

УДК 532.546

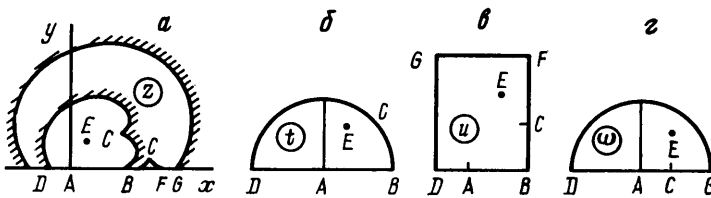
© 1991 г.

Г. И. МУХАМАДУЛЛИНА, Э. В. СКВОРЦОВ

**О РАСЧЕТЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН  
ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ ВОДОЙ**

Рассматривается задача об определении положения предельно равновесных целиков остаточной вязкопластической нефти при вытеснении ее водой из пористого пласта в многоскважинной системе, сформулированная в [1], которая представляет интерес в связи с получением оценок вытесненного объема нефти. При плоской изотермической фильтрации в однородном недеформируемом пласте и определенных ограничениях на геометрию области течения задача может быть исследована методами теории аналитических функций (см., например, [1–3]). В [4] с применением теории потенциала получено приближенное решение одной задачи с усложненной геометрией течения. В данной работе методами теории струй построено и проанализировано ее точное аналитическое решение для трех возможных вариантов схем течения.

Пусть в области фильтрации имеются источник расхода  $2q$  и пара стоков с расходами  $-q$ , расположенные так, что течение симметрично относительно некоторой прямой, принимаемой за ось абсцисс. Предположим, что в результате длительного вытеснения нефти водой образуется область  $G$  стационарного фильтрационного течения воды. Схема верх-



Фиг. 1

ней половины течения от источника к стоку с координатами  $l, h$  изображена на фиг. 1, а. Его непроницаемыми границами являются линии тока, совпадающие с осью абсцисс, и неизвестные границы  $\Gamma$  целиков. При этом возможны три варианта схемы течения. Достаточно малым значениям расхода  $q$ , очевидно, будет соответствовать схема с одной неизвестной границей  $DCB$ , имеющей точку возврата  $C$ . При некотором критическом значении расхода  $q_*$  граница  $DC$  коснется оси абсцисс, и при  $q > q_*$  внутри области течения возможно образование второго целика с границей  $BCF$ . Наконец, допустим и третий вариант течения, когда считается, что на предельной стадии процесса вытеснения внутренний целик полностью исчезает и стягивается в точку  $C$ , в которой скорость фильтрации равна нулю. Давление  $p(x, y)$  в области  $G$  удовлетворяет уравнению Лапласа, а границы целиков находятся из условия

$$|\nabla p| = \tau_0, \quad x \in \Gamma$$

где  $\tau_0$  — начальный градиент давления для вязкопластической нефти.

Описанное выше фильтрационное течение изучалось в [4] в качестве иллюстрации возможности метода теории потенциала при определении положения границ целиков. При этом считалось, что отношение  $h/l$  мало по сравнению с единицей и имеется лишь одна гладкая граница целика. Последнему предположению отвечает третий из упомянутых вариантов схемы течения. При отмеченных допущениях получено численное решение задачи. Ниже расположение стока считается произвольным.

Области течения  $G$  ставятся в соответствие канонические области комплексных переменных  $t, u$  и  $\omega$ : для первого варианта схемы — единичный полукруг  $D_1$  (фиг. 1, б), для второго — прямоугольник  $D_u$  (фиг. 1, в) с вершинами  $0, \pi/2, \pi/2+i\pi\tau/2$ , для третьего — единичный полукруг  $D_\omega$  (фиг. 1, г). Пусть соответственно в  $D_1$  и  $D_\omega$  точка  $E$  имеет полярные координаты  $\rho_1, \sigma_1$  и  $r_1, s_1$ , точка  $C$  — дуговую абсциссу  $\sigma_0$  и радиус  $r_0$ , в  $D_u$  точки  $A, E, C$  — декартовы координаты  $a, 0, b, e, \pi/2, c$ . Для рассматриваемого течения характерно то, что внутри области имеется особенность (сток в точке  $E$ ). Поэтому комплексный потенциал течения  $W = kp + i\psi$  ( $k$  — коэффициент фильтрации) — функция неоднозначная. Вместе с тем производная комплексного потенциала однозначна и может быть построена по особенностям [5].

