

УДК 532.54.011

© 1991 г.

В. И. КЛИМОВИЧ

КВАЗИТРЕХМЕРНЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРОТОЧНЫХ ЧАСТИХ ГИДРОМАШИН

Расчет течений жидкости в гидромашинах в настоящее время производится либо на основе однократного последовательного решения осесимметричной задачи (см., например, [1–4]) и задачи обтекания решеток профилей в слое переменной толщины [4, 5], либо с помощью решения квазитрехмерной задачи [6–8], либо на основе трехмерных моделей движения [9–11].

В данной работе рассматривается вывод уравнений квазитрехмерной модели течения идеальной несжимаемой жидкости для произвольной криволинейной системы координат, основанный на осреднении в окружном направлении уравнений движения в форме Громека – Ламба; при этом в уравнениях квазитрехмерного движения учитываются пульсационные слагаемые. Описывается алгоритм численного решения задачи. Приводятся результаты расчетов и сопоставление расчетных и экспериментальных данных для течений в проточных частях осевого насоса и поворотно-лопастной гидротурбины. Производится анализ полученных результатов.

1. Математическая модель. Уравнения, описывающие установившееся течение идеальной несжимаемой ($\rho=\text{const}$) жидкости в лопастной системе гидромашины, имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0. \quad (1.1)$$

$$W_2 \operatorname{rot}_3 \mathbf{c} - W_3 \operatorname{rot}_2 \mathbf{c} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial I}{\partial q_1} \quad (1.2)$$

$$W_3 \operatorname{rot}_1 \mathbf{c} - W_1 \operatorname{rot}_3 \mathbf{c} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial I}{\partial q_2} \quad (1.3)$$

$$W_1 \operatorname{rot}_2 \mathbf{c} - W_2 \operatorname{rot}_1 \mathbf{c} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial I}{\partial q_3} \quad (1.4)$$

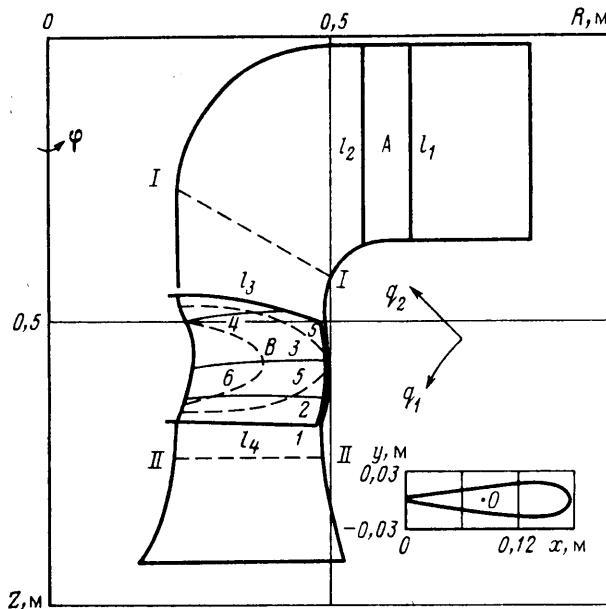
$$I = G - \omega R c_3, \quad G = \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \mathbf{c}^2$$

Здесь $H_1, H_2, H_3 = R$ – коэффициенты Ламе, соответствующие криволинейным координатам $q_1, q_2, q_3 = \varphi$ (см. фиг. 1); $W_1, W_2, W_3 = c_3 - \omega R$ – компоненты относительной скорости \mathbf{W} ; \mathbf{c} – вектор абсолютной скорости с координатами $c_1 = W_1, c_2 = W_2, c_3; \operatorname{rot}_1 \mathbf{c}, \operatorname{rot}_2 \mathbf{c}, \operatorname{rot}_3 \mathbf{c}$ – компоненты вихревой скорости $\operatorname{rot} \mathbf{c}$; ω – угловая скорость вращения лопастной системы; I и G – интегралы Бернулли в относительном и абсолютном движении соответственно; p – давление.

