $\tau_v(x_v, r_v)$ , характеризующей смещение их поверхности по нормали к невозмущенному положению. В соответствии с линейным подходом вычислим величину

проекция невозмущенного вектора скорости на нормаль к возмущенному положению лопатки и снесем ее на невозмущенную поверхность  $\theta_v = \omega_v x_v$ . Указанная величина равна  $\partial \tau_v(x_v, r_v) / \partial x_v$ . Приравняв ее к величине нормальной компоненты скорости, индцидированной обоими венцами, получим бесконечную систему интегральных уравнений

$$\int_{h-c_v/2}^1 \int_{-c_v/2}^{c_v/2} \Delta p_{vj}(x_{0v}, r_{0v}) K_{vj}^{\tau}(x_v, r_v, \omega_v x_v, x_{0v}, r_{0v}, \omega_v x_{0v}) dx_{0v} dr_{0v} +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_h^1 \int_{-c_{\mu}/2}^{c_{\mu}/2} \Delta p_{\mu n}(x_{0\mu}, r_{0\mu}) Q_{\mu n-j}(x_v, r_v, x_{0\mu}, r_{0\mu}) dx_{0\mu} dr_{0\mu} = f_v(x_v, r_v) \delta_{0j} \quad (2.3)$$

Здесь обозначено  $f_v(x_v, r_v) = \partial \tau_v / \partial x_v$ . Первый интеграл описывает влияние  $v$ -го венца самого на себя, второй – воздействие, оказываемое на него со стороны другого ( $\mu$ -го) венца.

Ядро  $K_{vj}^{\tau}$  обладает особенностью, которая для более эффективного численного решения должна быть выделена в явном виде. Наиболее часто встречающийся способ ее выделения заключается в анализе асимптотики поведения высоких гармоник ряда Фурье, из членов которого состоит ядро.

В задаче о течении в пространственном цилиндрическом канале выделение сингулярности указанным способом представляет значительные трудности, связанные как раз со сложным асимптотическим поведением высоких гармоник ядра [8]. Впервые эффективный метод регуляризации на дозвуковом режиме предложил М. Намба [2, 7, 8]. В его методе вместо точного ядра использовалось приближенное галеркинское ядро, ряд Фурье которого, как оказалось, имеет простое асимптотическое поведение для высоких гармоник.

Следуя этому подходу, в данной работе система интегральных уравнений (2.3), записанная для плотности распределения диполей  $\Delta p_{vj}(x_{0v}, r_{0v})$ , формулировалась для спектральных компонент Фурье  $\Delta p_{vj l}(x_{0v})$ , связанных с  $\Delta p_{vj}$  приближенным равенством

$$\Delta p_{vj}(x_{0v}, r_{0v}) = \sum_{l=0}^{L-1} \Delta p_{vj l}(x_{0v}) R_l^{(0)}(r_{0v})$$

где  $R_l^{(0)}(r)$  –  $l$ -ая собственная функция для уравнения Бесселя нулевого порядка с граничными условиями Неймана на отрезке  $(h, 1)$ .

Интегральное уравнение (2.3) сводится к виду

$$\sum_{l=0}^{L-1} \int_{-c_v/2}^{c_v/2} \Delta p_{vj l}(x_{0v}) K_{vj l}^{\tau}(x_v, r_v, x_{0v}) dx_{0v} +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{-c_{\mu}/2}^{c_{\mu}/2} \Delta p_{\mu n l}(x_{0\mu}) Q_{\mu n-j l}(x_v, r_v, x_{0\mu}) dx_{0\mu} = f_v(x_v, r_v) \delta_{0j} \quad (2.4)$$

