

УДК 532.546

© 1991 г.

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ, В. В. МАТВЕЕВ

ФИЛЬТРАЦИЯ В ПОЧВОГРУНТАХ, ПОДСТИЛАЕМЫХ СИЛЬНОПРОНИЦАЕМОМ НАПОРНЫМ ГОРИЗОНТОМ

Впервые на необходимость введения зон выхода капиллярных вод на поверхность земли было указано в [1], где исследовано влияние капиллярности грунта при фильтрации из канала малого, близкого к полукругу поперечного сечения (оросителя бороздового типа). В дальнейшем были выделены участки выхода с испарением, инфильтрацией, а также участки капиллярного тока и для эффективного решения задач предложены новые аналитические функции $\chi = \omega - i\varepsilon z$ и $dz/d\chi$, что позволило существенно расширить класс практически важных задач, связанных с работой каналов, дренажных коллекторов и т. п. [2]. Тем самым в [1, 2] была создана теория фильтрации в капиллярных грунтах при любых видах внешних границ области течения.

В [3] соображения, развитые в [1, 2], были использованы для изучения влияния капиллярности грунта при фильтрации из каналов с малой глубиной воды и оросителей в почвенном слое, подстилаемом сильнопроницаемым напорным горизонтом. В настоящей статье исследуются особенности фильтрационного течения грунтовых вод из системы каналов и оросителей во взаимодействии с подземными водами при наличии таких факторов, как капиллярность почвы и испарение со свободной поверхности, и оценивается их совместное влияние на структуру течения. По результатам вычислений, проведенных на ЭВМ, анализируется характер зависимости фильтрационного расхода, а также капиллярного растекания воды от очертания и ширины русла источников питания и расстояния между ними, величины подпора, а также мощности слоя.

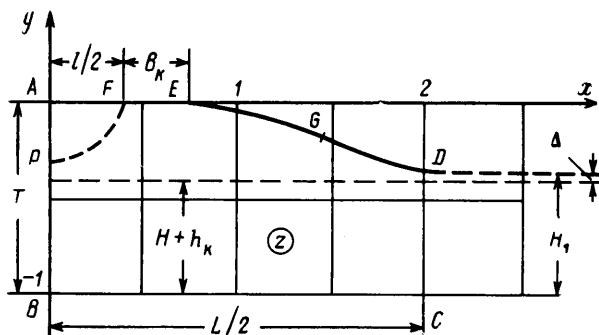
1. Постановка задачи. На фиг. 1 схематично изображен один из фрагментов плоского безнапорного течения грунтовых вод из системы равноудаленных каналов одинаковой ширины l (с малой глубиной воды) через почвенный слой мощности T в нижележащий сильнопроницаемый напорный горизонт при равномерном испарении интенсивности ε между каналами. Для построения решения введем $\omega = \varphi + i\psi$ и $z = x + iy$ — комплексный потенциал и комплексную координату, отнесенные соответственно к kT и T (k — коэффициент фильтрации почвенного слоя).

Примем $\varphi = 0$ вдоль дна канала AF и $\psi = 0$ вдоль линии симметрии AB . На участке FE положим $\psi = Q/2$, где Q — искомый фильтрационный расход из канала, приходящийся на единицу его длины. Таким образом, согласно [1, 2], участок FE считается непроницаемой линией выхода капиллярных вод на поверхность земли. Тогда на свободной поверхности должны выполняться условия

$$\varphi = -y + h_k, \quad \psi = \frac{1}{2}Q - \varepsilon(x - \frac{1}{2}l - B_k)$$

где h_k — статическая высота капиллярного поднятия грунтовой воды, B_k — искомая ширина капиллярного растекания воды. На кровле напорного горизонта BC примем $\varphi = T - H$.

2. Построение решения. В отличие от [2], где для решения предлагается использовать упомянутые выше функции χ и $dz/d\chi$, здесь применяется метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной, основанный на аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [4]. Вводятся



Фиг. 1

вспомогательная переменная ξ и функции: $\omega(\xi)$ и $z(\xi)$ — конформно отображающие верхнюю полуплоскость ξ на область ω и z (соответствие точек указано на фиг. 2), комплексная скорость $w=d\omega/dz$, а также функции

$$F(\xi) = \frac{d\omega}{d\xi}, \quad Z(\xi) = \frac{dz}{d\xi}$$

Обратимся к области комплексной скорости плоскости w , изображенной на фиг. 3. Эта область представляет собой круговой четырехугольник $DGFE$ с углом $\nu = \arctg \sqrt{\epsilon}$ при вершине E , для которого характерно наличие кругового разреза. Отметим, что возможен горизонтальный разрез, показанный на фиг. 3 штриховой линией.