Применяя процедуру осреднения в окружном направлении по межлопастному каналу (см., например, [1, 6–8]) к уравнению (1.1), получаем

$$\operatorname{div} \tau \langle \mathbf{W} \rangle = 0 \quad (1.5)$$

$$\langle \mathbf{W} \rangle = \frac{1}{\Phi_- - \Phi_+ + \theta_{\Phi_+ - \theta}} \int_{\Phi_-}^{\Phi_+} \mathbf{W} d\varphi, \quad \theta = \frac{2\pi}{N}$$



Фиг. 1

Здесь $\tau = 1 - N(\Phi_+ - \Phi_-)/2\pi$ – коэффициент стеснения потока лопастями; N – число лопастей; $\varphi = \Phi_+(q_1, q_2)$ и $\varphi = \Phi_-(q_1, q_2)$ – уравнения стороны разрежения и давления лопасти. Здесь и далее индексы плюс и минус обозначают стороны разрежения и давления лопасти.

Определим функцию тока ψ осредненного течения следующим образом (см. (1.5)):

$$d\psi = \tau R (H_1 \langle c_2 \rangle dq_1 - H_2 \langle c_1 \rangle dq_2) \quad (1.6)$$

Осредняя по каналу уравнение (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{rot}_3 \mathbf{c} \rangle &= \frac{1}{\langle c_1 \rangle} \left[- \left\langle \frac{1}{H_2} \frac{\partial I}{\partial q_2} \right\rangle + \langle W_3 \rangle \langle \text{rot}_1 \mathbf{c} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle W'_3 (\text{rot}_1 \mathbf{c})' \rangle - \langle W'_1 (\text{rot}_3 \mathbf{c})' \rangle \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$W'_i = W_i - \langle W_i \rangle, \quad (\text{rot}_i \mathbf{c})' = \text{rot}_i \mathbf{c} - \langle \text{rot}_i \mathbf{c} \rangle, \quad i = 1, 3$$

Средние значения компонент вихря скорости могут быть вычислены следующим образом (см. [8]):

$$\langle \text{rot } \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{\tau} \text{rot } \tau \langle \mathbf{c} \rangle + \frac{N}{2\pi R \tau v_3} \Delta (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \quad (1.8)$$

Здесь символ Δ означает разность величин на границах осреднения ($\Delta f = f_- - f_+$); v_1, v_2, v_3 – компоненты нормали \mathbf{v} к поверхности лопасти, соответствующие криволинейным координатам $q_1, q_2, q_3 = \varphi$. Подставляя (1.8) в (1.7), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2 \langle c_2 \rangle}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1 \langle c_1 \rangle}{\partial q_2} \right) &= - \frac{1}{\langle c_1 \rangle H_2} \left\langle \frac{\partial I}{\partial q_2} \right\rangle + \\ &\quad + \frac{1}{H_1 H_2} J(\Phi_0, \langle R c_3 \rangle) + A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$A_1 = \left(\frac{\langle W_3 \rangle}{\langle c_1 \rangle} - R \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_1} \right) \langle \text{rot}_1 \mathbf{c} \rangle - R \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_2} \langle \text{rot}_2 \mathbf{c} \rangle$$

$$A_2 = \frac{R}{\tau H_1 H_2} J(\Phi_0, \tau) \left[\langle c_3 \rangle - \frac{c_{3+} + c_{3-}}{2} \right] + \frac{1}{\tau H_2} \frac{\partial \tau}{\partial q_2} \left[\langle c_1 \rangle - \frac{c_{1+} + c_{1-}}{2} \right] - \frac{1}{\tau H_1} \frac{\partial \tau}{\partial q_1} \left[\langle c_2 \rangle - \frac{c_{2+} + c_{2-}}{2} \right] + \frac{1}{\langle c_1 \rangle} [\langle W_3' (\text{rot}_1 \mathbf{c})' \rangle - \langle W_1' (\text{rot}_3 \mathbf{c})' \rangle]$$

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_+ + \Phi_-}{2}, \quad J(f_1, f_2) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(q_1, q_2)}$$

Отметим, что уравнение (1.9) получено без дополнительных предположений о характере вихревого течения в лопастной системе.