Для первого варианта схемы

$$\frac{dW}{dt} = \frac{N_1(1-t^2)(t^2-2t \cos \sigma_0+1)}{t(t^2-2\rho_1 t \cos \sigma_1+\rho_1^2)(\rho_1^2 t^2-2\rho_1 t \cos \sigma_1+1)} \quad (1)$$

Условия приращения комплексного потенциала при обходе точек  $A$  и  $E$  дают два соотношения

$$N_1 = \frac{q\rho_1^2}{\pi}, \quad \cos \sigma_0 = \frac{1+\rho_1^2}{2\rho_1} \cos \sigma_1 \quad (2)$$

Комплексно-сопряженная скорость течения также строится методом особых точек

$$\frac{dW}{v_0 dz} = \frac{1}{t} \frac{\rho_1^2 t^2 - 2\rho_1 t \cos \sigma_1 + 1}{t^2 - 2\rho_1 t \cos \sigma_1 + \rho_1^2} \quad (3)$$

Здесь  $v_0 = k\tau_0$ ,  $z$  — комплексная координата точки области. Формулы (1)–(3) позволяют интегрированием получить зависимость  $z = z(t)$  и связать безразмерные параметры течения  $Q = q/(v_0 h)$  и  $l/h$  с вспомогательными параметрами  $\rho_1, \sigma_1$

$$Z(t) = \frac{Q}{2\pi\rho_1^3} \left\{ \alpha(\rho_1, \sigma_1) \left( \operatorname{arctg} \frac{\rho_1 t - \cos \sigma_1}{\sin \sigma_1} + \frac{\pi}{2} - \sigma_1 \right) - \right. \\ \left. - 2t\rho_1 + \rho_1(1-\rho_1^2)t(2\rho_1 t \cos \sigma_1 - \rho_1^2 - 1)f^{-1}(t) - (3-\rho_1^2)\cos \sigma_1 \ln f(t) \right\}$$

$$Q = 2\pi\rho_1^3 g_1^{-1}, \quad l/h = g_2 g_1^{-1}$$

$$Z(t) = z/h, \quad f(t) = 1 - 2\rho_1 t \cos \sigma_1 + \rho_1^2 t^2$$

$$\alpha = (\rho_1^4 + 2\rho_1^2 \cos \sigma_1 - 6 \cos^2 \sigma_1 + 3) (\sin \sigma_1)^{-1}$$

$$g_1 = \frac{\alpha}{4} \ln \frac{\beta}{(1-\rho_1^2)^2} - 3\rho_1^2 \sin \sigma_1 - \cos \sigma_1 (3-\rho_1^2) (\sigma_1 - \gamma)$$

$$g_2 = \frac{\alpha}{2} (\gamma - \sigma_1) - 3\rho_1^2 \cos \sigma_1 - \cos \sigma_1 (3-\rho_1^2) \left[ \ln(1-\rho_1^2) + \frac{1}{2} \ln \beta \right]$$

$$\beta = 1 - 2\rho_1^2 \cos 2\sigma_1 + \rho_1^4, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \operatorname{tg} \sigma_1 \right)$$

Анализ полученного решения показал, что если сток расположен не на оси ординат, то всегда найдется критический безразмерный расход  $Q_*$ ; поэтому течение, симметричное относительно этой оси, можно считать неустойчивым по отношению к расходу.

Для второго варианта схемы

$$\frac{dW}{du} = \frac{N_2 \vartheta_1(2u) \vartheta_2(u-ic) \vartheta_2(u+ic)}{\vartheta_2(u-2b) \vartheta_2(u+2b) \vartheta_1(u-b-ie) \vartheta_1(u-b+ie) \vartheta_1(u+b-ie) \vartheta_1(u+b+ie)} \quad (4)$$

где  $\vartheta(u) = \vartheta(u, \tau)$ .