Задача о конформном отображении верхней полуплоскости на круговой четырехугольник тесно связана с некоторым линейным дифференциальным уравнением второго порядка класса Фукса с четырьмя особыми точками, при интегрировании которого возникают трудности принципиального характера [4, 5]. Дело в том, что коэффициенты упомянутого уравнения кроме неопределенного аффикса одной из вершин четырехугольника содержат еще и неизвестный акцессорный параметр; связь этих постоянных с геометрическими характеристиками заданного четырехугольника заранее неизвестна, что сильно усложняет задачу их нахождения. В последнее время благодаря работам [6–8], основанным на применении задачи линейного сопряжения при решении уравнений класса Фукса, получен ряд интересных результатов, которые вносят существенный вклад в разработку как общих методов решения фуксовых уравнений, так и конформных отображений круговых многоугольников. Ниже предлагается более простой путь решения рассматриваемой задачи, учитывающий ее специфические особенности.

В рассматриваемом случае уравнение Фукса принимает вид

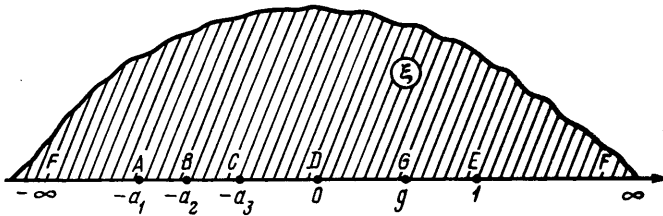
$$v'' + \left(\frac{1}{2\xi} + \frac{1-\nu}{\xi-1} - \frac{1}{\xi-g} \right) v' + \frac{\nu(1+\nu)\xi-\lambda}{4\xi(\xi-1)(\xi-g)} v = 0 \quad (2.1)$$

где g и λ — аффикс вершины разреза G и акцессорный параметр, которые при постановке задачи остаются неопределенными.

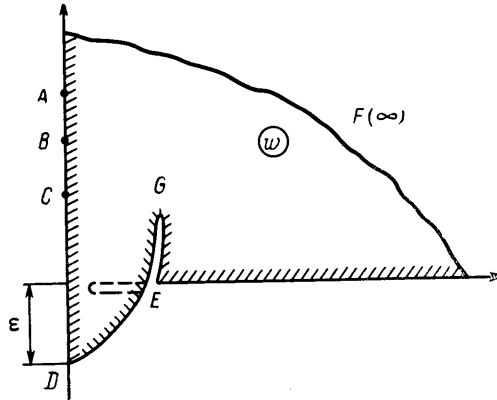
Будем искать решения уравнения (2.1) в виде

$$v_1 = (C_1 \operatorname{ch} t \operatorname{ch} \nu t + C_2 \operatorname{sh} t \operatorname{sh} \nu t) \operatorname{ch}^{-(1+\nu)} t, \quad v_2 = (C_1 \operatorname{ch} t \times \\ \times \operatorname{sh} \nu t + C_2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} \nu t) \operatorname{ch}^{-(1+\nu)} t \quad (2.2)$$

где $t = \operatorname{arth} \sqrt{\xi}$ (область изменения переменной t представляет собой полуполосу $\operatorname{Re} t > 0$, $0 < \operatorname{Im} t < \pi/2$), C_1 и C_2 — некоторые, не обращающиеся одновременно в нуль постоянные, подлежащие определению.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если (2.2) подставить в уравнение (2.1), то в обоих случаях придем к одной и той же однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$[v(v-1)g-\lambda]C_1+2vgC_2=0, \quad 2vC_1+[(v^2-v-2)g+2-\lambda]C_2=0 \quad (2.3)$$

