

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1991**

УДК 532.546

© 1991 г.

Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ, А. Р. КАСИМОВ

**ОЦЕНКИ УРОВНЕЙ ПОДПОРА И ОСУШЕНИЯ
ПО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Определяется форма гидромелиоративного сооружения из условия экстремума величины подпора или водонапряжения при изопериметрических ограничениях. Исключенные функционалы и уравнения экстремалей выписываются в явном виде на основе метода множителей Лагранжа.

Фильтрационные потоки в районе гидромелиоративных сооружений могут оказывать как негативное воздействие на прилегающие территории (подтопление, заболачивание, засоление вблизи крупных каналов и водохранилищ), так и улучшать водный режим почв (регулирование норм осушения дренажем). С практической точки зрения важно уметь находить искажения естественного уровня грунтовых вод, вносимые такими сооружениями, а также определять влияние возникающих течений на искусственные (фундаменты, противофильтрационные завесы) и естественные (ложбины, склоны) объекты. При известных гидрогеологических условиях, режимах изменения напоров, взаиморасположения областей питания и разгрузки названные вопросы решаются в рамках либо гидравлической [1], либо гидродинамической [2] моделей течения.

В настоящей работе на основе гидродинамической модели находятся оценки повышения уровня грунтовых вод, вызванного фильтрацией из канала, его понижения дренажом и сил фильтрационного давления на фундамент вблизи водохранилища. Существенным моментом при этом является то, что упомянутые оценки строятся путем решения задач конструктивного типа, т. е. задач, в которых очертание сооружения (питающий, водопримывающий или подпираемый потоком контур) заранее не задается, а отыскивается как экстремаль изопериметрической задачи.

1. Оценка подтопления. Рассмотрим фильтрацию с расходом $2q$ из русла BC с площадью живого сечения S в напорный горизонт AD с естественным уровнем грунтовых вод на высоте p_0 над его кровлей и действующим напором H (фиг. 1). Фильтрация предполагается плоской, установившейся, подчиняющейся закону Дарси; грунт — однородным, изотропным; все характеристики течения отнесены к величине коэффициента фильтрации. В [2] введено понятие зоны влияния канала как такой его окрестности R , в которой свободные поверхности AB и CD превышают естественный уровень грунтовых вод на величину, большую заданного малого значения δ . Сформулируем оптимизационную задачу.

Задача A. При заданных величинах q , S , p_0 , H , δ определить такую форму экивотенциали BC , чтобы ширина R была экстремальна.

В [3] получены параметрические уравнения контура BC

$$x = -\frac{q}{K} F(\arcsin \xi, \lambda) + \frac{p_0}{\pi} \ln \frac{1-\lambda\xi}{1+\lambda\xi} + \Omega(\xi), \quad y=y[\psi(\xi)], \quad |\xi| \leq 1 \quad (1.1)$$

и депрессионных кривых AB и CD

$$x = \mp q + \frac{p_0}{\pi} \ln \frac{1-\lambda\xi}{1+\lambda\xi} + \Omega(\xi),$$

$$y = -\frac{q}{K} \int_{-1}^{|\xi|} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\lambda^2\tau^2)(\tau^2-1)}}, \quad 1 \leq |\xi| \leq \lambda^{-1} \quad (1.2)$$

$$F = \int_0^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\lambda^2\tau^2)(1-\tau^2)}}, \quad \Omega = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y[\psi(\tau)]}{\tau - \xi} d\tau, \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$$

$$K' = F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda'\right), \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}, \quad \frac{K}{K'} = \frac{q}{H}$$

