

УДК 532.5.013.4

© 1991 г.

В. П. ВЛАСОВ, С. К. ЖДАНОВ, Б. А. ТРУБНИКОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В работе рассмотрена неустойчивость тангенциальных разрывов со скачком скорости в течении безграничной жидкости. Впервые эта задача была рассмотрена Гельмгольцем (1868 г.) и Кельвином (1871 г.) в линейном приближении; решение линейной задачи приведено в [1].

Нелинейная эволюция этой неустойчивости рассматривалась численно в ряде работ, к примеру в [2], а аналитическая теория в длинноволновом приближении для случая одинаковых жидкостей дана в [3]. Непосредственное сравнение результатов этих работ невозможно, так как данные численного счета даются для уже развитой неустойчивости, а аналитическая теория описывает лишь начало нелинейной эволюции.

В данной работе обобщаются результаты [3] на случай разных жидкостей. В приближении длинноволновых возмущений для потенциальных течений несжимаемых жидкостей получены нелинейные уравнения, описывающие возмущения границы раздела жидкостей с тангенциальным разрывом скорости. Они относятся к квазичаплыгинским (квазигазовым) уравнениям [4] с азимутальным числом $m=1/2$. Показано, что эти уравнения ($m=1/2$) сводятся к двумерному уравнению Лапласа и что квазичаплыгинские среды с противоположными по знаку азимутальными числами $\pm m$ связаны между собой простой связью, что ранее не было замечено в общей теории этих сред [4]. В отличие от предыдущих работ рассмотрены не только периодические возмущения, но и локальные, спонтанное возникновение которых более вероятно. Примером такого спонтанного возникновения этого возмущения служит появление его на конечной стадии неустойчивости Рэлея — Тейлора, как это было отмечено еще Э. Ферми и Дж. фон Нейманом [5].

1. Постановка задачи. Будем считать, что тангенциальный разрыв расположен в плоскости $z=0$, первая жидкость занимает область $z>0$ и во всех обозначениях ей будет соответствовать индекс 1, а вторая жидкость — область $z<0$ и ее индекс — 2. Так, $e_x v_{01}$, $e_x v_{02}$ — скорости первой ($v_{01}>0$) и второй ($v_{02}<0$) жидкостей до возмущения границы между ними, e_x — единичный вектор вдоль оси x , v_1 , v_2 — возмущения скоростей первой и второй жидкостей, $z=a(x, t)$ — возмущение границы раздела жидкостей (вдоль оси y возмущение однородно). Задача решается в системе координат, в которой до возмущения жидкости движутся навстречу друг другу с одинаковыми плотностями импульсов $\rho_1 v_{01} + \rho_2 v_{02} = 0$, ρ_1 , ρ_2 — плотности первой и второй жидкостей. В такой системе координат эволюция возмущения границы раздела жидкостей выглядит наиболее наглядно: так, в линейном приближении возмущение не перемещается вдоль оси x , а меняется только его амплитуда, т. е. нарастающее возмущение описывается формулой [1]

$$a = a_0 e^{ik_1 \tau + ik_2 x}, \quad \tau = v_{01} \theta t < 0, \quad \theta = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

Приведем вывод уравнений для возмущения границы раздела жидкостей с учетом квадратичных поправок $\sim a^2/\lambda^2$ (λ — длина возмущения вдоль оси x). Рассмотрим движение жидкостей вдоль границы раздела, тогда при отсутствии проникновения жидкостей друг в друга для ско-

ростей имеем ($j=1, 2$)

$$v_{jz}|_{z=a} = a'_z + a'_x(v_{0j} + v_{jz})|_{z=0} \quad (1.2)$$

Величину v_{jz} при $z=a$ разложим в ряд Тейлора по координате z вблизи $z=0$ и, учитывая несжимаемость жидкостей ($\text{div } \mathbf{v}_j=0$), получим

$$v_{jz}|_{z=a} = [v_{jz} - a(v_{jx})'_x]|_{z=0} \quad (1.3)$$

В последующих выражениях потребуется выражение, связывающее v_{jx} и v_{jz} в линейном приближении. Оно для возмущений (1.1) в случае несжимаемых жидкостей и потенциальных течений ($\mathbf{v}_j = \nabla \varphi_j$) имеет вид [1]

$$v_{jx} = \mp \frac{\nu k}{|k|} v_{jz} \quad (1.4)$$

знаки « \mp » относятся соответственно к первой и второй жидкости. Для дальнейших выкладок удобно записать (1.4) через оператор Гильберта H [6]