При рассмотрении квазитрехмерной модели течения жидкости принято предполагать, что интеграл Бернулли в относительном движении не зависит от окружной координаты и компонента скорости, нормальная к поверхностям тока осредненного течения $\psi = \text{const}$, равна нулю. С учетом этих предположений уравнения (1.2), (1.4) имеют вид (S, n – естественная система координат, координатными линиями которой являются линии $\psi = \text{const}$ (см. (1.6)))

$$\frac{\partial I}{\partial S} = 0 \quad (1.10)$$

$$\text{rot}_n \mathbf{c} = 0 \quad (1.11)$$

Таким образом, квазитрехмерная задача теории гидромашин представляет собой задачу совместного расчета обтекания решеток профилей в слое переменной толщины (см. (1.1), (1.11)) и определения осесимметричных поверхностей тока (см. (1.5), (1.9), (1.10)).

Отметим, что слагаемое A_1 в (1.9) при указанных выше предположениях может быть представлено в виде

$$A_1 = \frac{1}{\langle c_1 \rangle} R (\langle \mathbf{W} \cdot \nabla X_0 \rangle \langle \text{rot}_1 \mathbf{c} \rangle), \quad X_0 = \varphi - \Phi_0(q_1, q_2) \quad (1.12)$$

При этом, как показано в [8], справедливо соотношение

$$\langle \text{rot}_1 \mathbf{c} \rangle = -\langle c_1 \rangle \left[\frac{N}{2\pi} \frac{dI}{d\psi} \int_{S_b}^S \Delta \left(\frac{1}{c_s} \right) dS + \frac{d \langle R c_{sb} \rangle}{d\psi} \right] \quad (1.13)$$

Здесь $\langle R c_{sb} \rangle$ и S_b – значения момента окружной скорости и координаты S на входе в лопастную систему.

Следует отметить, что предположение $\partial I / \partial q_3 = 0$ ($I = I_0(q_1, q_2)$) является необходимым и достаточным условием для отсутствия компоненты скорости W_n , нормальной к поверхности тока осредненного течения (предполагается, что $\partial I / \partial n \neq 0$). В самом деле, предположим, что $\partial I / \partial q_3 = 0$. Тогда, осредняя по каналу уравнение энергии $\mathbf{W} \cdot \nabla I = 0$, являющееся следствием (1.2)–(1.4), получаем

$$\langle \mathbf{W} \cdot \nabla I_0 \rangle = 0$$

Следовательно, в естественной системе координат S, n имеем ($\langle W_n \rangle = 0$)

$$\frac{\partial I_0}{\partial S} = 0 \quad (1.14)$$

Рассматривая теперь в естественной системе координат уравнение энергии и учитывая (1.14), получаем

$$W_n=0 \quad (1.15)$$

Предположим, что $W_n=0$. Тогда из уравнений $\mathbf{W} \cdot \nabla I=0$, $\operatorname{rot} \mathbf{c} \cdot \nabla I=0$ (см. (1.2)–(1.4)) следует

$$\frac{\partial I}{\partial q_3}=0, \quad \frac{\partial I}{\partial S}=0$$

В областях свободного вихревого потока аналогичная процедура осреднения уравнений (1.1)–(1.4) приводит к соотношениям

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{c} \rangle=0, d\psi=R(H_1 \langle c_2 \rangle dq_1 - H_2 \langle c_1 \rangle dq_2) \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2 \langle c_2 \rangle}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1 \langle c_1 \rangle}{\partial q_2} \right) = R \frac{dG}{d\psi} - \frac{1}{2R} \frac{d(\langle R c_3 \rangle)^2}{d\psi} + A_2 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial G}{\partial S}=0, \quad \frac{\partial \langle R c_3 \rangle}{\partial S}=0 \quad (1.18)$$

$$A_2 = \frac{1}{\langle c_1 \rangle} [\langle W_s' (\operatorname{rot}_1 \mathbf{c})' \rangle - \langle W_1' (\operatorname{rot}_3 \mathbf{c})' \rangle]$$

Границные условия для задачи (1.5), (1.9), (1.10) (см. также (1.16)–(1.18)) формулируются аналогично [4].