В (1.1), (1.2) управление границей BC , а следовательно, линиями AB и CD осуществляется через эпюру расходов $y[\psi(\xi)]$. Поскольку, согласно (1.2), для каждой ветви депрессионной кривой величина $y(\xi)$ меняется монотонно от $-H$ до 0 , существуют ровно два корня $\alpha \in (1, 1/\lambda)$ и $-\alpha \in (-1/\lambda, -1)$ уравнения $H+y(\xi)=\delta$ для любого $\delta \in (0, H)$, которые легко находятся численно. Тогда из первого уравнения (1.2) ширина $R=x(-\alpha)-x(\alpha)$. Если рассматривать класс гельдеровых эпюр $y[\psi]$ и разлагать $y[\psi(\xi)]$ в ряд $y=-\sum b_n U_n(\xi)$ при $|\xi| \leq 1$ ($U_n = \sin(n \arccos \xi)$), суммированный всюду от 1 до ∞ , то

$$\Omega(\xi) = \begin{cases} \sum b_n T_n(\xi) & \text{при } |\xi| \leq 1, T_n = \cos(n \arccos \xi) \\ \sum b_n (\pm \xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1})^n & \text{при } 1 \leq |\xi| \leq 1/\lambda \end{cases}$$

Отсюда для $R(b_1, b_2, \dots)$ получим линейную форму

$$R = 2q + \frac{2p_0}{\pi} \ln \frac{1+\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha} - 2 \sum b_{2n-1} \gamma^{1-2n}, \quad \gamma = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (1.3)$$

а площадь S , согласно [3], будет квадратичной формой

$$S = -\frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 + \frac{Q}{2K} \sum J_{2n-1} b_{2n-1} + 2p_0 \sum \beta^{1-2n} b_{2n-1} \quad (1.4)$$

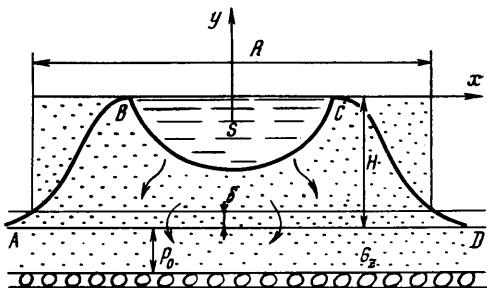
Из (1.3), (1.4) ясно, что введение в постановку задачи A площади S необходимо для получения невырожденных экстремумов, которые после составления функционала $\Phi=R+\mu S$ (μ – множитель Лагранжа) определяются коэффициентами

$$b_{2n}=0, \quad b_{2n-1} = -\frac{2\gamma^{1-2n}}{\pi\mu(2n-1)} + \frac{QJ_{2n-1}}{2\pi K(2n-1)} + \frac{2p_0\beta^{1-2n}}{\pi(2n-1)}$$

Подстановка этих коэффициентов в (1.4) позволяет найти постоянную μ в виде

$$\mu = \pm \sqrt{\ln \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2 - 1}} / \sqrt{\pi(S_E - S)},$$

$$S_E = \frac{1}{2\pi} \sum \left(\frac{Q}{2K} J_{2n-1} + 2p_0 \beta^{1-2n} \right)^2 (2n-1)^{-1}$$



Фиг. 1

Знак второй вариации Φ указывает, что $\mu > 0$ соответствует максимуму, а $\mu < 0$ – минимуму задачи A . После подстановки μ и b_n в (1.3) для максимальной и минимальной ширины R_+ и R_- , свернув ряды, получим

$$R_{\pm} = 2q + \frac{2p_0}{\pi} \ln \frac{1+\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha} - \frac{2p_0}{\pi} \ln \frac{\gamma\beta+1}{\gamma\beta-1} - \\ - \frac{Q}{2\pi K_0} \int_0^\pi \operatorname{arctg} \left(\frac{2\gamma \sin x}{\gamma^2-1} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-\lambda^2 \cos^2 x}} \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(S_E - S) \ln \frac{\gamma^2+1}{\gamma^2-1}} \quad (1.5)$$

Из (1.5) видно, что исходная задача разрешима лишь при $S \leq S_E(q, H, p_0)$ [3].