Для численного решения бесконечной системы (2.4) ограничимся в ней конечным по индексу  $j$  числом уравнений так, что  $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j_{\max}$ . Интегральные ядра  $K_{vj}^{\tau}$  имеют особенность типа Коши  $\sim (x_v - x_{0v})^{-1}$ . Для нахождения решения, удовлетворяющего условию Жуковского – Чаплыгина, разложим искомые функции  $\Delta p_{vj l}(x_{0v})$  в конечный ряд с неизвестными коэффициентами  $A_{vj l m}$

$$\Delta p_{vj l}(x_{0v}) = A_{vj l 0} \operatorname{ctg} \frac{\eta_{0v}}{2} + \sum_{m=1}^{M_{v-1}} A_{vj l m} \sin m \eta_{0v}$$

$$x_{0v} = -\frac{c_v}{2} \cos \eta_{0v}, \quad 0 < \eta_{0v} < \pi$$

Наличие котангенса соответствует неограниченности решения в передней кромке. Для нахождения неизвестных коэффициентов  $A_{vj l m}$  система (2.4) удовлетворяется в конечном числе точек на лопатках обоих венцов. По радиусу каждая из них

разбивается равномерно на  $L$  отрезков, а условия непротекания удовлетворяются в их центрах. Хорда лопатки  $\nu$ -го венца разбивается на  $M_\nu$  отрезков по закону косинуса так, что в переменных  $\eta_{0\nu}$  они имеют равную длину. Условия непротекания также относятся к их центрам. Получающаяся система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{\nu j l m}$  имеет размерность  $I \times I$ , где  $I = (2j_{\max} + 1)L(M_1 + M_2)$  и решается методом исключения Гаусса.

3. Рассмотрим некоторые особенности трехмерного нестационарного аэродинамического взаимодействия двух лопаточных венцов в сравнении с особенностями взаимодействия плоских решеток. Как уже отмечалось, нестационарное течение в ступени обусловлено наличием неоднородных стационарных, в собственной системе координат, полей за первым венцом (решеткой) и перед вторым венцом (решеткой), рассмотренными по отдельности.

В плоском случае поток, проходя через решетку профилей, отклоняется на некоторый угол и достаточно далеко за ней становится практически однородным. Имеющиеся неоднородности вблизи решетки быстро затухают по мере удаления от нее вверх и вниз по потоку. Представим вектор скорости в произвольной точке потока за (перед) решеткой в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

где  $\mathbf{v}_0 = \text{const}$  — его однородная компонента;  $\mathbf{v}'$  — неоднородная компонента,  $|\mathbf{v}'| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Как известно (см., например, [9]), степень неоднородностей экспоненциально быстро затухает при удалении от решетки

$$|\mathbf{v}'| \sim \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-M^2}}{1-M_x^2} \frac{|x|}{H}\right) \quad (3.1)$$

где  $M$  — число Маха основного невозмущенного потока;  $M_x$  — его проекция на ось  $x$ , которая ориентирована перпендикулярно фронту решетки;  $H$  — расстояние между соседними профилями в направлении по фронту. Будем такие неоднородности называть потенциальными неоднородностями в соответствии с тем, что они имеют нулевую завихренность. В частности, для несжимаемой жидкости, когда  $M = M_x = 0$

$$|\mathbf{v}'| \sim \exp\left(-2\pi \frac{x}{H}\right)$$

Из формулы видно очень сильное затухание степени неоднородностей при удалении от решетки. Можно считать, что неоднородное потенциальное поле проникает в поток лишь на расстояние порядка  $H/2\pi$ .

Отсюда следует вывод, что в случае обтекания ступени из двух плоских решеток нестационарное аэродинамическое взаимодействие между ними будет экспоненциально быстро падать при увеличении расстояния между решетками.