Для того чтобы постоянные C_1 и C_2 были отличны от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (2.3) был равен нулю, что дает соотношение

$$\lambda^2+2\lambda[1+g(v^2-v-1)]+gv(1+v)[g(1-v)(2-v)-2]=0 \quad (2.4)$$

Полагая $C=C_2/C_1$, получим

$$C = \frac{\lambda+gv(1-v)}{2gv} = -\frac{2v}{2-\lambda+g(v^2-v-2)} \quad (2.5)$$

$$g = \frac{C+v}{C(1+vC)}, \quad \lambda = \frac{v(C+v)(2C+v-1)}{(1+vC)C} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) — это уравнение гиперболы (2.4) в параметрическом виде. На плоскости (g, λ) гипербола, как можно убедиться, проходит через точки $(0, 0)$ и $(0, 2)$ и имеет асимптоты $\lambda=-v(1-v)g+2v^2$ и $\lambda=-(2+v-v^2)g+2(1-v^2)$.

Функция, дающая конформное отображение полуплоскости плоскости t на заданный круговой четырехугольник плоскости w , должна выражаться через линейные комбинации решений v_1 и v_2 . Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек D, E и F на плоскостях t и w , то получим [9]

$$w = -\sqrt{\varepsilon} i \frac{\sqrt{\varepsilon} [\alpha \operatorname{ch}(1+v)t + \beta \operatorname{ch}(1-v)t] + i [\alpha \operatorname{sh}(1+v)t - \beta \operatorname{sh}(1-v)t]}{[\alpha \operatorname{ch}(1+v)t + \beta \operatorname{ch}(1-v)t] - i \sqrt{\varepsilon} [\alpha \operatorname{sh}(1+v)t - \beta \operatorname{sh}(1-v)t]} \quad (2.7)$$

$$\alpha = \cos(1-\nu)r, \quad \beta = \cos(1+\nu)r$$

где r — некоторая вещественная постоянная, связанная с постоянной C , которая регламентирует положение вершины разреза.

Учитывая (2.2) и (2.7), а также поведение функций F и Z в окрестностях особых точек, найдем параметрическое решение задачи в следующем виде ($a_i' = 1/(1+a_i)$, $i=1, 2, 3$):

$$\frac{d\omega}{dt} = C_1 i \frac{\sqrt{\varepsilon} [\alpha \operatorname{ch}(1+\nu)t + \beta \operatorname{ch}(1-\nu)t] + i [\alpha \operatorname{sh}(1+\nu)t - \beta \operatorname{sh}(1-\nu)t]}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 t - a_1')(\operatorname{ch}^2 t - a_2')(\operatorname{ch}^2 t - a_3')}} \quad (2.8)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{[\alpha \operatorname{ch}(1+\nu)t + \beta \operatorname{ch}(1-\nu)t] - i \sqrt{\varepsilon} [\alpha \operatorname{sh}(1+\nu)t - \beta \operatorname{sh}(1-\nu)t]}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 t - a_1')(\operatorname{ch}^2 t - a_2')(\operatorname{ch}^2 t - a_3')}} \quad (2.8)$$

3. Расчет схемы течения. Выражения (2.8) содержат пять неизвестных постоянных a_1', a_2', a_3', r и $C_1 > 0$, определяющих мощность слоя T , ширину канала l и расстояние между каналами L , величину подпора H , а также высоту вакуума, обусловленного капиллярными силами в грунте h_k . Аналогично тому как это сделано в [3], представления (2.8), интегрируемые для различных участков границы области t , приводят к параметрическим уравнениям соответствующих участков схемы. Численным путем проверяется монотонность функций, входящих в эти уравнения, и таким образом устанавливается однозначная разрешимость системы относительно неизвестных постоянных.

После нахождения искомым постоянных определению подлежат расход Q и величина капиллярного растекания воды B_k , x, y — координаты точек кривой депрессии

$$Q = 2C_1 \int_0^{\pi/2} \frac{[\alpha \sin(1+\nu)\tau - \beta \sin(1-\nu)\tau] - \sqrt{\varepsilon} [\alpha \cos(1+\nu)\tau + \beta \cos(1-\nu)\tau]}{\sqrt{(a_2' - a_1' \cos^2 t)(a_3' - a_1' \cos^2 t)(1 - a_1' \cos^2 t)}} dt \quad (3.1)$$

$$B_k = \frac{4C_1 \sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 \frac{\alpha \tau^{\kappa\delta} (1-\tau^{\mu\delta}) + \beta \tau^\delta (1-\tau^{\kappa\delta})}{\sqrt{\Delta_1' \Delta_2' \Delta_3'}} d\tau \quad (3.2)$$