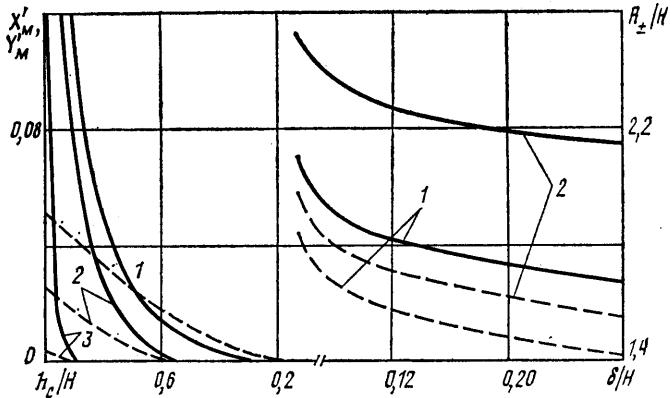
Если изопериметрические неравенства понимать как оценку трудно-определяемых характеристик через относительно легко определяемые [4], то для R получим цепочку $S \rightarrow q \rightarrow R$. Другими словами, для любого необлицованного русла при заданных гидрологических параметрах H , p_0 и допустимом уровне подтопления δ из (1.5) справедливо двустороннее неравенство $R_- \leq R(q, S) \leq R_+$.

Другой тип оценок для R можно получить методами [5, 6], основываясь лишь на геометрии русла Γ , вписывая и описывая вокруг Γ «канонические» контуры Γ_1 и Γ_2 , для которых величины R_1 и R_2 либо вычисляются аналитически [7], либо находятся моделированием [8]. В результате мажорантные оценки дадут $R_1(\Gamma_1) < R(\Gamma) < R_2(\Gamma_2)$. Преимуществом оценки, вытекающей из (1.5), по сравнению с последним неравенством является ее неулучшаемость, причем – в классе контуров BC более широком, чем предполагалось выше, ибо гельдеровость функции $y[\psi(\xi)]$ – лишь достаточное условие существования интегралов в (1.1), (1.2) и соответствующих разложений в ряды.

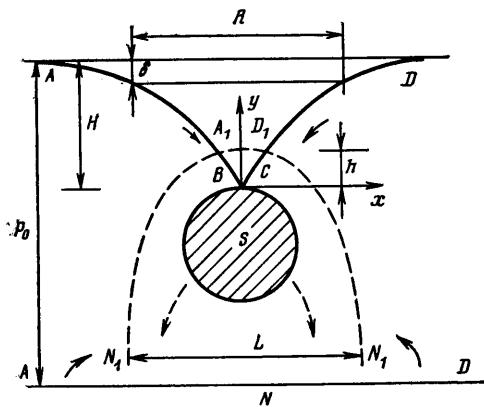
С другой стороны, мажоранты [5, 6] дают физически реальные контуры, тогда как экстремали задачи A могут иметь самопересечения, разрезы, участки отрицательного давления, что характерно для методов, в которых управление границей осуществляется не в физической, а в параметрической плоскости [9]. В этом случае в постановку вариационной задачи следует ввести ограничения на фазовую координату $x(\xi)$ и управление $y[\psi(\xi)]$ (при решении смешанной краевой задачи [3] x – управление, y – фазовая координата). Такие ограничения могут вводиться и из технологических соображений, например $|x(\xi)| \leq L$, $|\xi| \leq 1$ соответствует ограничению на отчуждаемую под русло территорию, а $|dy/dx| < \theta$ отвечает требованию устойчивости грунтового ложа канала. На фиг. 2 (правая половина) представлены графики зависимостей R_+/H (сплошные линии) и R_-/H (штриховые линии), построенные при $p_0/H = 0.1$, $S/H^2 = 0.1$ для $Q/H = 1.56$ (кривые 1) и 1.98 (кривые 2), на основе которых можно строить описанные выше оценки.

2. Оценка осушения. При расчетах притока к горизонтальным дренам действие последних обычно моделируется гидродинамическими стоками, а линия, соответствующая границе дренажной полости или сильнопроницаемой засыпки, восстанавливается в процессе решения как эквипотенциал или изобара [10, 11]. Используется также замена реальной дрены горизонтальным или вертикальным разрезом [9, 10]. В предлагаемом ниже методе площадь живого сечения и расход в дрене задаются априори, а форма контура и его положения отыскиваются из требования экстремума водопонижения.