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x')}{x' - x} dx' \quad (1.5)$$

$$He^{\nu kx} = \frac{\nu k}{|k|} e^{\nu kx}, \quad H^2 f = -f, \quad 2H(Hf) = (Hf)^2 - f^2$$

$$v_{1x}|_{z=0} = -Hv_{1z}|_{z=0}, \quad v_{2x}|_{z=0} = Hv_{2z}|_{z=0} \quad (1.6)$$

Это соотношение верно не только для отдельной гармоники k , но и справедливо для любого возмущения, так как оно выражается в виде интеграла Фурье по этим гармоникам.

Условие равенства давлений на границе $z=a$ имеет вид

$$\rho_1 \varphi_{1t}'|_{z=a} + \frac{1}{2} \rho_1 [(v_{01} \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_1)^2 - v_{01}^2]|_{z=a} =$$

$$\rho_2 \varphi_{2t}'|_{z=a} + \frac{1}{2} \rho_2 [(v_{02} \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_2)^2 - v_{02}^2]|_{z=a} \quad (1.7)$$

Разложив члены этого уравнения в ряд Тейлора по координате z около $z=0$ и воспользовавшись соотношениями (1.2), (1.3) и (1.6), продифференцируем полученное выражение по x и затем подействуем на него оператором Гильберта. Далее упростим квадратичные члены, используя линейные соотношения лишь для нарастающей ветви возмущения

$$a'_\tau = -Ha'_x, \quad Ha'_\tau = Ha'_x \quad (1.8)$$

Они получаются, если продифференцировать выражение (1.1) по τ и x , затем на полученные выражения подействовать оператором Гильберта и учесть его свойства (1.5).

Это приводит к уравнению

$$L\beta = -2H\{\varepsilon_1 [P(aa'_x) + a'_x Ha'_x] +$$

$$+ \varepsilon^2 [-PH(aa'_x) + H(a'_x Ha'_x)]\}'$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - H \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + H \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (1.9)$$

$$P = \frac{\partial}{\partial \tau} + H \frac{\partial}{\partial x}, \quad \beta = a + \varepsilon_1 aa'_x - \varepsilon_2 H(aa'_x)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}$$

Учитывая соотношения (1.8) оператор $L\beta$ для нарастающих возмущений можно переписать в виде

$$L\beta = -2H(\beta_\tau' + H\beta_x')_x' + O\left(\frac{a^3}{\lambda^3}\right) \quad (1.10)$$

Это позволяет свести уравнение (1.9) к виду

$$a_\tau' + Ha_x' = \varepsilon_1(a_x'Ha_x') + \varepsilon_2H(a_x'Ha_x') \quad (1.11)$$

из которого для величины $b = \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 Ha$ далее получается уравнение

$$b_\tau' + Hb_x' = b_x'Hb_x' \quad (1.12)$$

Введем теперь новую скорость $v = -Hb_x'$ и безразмерную «эффективную плотность» $\rho = 1 - b_x'$. Тогда для этих величин из (1.12) получаются следующие уравнения:

$$\rho_\tau' + (\rho v)_x' = 0, \quad v_\tau' + vv_x' = \rho\rho_x' \quad (1.13)$$

Первое из этих уравнений получается из (1.12) дифференцированием его по координате x , а второе уравнение получается из (1.12) после действия на него оператора Гильберта и последующего дифференцирования по координате x . При этом в обоих выводах следует использовать тождество

$$2H(fHf) = (Hf)^2 - f^2$$

При $\theta = 1$ из этих уравнений получаются уравнения работы [3]. Для случая одинаковых жидкостей из линейного приближения следует, что переменная v соответствует средней касательной скорости течений, а ρ — полуразности касательных компонент скорости, нормированных на невозмущенную скорость.