Рассмотрим этот факт с формальной точки зрения. Перепишем систему (2.3) в операторном виде

$$K_{\nu j}^{\tau} \Delta p_{\nu j} + \sum_n Q_{\mu n-j} \Delta p_{\mu n} = f_{\nu} \delta_{0j} \quad (3.2)$$

Отмеченное свойство экспоненциально быстрого затухания неоднородностей стационарного поля при удалении от плоской решетки проявляется в экспоненциально быстром затухании функций  $Q_{\mu 0-j}$  при увеличении осевого зазора  $\delta$  как  $\exp(-|j|2\pi\delta/H_\mu)$  ( $H_\mu$  — шаг  $\mu$ -ой решетки; для  $|j|=1$  см. (3.1)). Функции  $Q_{\mu n-j}$  с  $n \neq 0$  зависят от относительной скорости движения решеток и в отличие от  $Q_{\mu 0-j}$ , вообще говоря, не затухают при  $\delta \rightarrow \infty$  из-за наличия в  $Q_{\mu n-j}$  вихревых слагаемых и распространяющихся мод.

Легко видеть, что при бесконечно большом зазоре  $\delta$  все  $\Delta p_{vj}$ , которые для этого случая будем обозначать как  $\Delta p_{vj}^{(0)}$ , при  $j \neq 0$  обращаются в нуль, так как  $Q_{\mu 0-j} = 0$  при  $j \neq 0$ . Иными словами, решение можно представить в виде

$$\Delta p_{vj}^{(0)} = \Delta p_{v0}^{(0)} \delta_{0j}$$

где  $\Delta p_{v0}^{(0)}$  — стационарные нагрузки на обеих решетках при бесконечном удалении их друг от друга, удовлетворяющие системе из двух интегральных уравнений

$$K_{v0} \Delta p_{v0}^{(0)} + Q_{\mu 00} \Delta p_{\mu 0}^{(0)} = f_v \quad (3.3)$$

При конечном значении  $\delta$  решение будем искать в виде поправки к только что рассмотренному решению

$$\Delta p_{vj} = \Delta p_{vj}^{(0)} + \Delta p_{vj}^{(1)} = \Delta p_{v0}^{(0)} \delta_{0j} + \Delta p_{vj}^{(1)}$$

Подставляя последнюю формулу в исходную систему интегральных уравнений (3.2) с учетом (3.3), для поправок  $\Delta p_{vj}^{(1)}$  получим систему

$$K_{vj} \Delta p_{vj}^{(1)} + \sum_n Q_{\mu n-j} \Delta p_{\mu n}^{(1)} = -(1 - \delta_{0j}) Q_{\mu 0-j} \Delta p_{\mu 0}^{(0)} \quad (3.4)$$

Отметим, что в правую часть (3.4) входят только  $Q_{\mu n-j}$  с  $n=0$ , которые, как говорилось выше, затухают с увеличением осевого зазора. Поэтому возникающие при аэродинамическом взаимодействии нестационарные нагрузки будут также экспоненциально быстро падать при увеличении расстояния между решетками.

Иная структура течения за пространственным одиночным венцом. Как известно, даже при стационарном обтекании за ним образуются вихревые следы, представляющие собой в линейном приближении поверхности разрыва радиальной компоненты скорости. Следы сходят с задних кромок лопаток и распространяются вниз по потоку без затухания. В области между следами формируется неоднородное поле, степень неоднородностей которого не стремится к нулю, как это было в плоском случае, а выходит на некоторое постоянное значение.

Поэтому в отличие от плоского случая функции  $Q_{\mu 0-j}$  (при  $\mu=1$ ) содержат не только экспоненциально затухающие по  $\delta$  акустические слабые, но и не затухающие вихревые. Забегая вперед, отметим, что указанное свойство может приводить к сильному, подчас на порядок, различиям в уровнях нестационарных нагрузок в ступени, посчитанных по трехмерной и цилиндрической (двухмерной в каждом сечении по радиусу) моделям.

Продемонстрируем структуру течения в дальнейшем неоднородном поле на простом примере. Рассмотрим обтекание решетки прямоугольных в невозмущенном состоянии лопаток, расположенных между двумя параллельными плоскостями  $z=0$  и  $z=1$ . Пусть длина хорды лопатки равна  $s$ , а расстояние между соседними лопатками  $a$ . Ось  $x$  направим вдоль невозмущенного вектора скорости. Ограничимся случаем несжимаемого потока и нулевым углом выноса решетки. Нас будет интересовать поле скорости при  $x \rightarrow +\infty$ .