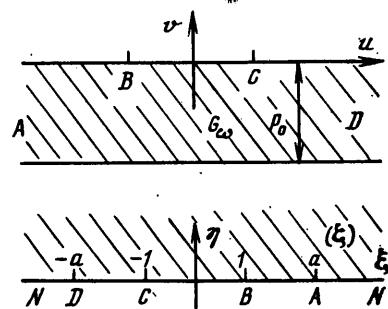
Рассмотрим питание с расходом $2q$ совершенной дрены BC из напорного горизонта AD с естественным уровнем грунтовых вод p_0 над его



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

кровлей (фиг. 3). Ограничимся случаем, когда нависание грунтовых вод над дреной отсутствует. В компактном виде оптимизацию удается провести для двух предельных режимов: когда BC является эквипотенциалю (заполненная водой дрена, режим свободного истечения), и когда BC – изобара (пустая дрена). Для частично заполненной водой дрены положение уровня грунтовых вод будет, очевидно, находится в «вилке», определяемой предельными режимами.

Для дрен, контуры которых являются эквипотенциалами, кривая BC , обеспечивающая при заданных S , q , H , p_0 экстремум ширины R зоны понижения уровня грунтовых вод на заданную величину δ , отыскивается аналогично изложенному в разд. 1. Обратимся к случаю пустой дрены, причем ограничимся критическим режимом, когда депрессионные кривые смыкаются в вершине осушителя, т. е. $x_B = x_C = 0$. Сформулируем соответствующую оптимизационную задачу.

Задача Б. При заданных S , q , p_0 найти такую изобару BC , чтобы в пределах полосы данной ширины R понижение δ естественного уровня грунтовых вод было экстремальным.

Введем комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ и функцию Жуковского $\omega = u + iv$ ($u = x - \psi$, $v = \varphi + y$), которые являются аналитическими в области фильтрации G_z . В плоскости ω области G_z соответствует полоса G_ω , которая отображается на полу平面 $\text{Im } \xi > 0$.

переменного $\xi = \xi + i\eta$ (фиг. 4) функцией

$$\omega = p_0 \pi^{-1} \ln \frac{a - \xi}{a + \xi}, \quad a = \operatorname{cth} \frac{\pi q}{2p_0} \quad (2.1)$$

Заметим, что в разд. 1 известной была область в плоскости w , соответствующая G_z , а функция ω отыскивалась. В силу этого отличия в постановке задачи Б по сравнению с задачей А поменялись местами R и δ : задается ширина полосы осушения, а норма осушения варьируется.

Функцию управления границей BC представим в виде $\psi = \psi[u(\xi)]$, $-1 \leq \xi \leq 1$, и будем считать ее гельдеровой. Краевые условия для функции $w^* = i(w + H) = \Phi + i\Psi$ можно записать так

$$|\xi| > a: \Psi = 0, \quad -a \leq \xi \leq -1: \Phi = q \\ 1 \leq \xi \leq a: \Phi = -q, \quad |\xi| \leq 1: \Phi = -\psi[u(\xi)]$$

где $u(\xi)$ выражается из (2.1). Поскольку $\Phi(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = \pm 1$, представим ее в виде суммы $\Phi = -q\xi + qU(\xi)$, где $U(\pm 1) = 0$. Тогда по известной формуле решения смешанной задачи

$$w^* = -\frac{q\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\pi} \left[\int_{-a}^{-1} R(\tau, \xi) d\tau - \int_1^a R(\tau, \xi) d\tau - \int_{-1}^1 \tau R(\tau, \xi) d\tau \right] - qJ(\xi) \quad (2.2)$$

$$R(\tau, \xi) = [\sqrt{a^2 - \tau^2}(\tau - \xi)]^{-1}, \quad J(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}(\tau - \xi)}$$

где из ветвей $\sqrt{\xi^2 - a^2}$ выбрана положительная при $\xi > a$.