Вычисление вычетов в точках  $A$  и  $E$  дает значение постоянной

$$N_2 = \frac{\vartheta_1' \vartheta_2(3b+ie) \vartheta_2(3b-ie) \vartheta_2(b+ic) \vartheta_2(b-ic)}{\pi \vartheta_1(2b+ic) \vartheta_1(2b-ic)}$$

и уравнение, связывающее вспомогательные параметры  $b, e, c$  и  $\tau$

$$\operatorname{Re} \{ \vartheta_2(3b-ie) \vartheta_2(3b+ie) \vartheta_2[b+i(e-c)] \vartheta_2[b+i(e+c)] \} = 0 \quad (5)$$

Комплексно-сопряженная скорость принимает вид

$$\frac{1}{v_0} \frac{dW}{dz} = \frac{\vartheta_1(u+a) \vartheta_1(u+b-ie) \vartheta_1(u+b+ie)}{\vartheta_1(u-a) \vartheta_1(u-b-ie) \vartheta_1(u-b+ie)} \quad (6)$$

Из условия  $\theta = \pi$  в точке  $M$  следует, что  $a+2b = \pi/2$ . Таким образом, получение искомой зависимости  $z = z(u)$  сводится к интегрированию соотношения  $dz = Q N_2 F(u) du$ , в котором функция  $F(u)$  определяется по формулам (4), (6) и является эллиптической. Для упрощения численных расчетов удобнее представить ее в эквивалентной форме через сумму логарифмических производных тэта-функций [5]

$$F(u) = F_0(u) - F_0(0), \quad F_0(u) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \beta \left[ \gamma \frac{d \ln \vartheta_2(u-2b)}{du} - \frac{d^2}{du^2} \ln \vartheta_2(u-2b) \right] - \sum_{j=1}^2 \delta_j \left[ \varepsilon_j \frac{d}{du} \ln \vartheta_1(u+b+il_j) + \frac{d^2}{du^2} \ln \vartheta_1(u+b+il_j) \right] \right\}$$

$$\alpha = (\vartheta_1')^2 \vartheta_1^2(2ie) \vartheta_2^2(3b-ie) \vartheta_2^2(3b+ie)$$

$$\beta = \vartheta_1(4b) \vartheta_1(2b-ic) \vartheta_1(2b+ic) \vartheta_1^2(2ie)$$

$$\delta_1 = \delta(e) = \vartheta_1(2b+2ie) \vartheta_2[b+i(e+c)] \vartheta_2[b+i(e-c)] \vartheta_2^2(3b+ie),$$

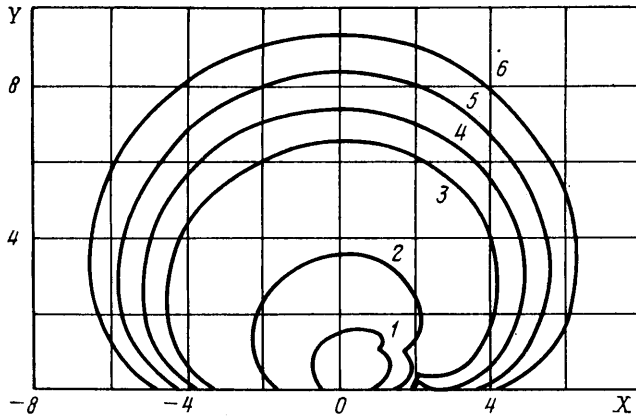
$$\delta_2 = \delta(-e)$$

$$\gamma = \frac{\vartheta_1'(2b-ic)}{\vartheta_1(2b-ic)} + \frac{\vartheta_1'(2b+ic)}{\vartheta_1(2b+ic)} + \frac{\vartheta_1'(4b)}{\vartheta_1(4b)}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(e) = \frac{\vartheta_2'[b+i(e-c)]}{\vartheta_2[b+i(e-c)]} + \frac{\vartheta_2'[b+i(e+c)]}{\vartheta_2[b+i(e+c)]} + \frac{\vartheta_1'[2b+2ie]}{\vartheta_1(2b+2ie)}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(-e), \quad l_1 = e, \quad l_2 = -e$$

Это позволяет выразить координаты границ  $\Gamma$  и параметры  $Q, l/h$  через функции, разлагающиеся в быстроходящиеся ряды.