Поскольку вдали от решетки давление выходит на постоянное значение,  $x$ -компонента скорости выпадает из уравнения неразрывности, а  $y$ - и  $z$ -компоненты  $v$  и  $w$  зависят только от координат  $y$  и  $z$ . В силу периодичности достаточно рассмотреть течение в одной из подобластей между следами. Пусть это будет подобласть  $\Omega = \{(y, z) : 0 < z < 1, 0 < y < a\}$ . Завихренность потока в ней равна нулю, так как она сохраняется вдоль невозму-

ценных линий тока, а в бесконечности равна нулю в соответствии с постановкой задачи. В области  $\Omega$  имеем следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ w|_{z=0} &= w|_{z=1} = 0, & v|_{y=a} - v|_{y=0} &= 0 \\ w|_{y=a} - w|_{y=0} &= -\frac{dC_l}{dz}, & C_l &= \int_{-c/2}^{c/2} \Delta p(x, z) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

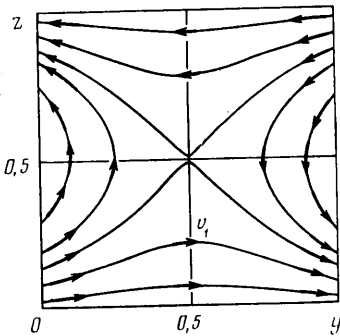
где  $\Delta p(x, z)$  — нагрузка на лопатке. Последние два соотношения выражают условия на следе.

Решение системы (3.5) легко может быть получено методом Фурье

$$\begin{aligned} v(y, z) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos \pi n z \frac{\text{ch}(\pi n (y-a/2))}{\text{sh}(\pi n a/2)} \\ w(y, z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin \pi n z \frac{\text{sh}(\pi n (y-a/2))}{\text{sh}(\pi n a/2)} \\ \alpha_n &= - \int_0^1 \frac{dC_l}{dz} \sin \pi n z dz, \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Константа  $\alpha_0$  в выражении для  $y$ -компоненты скорости характеризует снос потока его однородную компоненту и определяется суммарной нагрузкой лопатки. Поэтому ее значение не может быть найдено из системы (3.5), которая содержит в качестве определяющего параметра градиент коэффициента подъемной силы  $dC_l/dz$ . Неоднородное поле, которое, согласно (3.6), можно представить в виде суммы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n v_n$$



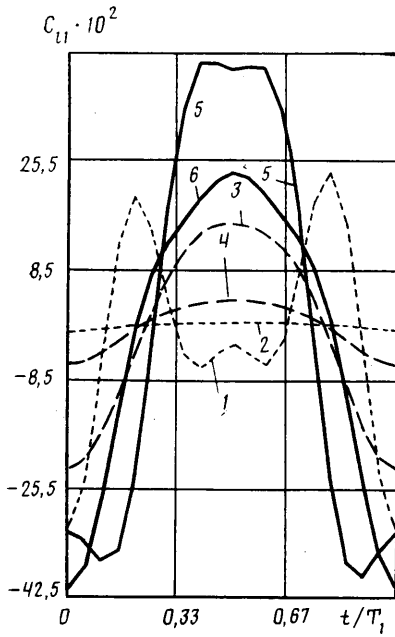
Фиг. 2

будем называть вихревыми неоднородностями, понимая при этом, что оно имеет нулевую завихренность между следами и бесконечную завихренность на следах.