Известно [12], что при $\xi = \xi$ интеграл $J(\xi)$ в (2.2) заменой $\xi = a \cos \theta / \sqrt{a^2 - \sin^2 \theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $-1 \leq \xi \leq 1$) и разложением $U = \sum a_{2n} \sin 2n\theta$ (ограничившись рассмотрением течений, симметричных относительно оси ординат в G_z) приводится к тригонометрическому ряду $J = -\sum a_{2n} \cos 2n\theta$. Замена же $\xi = a \operatorname{ch} \theta_0 / \sqrt{a^2 + \operatorname{sh}^2 \theta_0}$ ($1 \leq \xi \leq a$, $0 \leq \theta_0 \leq \infty$) позволяет представить J в виде ряда $J = -\sum a_{2n} \exp(-2n\theta_0)$. Тогда, осуществив в (2.2) предельный переход при $\xi \rightarrow \xi \in [-1, 1]$, получим параметрические уравнения кривой BC

$$x = p_0 \pi^{-1} \ln \frac{a - \xi}{a + \xi} + q\xi - q \sum a_{2n} \sin 2n\theta \quad (2.3)$$

$$y + H = qy_0(\xi) - q \sum a_{2n} \cos 2n\theta$$

$$y_0 = -\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{A_1 A_2}{a^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi}{\pi} \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right)$$

$$A_{1,2} = \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{a^2 - \xi^2} + a^2 \mp \xi$$

Предельный переход в (2.2) при $\xi \rightarrow \xi \in [1, a]$ дает уравнение линии AB

$$x = q + p_0 \pi^{-1} \ln \frac{a - \xi}{a + \xi}, \quad y - H = qy_0(\xi) - q \sum a_{2n} \exp[-2n\theta_0(\xi)] \quad (2.4)$$

Поскольку в постановке задачи Б ширина R полосы задана, из первого уравнения (2.4) найдем соответствующее значение $\xi(R) = \beta$ и подставив во второе уравнение (2.4), получим выражение для искомого

функционала $\delta = -y(\beta) + H$

$$\delta = -qy_0(\beta) + q \sum a_{2n} \exp(-2n\theta_0^*), \quad \theta_0^* = \theta_0(\beta), \quad \beta = a \operatorname{th}\left(\pi \frac{R+2q}{4p_0}\right) \quad (2.5)$$

А так как депрессионная кривая монотонно понижается с приближением к дрене, то для всех $|x| < R/2$ глубина грунтовых вод будет больше δ .

Площадь сечения выражается из (2.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{S}{q^2} &= \int_{-1}^1 \frac{y(\xi)x'(\xi)}{q^2} d\xi = S_0 - \pi \sum n a_{2n}^2 + \sum a_{2n} (P_{2n} - E_{2n}) \\ S_0 &= \int_{-1}^1 y_0(\xi)x_0'(\xi)d\xi, \quad x_0'(\xi) = 1 - \frac{2p_0 a (q\pi)^{-1}}{a^2 - \xi^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \int_0^\pi \cos 2n\theta \xi'(\theta) x_0'[\xi(\theta)] d\theta, \quad J_{2n} = \pi^{-1} \int_0^\pi \sin 2n\theta \xi'(\theta) y_0'[\xi(\theta)] d\theta \\ \xi'(\theta) &= -\frac{a(a^2-1)\sin\theta}{(a^2-\sin^2\theta)^{1/2}}, \quad y_0'(\xi) = 2\arcsin \frac{1}{a} \frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} + \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \end{aligned}$$