Уравнения (1.13), как отмечалось в [3], относятся к квазичаплыгинским (квазигазовым) уравнениям, имеющим вид [4]

$$\begin{aligned} \rho_\tau' + (\rho v)_x' &= 0 \\ v_\tau' + vv_x' &= c_0^2 m(\rho^{1/m})_x', \quad c_0^2 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Они описывают широкий класс нелинейных неустойчивых сред (более 50), которые будем называть квазичаплыгинскими (квазигазовыми) средами. Общая теория этих сред дана в [4].

Общий метод решения уравнений (1.14) состоит в переходе от прямых зависимостей $\rho(x, \tau)$, $v(x, \tau)$ к обратным $x(\rho, v)$, $\tau(\rho, v)$ и его называют преобразованием годографа. В [4] для квазичаплыгинских сред с $m = 1/2$ не было замечено, что можно ввести аналитическую функцию $F(Z)$ от комплексного аргумента $Z = \rho + iv$, которая определяет вид возмущения и через которую легко получать параметрические соотношения между ρ , v , a , x , τ . Покажем, как возникает эта функция F . Для обратных зависимостей $x(\rho, v)$, $\tau(\rho, v)$ из уравнений (1.13) получаем соотношения $x_v' = v\tau_v' - \rho\tau_\rho'$, $x_\rho' = \tau\rho_v' + v\tau_\rho'$, которые, вводя функции $\Phi = \tau\rho$ и $\Psi = -x - v\tau$, переписываются в виде $\Psi_\rho' = \Phi_v'$, $\Psi_v' = -\Phi_\rho'$. Эти соотношения есть условия Коши — Римана для функции $F = \Phi - i\Psi$, которая, следовательно, является решением двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta_{\rho, v} F = 0, \quad \Delta_{\rho, v} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad (1.15)$$

Далее получим выражение для возмущения границы раздела жидко-

стей $a = \varepsilon_1 b - \varepsilon_2 H b$ через функцию F . Для этого выразим $a_{\rho'}$ и $a_{v'}$ через a_x' , a_x' и затем, используя уравнение (1.12) и определения $\rho = 1 - b_x'$, $v = -H b_x'$, получим уравнение

$$\Delta_{\rho, v}(a - S) = 0 \quad (1.16)$$

$$S = \Psi[\varepsilon_1(1 - \rho) + \varepsilon_2 v] + \frac{\Phi}{2\rho}[2\varepsilon_1 v + \varepsilon_2(v^2 + \rho^2 - 1)]$$

Следовательно

$$a = S + \operatorname{Re} A, \quad A_z' = \alpha F, \quad \alpha = -\varepsilon_2 + i\varepsilon_1 = \operatorname{const} \quad (1.17)$$

Выбирая разные потенциалы $F(Z)$, получим разные виды возмущений. Единственное условие на выбор F состоит в том, чтобы при $\tau \rightarrow -\infty$ в системе отсутствовали возмущения, что соответствует «эволюционному принципу» [4], позволяющему отобрать «спонтанные решения». Отметим, что изменение потенциала вида $F \rightarrow cF$, где c — действительная константа, приводит к следующим преобразованиям: $\tau \rightarrow c\tau$, $x \rightarrow cx$, $a \rightarrow ca$.

2. Примеры возмущений границы раздела жидкостей. Рассмотрим вначале периодические возмущения границы. Они описываются, к примеру, потенциалами вида $F_1 = \ln(Z - 1)$, $F_2 = \ln[(Z - 1)/(Z + 1)]$, последний из них рассмотрен в [3] для случая одинаковых жидкостей. Оба потенциала дают качественно похожие результаты, поэтому подробно рассмотрим только потенциал F_1 . Возмущение границы, описываемое этим потенциалом, в линейном приближении имеет вид $a = e^x(\varepsilon_1 \sin x - \varepsilon_2 \cos x)$. Заметим, что $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 1$ и поэтому изменение отношения $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ приводит лишь к сдвигу волны. Из нелинейной теории получается следующее параметрическое выражение для границы раздела:

$$a = \varepsilon_1 v[1 - \tau(\rho - 1)] + \varepsilon_2\{(\rho - 1) + 0,5\tau[v^2 - (\rho - 1)^2]\} \quad (2.1)$$