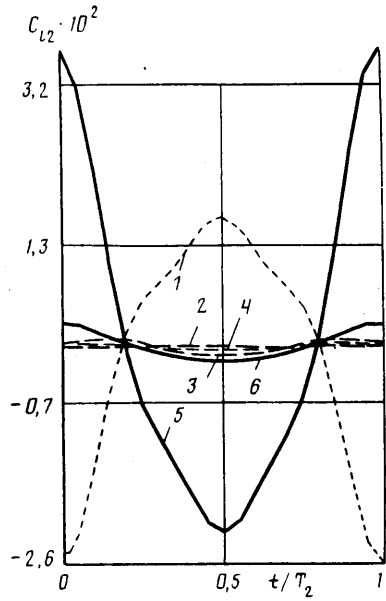
На фиг. 2 изображено поле  $v_1$ . Если градиент  $dC_l/dz$  — достаточно плавная функция переменной  $z$ , такая, что ее коэффициенты Фурье быстро затухают, то основной вклад в дальнейшее неоднородное поле вносит компонента  $v_1$ . Заметим, что проекция скорости этой компоненты на ось  $y$  в верхней половине области ( $z > 1/2$ ) и нижней половине ( $z < 1/2$ ) имеет разные знаки. Если в такое поле будет помещен второй венец, верхняя и нижняя части его лопаток будут обтекаться под углами атаки с противоположными знаками и поэтому верхняя часть лопатки будет нагружена в противофазе по отношению к нижней части лопатки.

В реальной ступени венцы расположены на конечном расстоянии друг от друга и неоднородное поле за первым из них содержит помимо вихре-





Фиг. 3



Фиг. 4

вых потенциальные неоднородности. Последние, как и в двумерном случае, экспоненциально быстро затухают при увеличении осевого зазора. Поэтому даже незначительное раздвижение венцов друг от друга (см. (3.1)) может привести к сильному падению потенциального взаимодействия. Вихревое взаимодействие при этом остается на прежнем уровне. Можно сказать, что относительная роль трехмерных эффектов экспоненциально быстро растет с увеличением расстояния между венцами.

4. Продемонстрируем сравнение результатов расчета по трехмерной программе с результатами цилиндрического расчета. Под цилиндрическим расчетом понимаются три независимых расчета в трех сечениях  $r=1$ ,  $r=h$  и  $r=(1+h)/2$  по двумерной программе для ступени плоских взаимно движущихся решеток, параметры которых получаются после разворота на плоскость в каждом из сечений. По оси ординат отложим коэффициент нестационарной подъемной силы  $C_{1v}$ , определяемый на каждом радиусе по двумерным параметрам

$$C_{1v}(r, t) = \int_0^{s_v^*} \Delta p_v^*(x, r, t) ds_v^* \left[ \rho_0^* U^{*2} (1 + \omega_1^2 r^2) \int_0^{s_1^*} ds_1^* \right]^{-1}$$

Верхний индекс звездочка означает, что величины размерные. Под  $\Delta p_v^*$  понимается только нестационарная часть нагрузки. В качестве квадрата скорости  $U^{*2}(1 + \omega_1^2 r^2)$  и длины  $s_1^*$  взяты параметры первого венца в сечении  $r$ . По оси абсцисс отложим время, изменяющееся в пределах одного периода колебаний. В момент времени  $t=0$ , а также при  $t=T_v$  рассматриваемые лопатки находятся напротив друг друга (угловые координаты их центров совпадают).

На фиг. 3 и 4 представлено сравнение результатов расчета по указанным программам на первом и втором венце соответственно. Цифрой 1 обозначен результат трехмерного расчета, а цифрой 2 — цилиндрического в сечении  $r=h$ . Цифрами 3 и 4 обозначены аналогичные данные в сечении  $r=(1+h)/2$ , а 5 и 6 — в сечении  $r=1$ . Исходные данные задачи сле-