Распределение давления на лопастях, необходимое для оценки кавитационных качеств гидромашины, определяется из уравнения Бернулли

$$p_{\pm}=\rho [I^{-1/2} \mathbf{W}_{\pm}^2 + 1/2 (\omega R)^2] \quad (1.19)$$

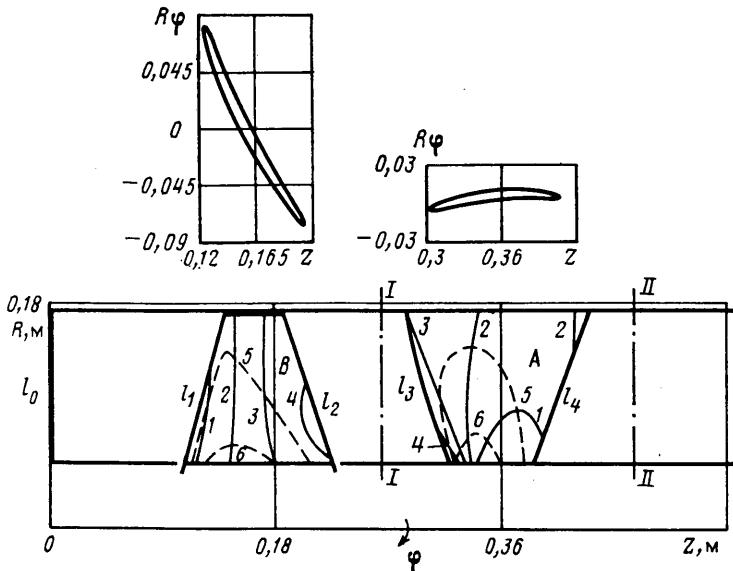
2. Методика численного решения. Вычислительная схема расчета квазитрехмерного течения в проточной части гидромашины состоит из трех основных этапов: 1) расчет осредненного потока; 2) определение геометрии решеток профилей на осесимметричных поверхностях тока и конформное отображение их на плоскость; 3) расчет течения в решетках профилей в слое переменной толщины.

При решении задачи расчета осредненного потока использовались основные особенности алгоритма численного решения прямой осесимметричной задачи теории гидромашин, разработанного в [4]. Уравнение (1.9) (см. также (1.17)) с помощью (1.6) приводилось к эллиптическому уравнению относительно функции тока ψ . Расчетная область с помощью кусочно-линейного преобразования отображалась на единичный квадрат, на котором выбиралась регулярная расчетная сетка. Система разностных уравнений для выбранной расчетной сетки решалась методом последовательных приближений.

Решение задачи об определении геометрии решеток профилей на поверхностях тока $\psi=\text{const}$ производилось с дополнительным описанием геометрии кромок лопастных систем. В качестве исходной информации о геометрии пространственной лопастной системы задавались (или получались с помощью чертежей) значения координаты Φ_0 средней поверхности лопасти, коэффициента стеснения τ , а также распределения радиусов вписанных окружностей на кромках. Конформное отображение круговой решетки на плоскость осуществлялось общепринятым образом (см., например, [5]).

Расчет течения в решетках профилей на осесимметричных поверхностях тока в слое переменной толщины производился с помощью программы, разработанной Б. С. Раухманом [5].