$$\Delta_1' = 1 + (4a_1' - 2)\tau^\delta + \tau^{2\delta}, \quad \kappa = \frac{2(1-\nu)}{\nu}, \quad \delta = \frac{2}{\nu}$$

$$\mu = \frac{2(1+\nu)}{\nu}, \quad \tau = \arccos(\sqrt{a_1'} \cos t)$$

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4C_1}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \int_\tau^1 \frac{\alpha \tau^{\kappa\delta} (1+\tau^{\mu\delta}) + \beta \tau^\delta (1+\tau^{\kappa\delta})}{\sqrt{\Delta_1'' \Delta_2'' \Delta_3''}} d\tau \quad (3.3)$$

$$y = -T + H_1 + \frac{4C_1}{\nu} \int_\tau^1 \frac{\alpha \tau^{\kappa\delta} (1-\tau^{\mu\delta}) - \beta \tau^\delta (1-\tau^{\kappa\delta})}{\sqrt{\Delta_1'' \Delta_2'' \Delta_3''}} d\tau \quad (3.4)$$

$$\Delta_1'' = 1 + (2 - 4a_1')\tau^\delta + \tau^{2\delta}, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

а также величина $\Delta = H_1 - H - h_k$ отклонения поверхности грунтовых вод посередине между каналами от их естественного уровня, которая характеризует степень подтопления за счет фильтрации из канала. На фиг. 1 изображена кривая депрессии, рассчитанная при $\varepsilon = 0,01$; $T = 1,0$; $h_k = 0,5$; $l = 0,8$; $H = 0,1$ и $L = 4,0$.

Отметим некоторые частные случаи. При $h_k=0$ имеем случай, впервые изученный в [10] с помощью применения функции Н. Е. Жуковского. При $\varepsilon=0$, $a_3'=1$ ($a_3=0$) имеем схему одиночного канала, исследованную ранее в [3] с помощью комбинирования метода П. Я. Полубариновой-Кочкиной и третьего способа годографа скорости [11].

В случае системы оросителей бороздового типа сначала заменим ороситель точечным источником, расположенным в точке A (фиг. 1). Далее, примем одну из линий равных напоров FP , показанную на фиг. 1 штриховой линией, за полукруглое поперечное сечение русла оросителя с диаметром l и положим на этой линии $\varphi=0$. Область комплексной скорости имеет тот же вид, что и в разд. 2.

Решение задачи для источника получается из решения для канала (2.8) при $a_1'=0$ ($a_1=\infty$), т. е. когда точки A и F сливаются. Выражение для радиуса оросителя и величины капиллярного растекания воды принимают вид

$$\frac{l}{2} = \frac{C_1 \sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\lambda_0} \frac{\alpha \operatorname{sh}(1+\nu)\tau + \beta \operatorname{sh}(1-\nu)\tau}{\operatorname{sh} \tau \sqrt{(\operatorname{sh}^2 \tau + a_2')(\operatorname{sh}^2 \tau + a_3')}} d\tau$$

$$B_0 = B_k|_{a_1'=0} - \frac{1}{2}l$$

где λ_0 — абсцисса точки F в плоскости t , также подлежащая определению.

4. Обсуждение численных результатов. Анализ влияния формы поперечного сечения русла источника питания показал, что, так же как и при $\varepsilon=0$ [3], в случае оросителя капиллярное растекание и расход больше, чем для канала. Остаются в силе также все сделанные ранее при исследовании случая $\varepsilon=0$ и другие заключения о качественном сопоставлении результатов для каналов и оросителей. Поэтому в табл. 1–5 приведены результаты расчетов фильтрационных характеристик B_k , Q и Δ только для каналов. В каждой таблице варьируется один из параметров ε , h_k , l , L , H , а остальные фиксируются при значениях $\varepsilon=0,01$; $h_k=0,5$; $l=0,8$; $L=4,0$; $H=0,1$ и $T=1,0$. Анализ зависимости искомых характеристик от указанных параметров сводится к следующему.

Изменение интенсивности испарения весьма слабо отражается на величине фильтрационных характеристик. Так, при увеличении ε в 100 раз величины B_k и Q изменяются соответственно в 0,91 и 1,1 раза, т. е. практически не меняются. При возрастании ε капиллярное растекание воды уменьшается, расход при этом увеличивается. При $\varepsilon \geq H$ величина Δ изменяет знак, т. е. становится меньше нуля.