Составив по (2.5) и (2.6) функционал $\delta + \mu S$, найдем аналогично разд. 1 коэффициенты a_{2n} , определяющие его экстремум. В результате для максимального (δ_+) и минимального (δ_-) понижения уровня грунтовых вод получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta_\pm}{q} &= -y_0(\beta) - \frac{E_1}{2\pi} - \frac{E_2}{4\pi} \pm \sqrt{S_E - S} \sqrt{-\pi^{-1} \ln [1 - \exp(-4\theta_0^*)]} \\ E_1(a, \theta_0^*) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin 2\theta}{\exp(2\theta_0^*) - \cos 2\theta} \right] y_0'[\xi(\theta)] \xi'(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$E_2(a, \theta_0^*) = \int_0^\pi \ln [1 - 2 \exp(-2\theta_0) \cos 2\theta + \exp(-4\theta_0^*)] x_0'[\xi(\theta)] \xi'(\theta) d\theta$$

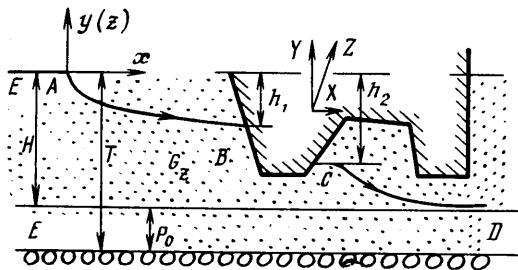
$$S_E = S_0 + \frac{1}{4\pi} \sum \frac{(P_{2n} - J_{2n})^2}{n}$$

Отсюда, в частности, следует условие разрешимости задачи B в виде $S \leq S_E(a)$. Наконец, из нормировки $v(\pm 1) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{H}{q} &= \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{a^2-1} \arcsin \frac{1}{a} + \ln a \right) - \frac{E_2 + E_4}{2\pi} \mp \sqrt{S_E - S} \ln [1 - \exp(-2\theta_0^*)] \times \\ &\quad \times (-\pi \ln [1 - \exp(-4\theta_0^*)])^{-1/2} \end{aligned}$$

$$E_3(a) = \int_0^\pi \ln (2 \sin \theta) x_0'[\xi(\theta)] \xi'(\theta) d\theta, \quad E_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x) y_0'[\xi(\theta)] \xi'(\theta) d\theta$$

Соотношения (2.7) позволяют строить изопериметрические неравенства так же, как в разд. 1. Можно привести примеры задач, в которых сочетается техника разд. 1, 2. Рассмотрим фильтрацию из кротового оросителя (фиг. 3, штриховые линии), т. е. схему, в которой эквипотенциаль



Фиг. 5

BC является питающим контуром. Если в качестве ограничений задать горизонтальный и вертикальный характерные размеры области течения (L и h), то можно сформулировать задачу об отыскании замкнутой кривой BC , ограничивающей экстремальную площадь. Поскольку здесь $q=L/2$, а из отображения полу полосы G_w области комплексного потенциала на полуплоскость (на фиг. 4 точкам $-a, a, \infty$ оси ξ теперь соответствуют точки D_1, A_1, N_1 фиг. 3) легко найти $h=2q\pi^{-1} \operatorname{arctg} a$, то ясно, что заданные ограничения не требуют введения множителя Лагранжа. Краевая задача при этом формулируется, как и в разд. 1, для функции ω по условиям $v=0$ при $|\xi| \geq a$, $u=\pm q$ при $1 \leq |\xi| \leq a$, $u=u[\varphi(\xi)]$ при $|\xi| \leq 1$, а разложения в ряды осуществляются аналогично разд. 2.

3. Оценка фильтрационных сил. Пусть фильтрация из водохранилища EA происходит в напорный горизонт ED , расположенный на глубине T , и поток подтапливает фундамент BC . При этом возникает гидродинамическая сила $Z=X+iY$ (фиг. 5). Если фундамент заделан в грунт, то для оценки его устойчивости существенное значение имеет величина компоненты Y . В ряде случаев, например при исследовании выпора облицовочных плит или гибких экранов, требуется определять как полную силу Z , так и распределение фильтрационного давления вдоль непроницаемой границы. Экстремальные оценки для названных характеристик можно получить на основе решения следующей задачи.

Задача B. При заданной глубине T , напоре H , ординатах h_1 и h_2 точек пересечения B и C депрессионной кривой AB, CD с контуром фундамента BC найти такую форму этого контура, чтобы сила Y была экстремальна.