Фиг. 2

Согласно фиг. 1, *a*, ордината точки *G* должна быть равна нулю. Таким образом, перед вычислением координат при заданных значениях параметров *Q* и *l/h* с учетом уравнения (5) требуется решить систему четырех трансцендентных уравнений для определения соответствующих вспомогательных параметров.

В предельном случае  $\tau \rightarrow \infty$  точки *F* и *G* сливаются и граница *DGCB* совпадает с границей, соответствующей предельному для первого варианта расходу *q\**.

Наконец, для третьего варианта схемы справедливы формулы

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{N_3(1-\omega^2)(r_0-\omega)(1-r_0\omega)}{\omega(\omega^2-2r_1\omega \cos s_1+r_1^2)(r_1^2\omega^2-2r_1\omega \cos s_1+1)}$$

$$\cos s_1 = \frac{r_1(1+r_0^2)}{r_0(1+r_1^2)}, \quad N_3 = \frac{qr_1^2}{\pi r_0}$$

$$\frac{dz}{h} = \frac{Qr_1^2}{\pi r_0} \frac{(1-\omega^2)(1-r_0\omega)^2 d\omega}{(r_1^2\omega^2-2r_1\omega \cos s_1+1)^2}$$

Они также позволяют получить параметрическое решение задачи, выражающееся через элементарные функции. При  $Q \rightarrow \infty$  картина течения, очевидно, стремится к картине фильтрации от источника к стоку во всей области  $y > 0$ . Выписав комплексный потенциал такого течения, можно найти безразмерную абсциссу  $X_0 = x_0/h$  точки *C* с нулевой скоростью фильтрации

$$X_0 = l/h + h/l$$

По полученным формулам были выполнены численные расчеты. Решение системы уравнений осуществлялось методом Нелдера и Мида [6].

Расчеты показали, что при произвольной величине *l/h* границы внешнего целика, соответствующие второму и третьему вариантам схемы, при одинаковых расходах *Q* практически совпадают, а площадь внутреннего целика пренебрежимо мала по сравнению с площадью области фильтрации. Это дает основание пользоваться третьим вариантом схемы как более простым.

На фиг. 2 показаны границы целиков 1-6 при *l/h*=1 и соответственно *Q*=3, 20, 74, 95, 120, 150. Кривой 4 отвечает критическое значение безразмерного расхода *Q\**.

В работе [7] получило обоснование высказанное в [8] предположение о том, что решение задачи о целиках в принятой постановке дает нижнюю оценку площади  $S$  области фильтрации, образующейся на конечной стадии вытеснения. Результаты расчетов показывают, что величина  $S/h^2$  для рассмотренного течения возрастает с ростом  $Q$  тем больше, чем больше величина  $l/h$ .

В заключение отметим, что аналогично описанному могут быть исследованы и другие фильтрационные течения с нарушением симметрии, а также задачи о взрыве шнуровых зарядов под поверхностью земли в твердожидкостной постановке М. А. Лаврентьева. К последним, в частности, относится задача о взрыве пары зарядов, решение которой более сложным путем дано в [9].

Авторы выражают благодарность М. М. Алимову за обсуждение работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
2. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом // Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968. С. 202–211.
3. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 141 с.
4. Видякин В. В., Ентов В. М., Таранчук В. Б. О применении теории потенциала к одной задаче о предельной конфигурации застойных зон при вытеснении вязкопластической нефти водой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 182–185.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
7. Алимов М. М., Скворцов Э. В. Об оценках расходных характеристик в теории фильтрации и теплопроводности // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 462–468.
8. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
9. Ильинский Н. Б., Якимов Н. Д. Задача взаимодействия двух заглубленных шнуровых зарядов при взрыве на выброс // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1980. № 2. С. 28–34.

Казань

Поступила в редакцию  
23.II.1990