Момент времени $\tau_* = -1$ является критическим, так как для той точки, где $v = 0$, в этот момент времени имеем $\rho = 0$ и поэтому далее полученными формулами пользоваться нельзя. На фиг. 1 приведен график $a(x, \tau)$, построенный по формуле (2.1) для $\tau = -1$ с использованием выражений $\tau = \Phi/\rho$, $x = \Psi - v\tau$. На этом и последующих графиках легкая жидкость находится сверху и течет слева направо, а тяжелая жидкость находится внизу и течет справа налево; сплошные кривые относятся к линейным приближениям, а штрихпунктирные и пунктирные кривые построены по нелинейной теории для соответственно случаев одинаковых и разных жидкостей.

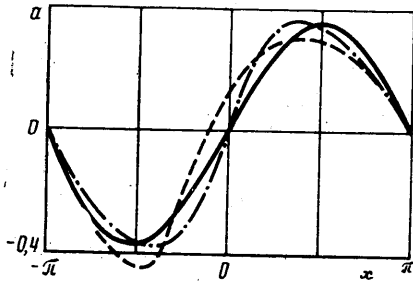
На фиг. 1 отображены основные особенности в развитии возмущения границы раздела. Имеет место сдвиг вершук в направлениях против течений жидкостей. Этот сдвиг, возможно, является зарождением вихрей, но для исследования дальнейшей эволюции в области $a \gg \lambda$ используемые уравнения неприменимы [3]. Случай разных жидкостей, на фиг. 1 $\rho_1/\rho_2 = 0,1$, отличается от случая одинаковых жидкостей тем, что точка $a = 0$ смещается по течению тяжелой жидкости.

Рассмотрим пример локального возмущения границы раздела жидкостей — возмущение в виде «ступеньки». Оно описывается потенциалом $F_3 = \sqrt{|\alpha(Z - 1)|}$ и в линейном приближении при любом соотношении плотностей имеет вид $a = -\operatorname{arctg}(x/\tau)$. Нелинейная теория приводит к параметрическим формулам.

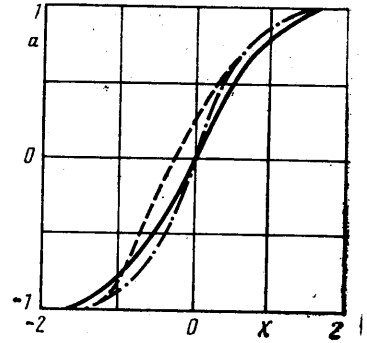
Не выписывая общей формулы, приведем два предельных случая, в которых профиль $a(x, \tau)$ можно описать явными зависимостями.

В случае одинаковых жидкостей получаем

$$\rho = \frac{1 + \xi}{2}, \quad v = \frac{x}{2\tau} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$a = -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\tau \xi} \right) - \frac{x(\xi-1)^2}{4\xi} \quad (2.2)$$

$$2\xi^2 = 1 + \frac{4}{\tau} - \frac{x^2}{\tau^2} + \left[4 \frac{x^2}{\tau^2} + \left(\frac{x^2}{\tau^2} - 1 - \frac{4}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

Здесь в момент $\tau_* = -4$ на профиле границы зарождается разрыв и длинноволновое приближение нарушается.

В другом предельном случае $\rho_1 \ll \rho_2$ получаем

$$\rho = \frac{1+\xi}{2}, \quad v = -\frac{2 \sin^2 \varphi}{\tau(1+\xi)}, \quad \sin 2\varphi = \frac{\tau(1-\xi^2)}{2} \quad (2.4)$$

$$a = \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{2 \sin^2 \varphi \cos 2\varphi}{\tau(1+\xi)^2}$$

$$2\xi^2 = 1 - \frac{x^2}{\tau^2} + \left[\left(1 - \frac{x^2}{\tau^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{x+2}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2}$$

В этом случае $\tau_* = -2$. На фиг. 2 представлены для $\tau = \tau_*$ соответствующие профили $a(X)$, где $X = x/|\tau|$. Основное их отличие сводится к тому, что при одинаковых плотностях точка, отвечающая $a=0$, неподвижна, а при $\rho_1 \neq \rho_2$ она смещается в направлении потока более плотной жидкости.