Для решения задачи отобразим конформно полу полосу в плоскости w , соответствующую области фильтрации G_z , на полуплоскость $\operatorname{Im} \xi > 0$ функцией

$$w = -2H\pi^{-1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi+d}{e-d}} + H \quad (3.1)$$

где точкам $-e, -d, -1, 1, \infty$ оси ξ соответствуют точки E, D, C, B, A . Параметры e и d определяются по заданным величинам h_1 и h_2

$$d = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_2 / \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon_2 / \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1}, \quad e = d + \frac{d+1}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{h_{1,2}}{H} \right)$$

Управляющую функцию выбираем в виде $v=v[\varphi(\xi)]$ на BC , что эквивалентно $y=v(\varphi)-\varphi$, причем помимо гельдеровости $v(\varphi)$ будем предполагать $v(h_1)=v(h_2)=0$, что, очевидно, следует из принадлежности точек B и C как искомой экстремали, так и кривой депрессии.

Границные условия для функции Жуковского ω имеют вид $1 \leq \xi$:

$v=0, -1 \leq \xi \leq 1: v=v[\varphi(\xi)], -d \leq \xi \leq -1: v=0, -e \leq \xi \leq -d: v=H-T=-p_0, \xi \leq -e: v=0.$

С учетом нормировки $u(\infty)=0$ решение выписанной задачи Дирихле имеет вид

$$\omega = -\frac{p_0}{\pi} \ln \frac{\xi+d}{\xi+e} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(\tau)}{\tau-\xi} d\tau \quad (3.2)$$

Осуществив в (3.2) предельный переход при $\xi \rightarrow \xi \in [-1, 1]$ и представив $v(\xi) = \sum c_n U_n(\xi)$, получим уравнения кривой BC

$$x = -\frac{p_0}{\pi} \ln \frac{\xi+d}{\xi+e} - \sum c_n T_n(\xi), \quad y = \sum c_n U_n(\xi) - \varphi(\xi) \quad (3.3)$$

где $\varphi(\xi)$ берется из (3.1).

Функционал $Y^* = Y/f$, где f – удельный вес жидкости, приведен в [9]; после подстановки (3.3) Y^* выражается рядом

$$Y^* = \int_{BC} v dx = -\frac{\pi}{2} \sum n c_n^2 - \frac{p_0}{\pi} \sum c_n (D_n - E_n) \quad (3.4)$$

$$D_n = -\pi (-d_1)^n, E_n = -\pi (-e_1)^n, d_1 = d - \sqrt{d^2 - 1}, e_1 = e - \sqrt{e^2 - 1}$$

Из (3.4) видно, что невырожденным экстремумом задачи B является максимум и для него, свернув ряды, легко получить значение функционала

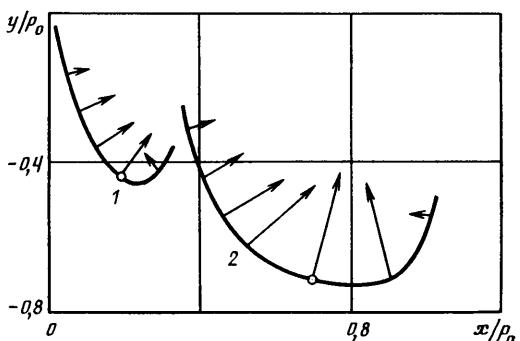
$$\frac{Y_M^*}{p_0^2} = (2\pi)^{-1} \ln \frac{(1-d_1 e_1)^2}{(1-d_1^2)(1-e_1^2)}. \quad (3.5)$$

и уравнения экстремалей

$$x = -\frac{p_0}{\pi} \ln \frac{\cos \theta + d}{\cos \theta + e} + \frac{p_0}{2\pi} \ln \frac{1 + 2d_1 \cos \theta + d_1^2}{1 + 2e_1 \cos \theta + e_1^2} \quad (3.6)$$

$$y = -H + \frac{2H}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos \theta + d}}{\sqrt{e - d}} - \frac{p_0}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{d_1 \sin \theta}{1 + d_1 \cos \theta} - \operatorname{arctg} \frac{e_1 \sin \theta}{1 + e_1 \cos \theta} \right)$$