дующие: число Маха  $M_a=0,7$ ; радиус внутренней втулки  $h=0,5$ ; величина осевого зазора  $\delta=0,157 \cdot 10^{-1}$ , число лопаток  $N_1=20$ ,  $N_2=18$ , величины проекций хорд на ось  $x$   $c_1=c_2=0,314$ . Расчет проводился с  $j_{\max}=3$ ,  $M_1=M_2=4$ ,  $L=4$ . Углы атаки на обоих венцах задавались одинаковыми и постоянными по высоте лопатки так, что  $f_1(x_1, r_1)=f_2(x_2, r_2)=1$ . Первый венец неподвижен,  $\omega_1=0$ . Скорость вращения второго венца выбиралась малой,  $\omega_2=0,01$ . В этом случае проявление трехмерных эффектов особенно наглядно, так как оказывается, что в левой части уравнения (3.4) при  $v=2$  можно пренебречь вторым слагаемым, после чего нестационарные нагрузки на втором венце определяются непосредственно тем неоднородным полем, которое формируется за первым венцом. При этом хорошо видно качественное соответствие структуры образующихся за первым венцом неоднородностей (совпадающей в данном случае со структурой приведенного на фиг. 2 поля  $v_1$ ) с особенностями возникающих на втором венце нестационарных нагрузок: противофазные колебания на конце и у корня лопатки, незначительные, почти нулевые нагрузки в середине лопатки.

Отметим также, что нестационарные нагрузки, посчитанные по цилиндрической модели, на обоих венцах у корня значительно ниже, чем на конце лопатки. Действительно, соответствующая корневому сечению плоская решетка имеет меньший шаг, чем решетка, соответствующая концевому сечению. Поэтому расстояние проникновения неоднородностей у корня значительно меньше, чем на конце.

Время расчета типичного варианта при числе Струхалия, не превышающем единицу, составляет около 10 мин на ЭВМ ЕС-1061. Под числом Струхалия понимается безразмерная характерная частота нестационарных процессов, посчитанная в каждой системе координат по скорости набегающего потока и длине хорды собственного венца. Так, представленный на фиг. 3 и 4 трехмерный расчет потребовал около 2 мин времени ЦПУ.

Автор благодарен А. А. Осипову и К. К. Бутенко, оказавшим большую помощь при обсуждении и написании данной работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенко К. К., Осипов А. А. Аэродинамическое взаимодействие двух плоских решеток тонких слабагруженных профилей при их относительном движении в дозвуковом потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 168–175.
2. Namba M. Lifting surface theory for a rotating subsonic or transonic blade row // Aeronaut. Res. Council. Rep. and Mem. 1974. № 3740. 75 p.
3. Гнесин В. И. Расчет трехмерного трансзвукового потока газа через ступень осевой турбины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 138–146.
4. Koya M., Kotake S. Numerical analysis of fully three-dimensional periodic flows through a turbine stage // Trans. ASME J. Eng. Gas Turbines and Power. 1985. V. 107. № 4. P. 945–952.
5. Chen S. H., Williams M. H. A panel method for counter rotating propfans // AIAA Pap. 1987. № 1890. P. 1–11.
6. Namba M. Three-dimensional analysis of blade force and sound generation for an annular cascade in distorted flows // J. Sound and Vibration. 1977. V. 50. № 4. P. 479–508.
7. Namba M., Ishikawa A. Three-dimensional aerodynamic characteristics of oscillating supersonic and transonic annular cascades // Trans. ASME J. Eng. Power. 1983. V. 105. № 1. P. 138–146. (Рус. перев.: Намба, Исакова. Трехмерные аэродинамические характеристики вибрирующих сверхзвуковых и трансзвуковых кольцевых решеток // Энерг. машины и установки. 1963. Т. 105. № 1. С. 99–108).
8. Осипов А. А., Реев К. С. Метод интегральных уравнений для расчета нестационарных аэродинамических характеристик вращающегося кольцевого лопаточного венца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 9. С. 1367–1378.
9. Ни Р. Анализ периодических возмущений потока в сверхзвуковой решетке // Энерг. машины и установки. 1979. Т. 101. № 3. С. 140–151.