Рассмотрим другой пример локального возмущения границы раздела жидкостей — возмущение в виде «горбик+ямка». Для его описания рассмотрим три примера потенциалов вида

$$F_4 = \frac{\exp i(\varphi_0/2 - \pi/4)}{\sqrt{Z-1}}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

$$F_5 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1+Z}{1-Z}} + \sqrt{\frac{1-Z}{1+Z}} \right), \quad (2.5)$$

$$F_6 = -\frac{(1+i/\alpha)}{2\sqrt{1+\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$$

Они имеют особенности одинакового типа и приводят к возмущениям, линейное приближение которых имеет вид $a(x, \tau) = -x/(x^2 + \tau^2)$. Различие потенциалов сказывается на значениях τ_* . Для случая одинаковых жидкостей соответственно имеем: $\tau_{*4} = -(3/8)\sqrt{6}$, $\tau_{*5} = -(2/9)\sqrt{6}$, $\tau_{*6} =$

$=-(4/9)\sqrt{6}$. Отметим, что преобразованием $F \rightarrow cF$ можно было бы во всех примерах сделать критические времена τ_* одинаковыми.

Потенциал F_4 является самым простым, а потенциал F_5 интересен тем, что описывает решение ρ, ν , названное в общей теории квазичаплыгинских сред [7] «элементарным», так как оно выражается в виде степенных функций.

Рассмотрим подробнее возмущение, описываемое потенциалом F_4 . Для него, вводя $Z=1+Re^{i\varphi}$, получим параметрические соотношения

$$\begin{aligned} \rho &= 1+R \cos \varphi, & \nu &= R \sin \varphi \\ \Phi &= \tau\rho = \frac{\cos \chi}{\sqrt{R}}, & \Psi &= x - \nu\tau = -\frac{\sin \chi}{\sqrt{R}} \\ a &= \sqrt{R} \sin \chi - \frac{R^{3/2}}{2\rho} \cos \chi \cos (2\varphi - \varphi_0), & \chi &= \frac{\varphi_0 - \varphi - \pi/2}{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поведение экстремумов профиля $a(x, \tau)$ в случае одинаковых жидкостей ($\varphi_0 = \pi/2$) описывается формулами

$$x_e = \pm \frac{1+2\tau^2}{2\tau}, \quad \nu_e = \pm \frac{1}{2\tau^2}, \quad a_e = \mp \frac{1}{2\tau} \quad (2.7)$$

В критический момент времени происходит зарождение разрыва. В случае $\varphi_0 \neq \pi/2$ ситуация более сложная и профиль не симметричен. В предельном случае $\rho_1 \ll \rho_2$ эволюция максимума и минимума профиля определяется из соотношений

$$\begin{aligned} v &= 0, & \rho &= 1+R, & \tau\rho &= -\frac{1}{\sqrt{2R}} \\ x_{\max} &= -\frac{1}{\sqrt{2R}}, & a_{\max} &= \sqrt{\frac{R}{8}} \frac{R+2}{R+1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$v = 0, \quad \rho = 1-R, \quad \tau\rho = -\frac{1}{\sqrt{2R}}$$

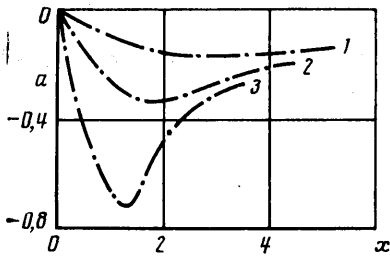
$$x_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2R}}, \quad a_{\min} = -\sqrt{\frac{R}{8}} \frac{2-3R}{1-R} \quad (2.9)$$

В этом случае $\tau_* = -(3/2)^{1/2}$.