На фиг. 2 (левая половина) по (3.5) построены графики зависимостей Y_M'/p_0^2 от h_2/H при $H/p_0=0,5$ для $h_1/H=0,1, 0,5, 0,9$ (кривые 1–3 соответственно). На фиг. 6 показаны экстремали (3.6), построенные при $H/p_0=0,5$ для $h_1/H=0,1, h_2/H=0,73$ и для $h_1/H=0,5, h_2/H=0,95$ (кривые 1, 2 соответственно), причем стрелками отмечены значения приведенного давления v/p_0 по BC в ряде точек контура, а точками – положение максимума давления. Заметим, что в постановку задачи можно ввести дополнительное ограничение $v(\xi) \leq v_0$ при $|\xi| \leq 1$ или иные условия локальной устойчивости на выбор подобно тому, как сделано в [13] для земляных откосов.



Фиг. 6

Функционал горизонтальной силы $X^*=X/f$ для произвольной формы BC , согласно [9] и (3.3), выражается рядом

$$X^* = -\frac{2H}{\pi} \sum c_n W_n, \quad W_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx \sin x dx}{(\cos x + e) \sqrt{\cos x + d}} \quad (3.7)$$

На фиг. 2 (левая половина) штриховыми линиями отмечены графики зависимостей $X_m' = X_m^*/p_0^2$ от h_2/H для экстремалей (3.6), построенные при указанных выше значениях параметров. По кривым на фиг. 2 и 6 можно оценить сверху силу Y для произвольной границы BC , а для экстремалей задачи B — указать как величины X и Z , так и наиболее опасный на выпор участок.

Линейную относительно c_n форму (3.7) можно ввести в число изопериметрических ограничений задачи B и решение построить, как в разд. 1, 2. Задачу B можно, разумеется, обратить, т. е. искать экстремум одного из линейных размеров p_0 , h_1 , h_2 . Инверсией к физической схеме настоящего пункта является схема, в которой кривая BC (изобара) моделирует контур ложбины, на которую выклинивается поток. Наконец, эта же техника решения может быть использована, когда питание потока осуществляется не из водохранилища, а, например, за счет инфильтрации [14], причем на фундаменте можно предположить наличие проницаемых участков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М.: Изд-во МГУ, 1965. 233 с.
- Эмих В. Н. О режиме грунтовых вод в орошающем почвенном слое с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 168–174.
- Ильинский Н. Б., Касимов А. Р. Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 74–80.
- Полика Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
- Положий Г. Н. Теория и применение p -аналитических и p -, q -аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
- Фаткуллин Р. Г., Якимов Н. Д. Теоремы сравнения для некоторых задач фильтрации в неоднородных грунтах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 165–169.
- Нумеров С. Н. О фильтрации из каналов деривационных ГЭС и ирригационных систем // Изв. ВНИИ гидротехники. 1947. Т. 34. С. 85–98.
- Booijer H. Theoretical aspects of seepage from open channels // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs. 1965. V. 91. № 3. Pt 1. P. 39–59.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
- Веденников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
- Чайлдс Э. Физические основы гидрологии почв. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 427 с.
- Пыхтеев Г. Н. К задаче о струйном обтекании криволинейной дуги в ограниченном и безграничном потоке идеальной несжимаемой жидкости // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 4. С. 421–432.
- Ильинский Н. Б., Якимов Н. Д. Определение формы низового откоса грунтовой плотины по условиям фильтрационной прочности на границе откоса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 101–107.
- Веригин Н. Н. Влияние местной усиленной инфильтрации на подтопление городских территорий и фундаментов зданий // Гидрогеологические прогнозы при защите территорий от подтопления. М.: 1988. С. 4–11.