Подобное поведение кривой депрессии обнаруживается и при малых ($<0,3$) и больших ($>0,6$) значениях h_k . Так же как и в случае $\varepsilon=0$, при $h_k \approx 0$ и $h_k \approx T-H$ радиус капиллярного растекания воды превышает высоту капиллярного поднятия h_k , так что подтверждается впервые отмеченное в [1] существенное значение горизонтального всасывания воды (в том числе и для слабокапиллярных грунтов).

Первостепенную роль в определении степени подтопления играют как подпор H со стороны нижележащего горизонта, так и расстояние между каналами L . Из табл. 4, 5 видно, что величина Δ , которая служит мерой подтопления, убывает как с ослаблением подпора снизу, так и с разрежением каналов и это приводит к сокращению зоны подтопления. В то же время при расстояниях между каналами, превышающих мощность почвенного слоя в 4 и более раз, и при малом подпоре величина Δ с точностью до 10^{-2} равна нулю, т. е. влияние каналов на уровень грунтовых вод посредине между каналами практически не проявляется.

Из второго раздела табл. 4 следует, что, начиная со значения $L=4,8$,

Таблица 1

ε	B_k	Q	Δ
0,001	0,3366	0,7312	0,0396
0,005	0,3364	0,7317	0,0363
0,01	0,3347	0,7324	0,0329
0,05	0,3218	0,7380	0,0066
0,1	0,3076	0,7450	0,0001

Таблица 2

h_k	B_k	Q	Δ
0,1	0,1032	0,5978	0,0003
0,4	0,2320	0,7126	0,0147
0,6	0,4815	0,7432	0,0532
0,7	0,7157	0,7476	0,0715
0,78	1,0816	0,7481	0,0827

Таблица 3

l	B_k	Q	10Δ
0,3	0,2983	0,4796	0,111
0,5	0,3209	0,5872	0,187
1,0	0,3389	0,8250	0,456
1,5	0,3453	1,0506	0,944
2,0	0,3583	1,2690	1,833

Таблица 4

L	B_k	Q	10Δ
2,2	0,4397	0,6940	3,528
3,0	0,3430	0,7274	1,371
4,0	0,3347	0,7324	0,329
4,8	0,3342	0,7328	0,074
5,5	0,3341	0,7329	0,001

Таблица 5

H	B_k	Q	10Δ
0,01	0,2909	0,7940	0,212
0,05	0,3082	0,7672	0,265
0,2	0,4129	0,6590	0,437
0,3	0,5554	0,5810	0,501
0,4	0,8912	0,4991	0,512

значения B_k и Q практически не изменяются; при этом $\Delta \rightarrow 0$, что отражает близость рассматриваемого случая к схеме одиночного канала. Косвенным подтверждением сказанного служит еще и то обстоятельство, что в этом случае параметр a_3' с точностью до 10^{-4} равен единице.

Авторы благодарят П. Я. Кочину и Н. Н. Веригина за полезные советы и замечания, способствовавшие значительному улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веригин Н. Н.* Фильтрация воды из оросителя ирригационной системы // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 4. С. 589–592.
2. *Веригин Н. Н.* Некоторые случаи подъема грунтовых вод при общей и местной усиленной инфильтрации // Инж. сб. 1950. Т. 7. С. 21–34.
3. *Береславский Э. Н., Матвеев В. В.* Фильтрация из каналов малой глубины и оросителей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 96–102.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
5. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
6. *Цицкишвили А. Р.* О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 4. С. 563–566.
7. *Чибрикова Л. И.* О применении краевой задачи Римана при построении интегральных представлений некоторых решений уравнений класса Фукса // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Вып. 5. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1983. С. 160–172.
8. *Чибрикова Л. И.* Применение кусочно-голоморфных функций при построении интегральных представлений некоторых спецфункций // Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа, Тбилиси, 23–25 апр. 1985. Тбилиси, 1985. Т. 1. Вып. 1. С. 217–220.
9. *Береславский Э. Н.* Об одном случае конформного отображения круговых четырехугольников посредством элементарных функций // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37. № 3. С. 356–357.
10. *Эмих В. Н.* О режиме грунтовых вод в орошаемом почвенном слое с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 168–174.
11. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
1.VI.1989