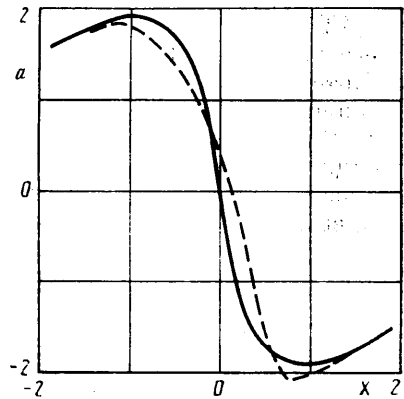
Профили $a(x, \tau)$ для случая одинаковых жидкостей показаны на фиг. 3. Кривые 1, 2, 3 на этом рисунке построены соответственно для следующих моментов времени: $\tau = -5$, -2 и $\tau = \tau_* = -(3/8)\sqrt{6}$.

Потенциалы F_4, F_5, F_6 описывают возмущения, которые качественно похожи. На фиг. 4 представлен профиль $a(X)$, описываемый потенциалом F_6 . Этот профиль приведен для случая разных жидкостей ($\rho_1/\rho_2 = 0,01$) в момент $\tau = 0,98\tau_*$ ($\tau_* = -1,92$). Случай разных жидкостей отличается от случая одинаковых жидкостей тем, что точка, в которой $a=0$, смещается по направлению течения легкой жидкости.

Сделаем замечание о связи между квазичаплыгинскими решениями с $m > 0$ и $m < 0$. В общей теории квазичаплыгинских сред [4] показано, что уравнения (1.14) для случая $m = -1/2$ (среды типа «газ Чаплыгина») сводятся к двумерному уравнению Лапласа, и не было замечено, что это верно и для сред с $m = 1/2$, как показано в данной работе. Это есть проявление общей связи между квазичаплыгинскими средами с противоположными по знаку азимутальными числами $\pm m$, не отмеченной ранее в [4]. Основное уравнение этих сред — уравнение Дарбу, оно получается из



Фиг. 3



Фиг. 4

уравнений (1.14) при переходе к зависимостям $\tau(v, \rho)$, $x(v, \rho)$

$$\tau_{rr}'' + \frac{1+2m}{r} \tau_r' + \tau_{uu}'' = 0 \quad (2.10)$$

Здесь τ — время, а величины r и u связаны с ρ и v , входящими в уравнение (1.14), соотношениями $r = \rho^{1/2m}$, $u = -v/2mc_0$ [4]. Введем потенциал $\Phi = \tau r^{2m}$ и для него из (2.10) получим уравнение

$$\Phi_{rr}'' + \frac{1-2m}{r} \Phi_r' + \Phi_{uu}'' = 0 \quad (2.11)$$

из которого следует, что решения с азимутальным числом $-m$ получаются из решений с азимутальным числом $+m$ при замене $\tau \rightarrow \Phi$. Отметим, что рассматриваемые среды с $m = -1/2$ и $1/2$ являются выделенными в том смысле, что уравнения (2.10) и (2.11) сводятся для них к легко решаемым двумерным уравнениям Лапласа

$$\tau_{rr}'' + \tau_{uu}'' = 0, \quad \Phi_{rr}'' + \Phi_{uu}'' = 0$$

Указанная связь решений дополняет общую теорию квазишэпльгинских сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Patnaik P. C., Sherman F. S., Corcos G. M. A numerical simulation of Kelvin-Helmholtz waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. Pt 2. P. 215–240.
3. Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовое приближение в задачах о бунчировке электронного пучка в плазме и о тангенциальном разрыве в гидродинамике // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1988. Т. 94. № 8. С. 104–118.
4. Troubnikov V. A., Zhdanov S. K. Unstable quasi-gaseous media // Phys. Rep. 1987. V. 155. № 3. P. 137–230.
5. Ферми Э. Научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 712 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М. Наука. ГРФМЛ. 1972. Т. 2. 327 с.
7. Troubnikov V. A., Zhdanov S. K. Quasi-Chaplygin media // Proc. Int. workshop on plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics. Kiev, USSR. 13–25. apr. 1987. Book of selected papers. V. 1. Singapor: World Scientific, 1987. P. 329–358.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1990