Численное решение прямой квазитрехмерной задачи производилось по следующей схеме. При заданной геометрии проточной части гидромашины решалась прямая осесимметричная задача [4], результаты решения которой выбирались в качестве начального приближения для решения квазитрехмерной задачи. Для полученного распределения функции тока ψ вычислялись координаты q_1, q_2 семейства линий $\psi=\text{const}$, на которых определялась геометрия решеток профилей и производилось конформное отображение их на плоскость. Кроме этого, определялись все необходимые данные для расчета течения в решетках профилей. По результатам решения задачи обтекания решеток профилей формировалась правая часть уравнения (1.9)



Фиг. 2

(см. также (1.17)), при этом слагаемое A_2 в (1.17) не учитывалось, а распределения c_1 и c_2 в межлопастном канале определялись соотношениями (см. (1.15))

$$c_1 = c_s \frac{\langle c_1 \rangle}{\langle c_s \rangle}, \quad c_2 = c_s \frac{\langle c_2 \rangle}{\langle c_s \rangle} \quad (2.4)$$

После вычисления правой части (1.9), (1.17) с помощью метода последовательных приближений производилась коррекция распределения функции тока ψ . Далее процесс повторялся до сходимости с заданной точностью, которая определялась величиной максимальной невязки в уравнении (1.9) (см. также (1.17)) для всей расчетной области течения.

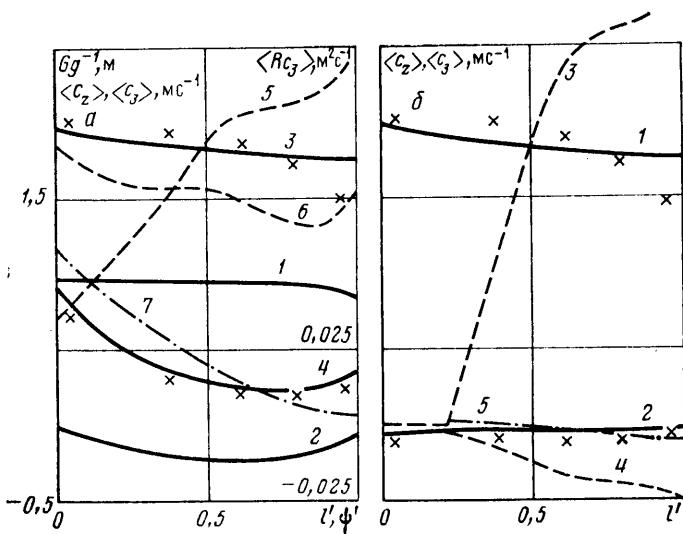
Отметим, что слагаемое A_1 (см. (1.12)) в правой части (1.9) можно определять либо с помощью (1.13), либо с помощью непосредственного вычисления $\langle \rho \dot{v}_t c \rangle$ на основе результатов решения задачи обтекания решеток профилей на осесимметричных поверхностях тока при учете (2.1).

Постановки задач расчета квазитрехмерных течений в проточной части гидромашин для турбинного и насосного режимов работы по существу одинаковы, поэтому расчеты турбинного и насосного режимов работы гидромашин производятся по общей методике, которая реализована в виде единой программы и позволяет рассчитывать течения в насосах, гидротурбинах и насос-турбинах.

Затраты машинного времени на ЭВМ ЕС-1066 при решении квазитрехмерной задачи составляли 30–60 мин для расчетной сетки 10×50 в меридиональной плоскости и 7×32 в плоскостях конформного отображения решеток профилей.

3. Примеры расчетов. На фиг. 2 изображена меридиональная проекция проточной части осевого насоса с рабочим колесом (зона B) и лопаточным отводом (зона A), спроектированными и испытанными в ЛПИ им. М. И. Калинина на модели диаметром $d_1=0,35$ м. Число лопастей рабочего колеса $N=2$, для лопаточного отвода $N=5$. На фиг. 2 в зоне B кривые 1–4 – линии равных значений функции Φ_0 ($0,6, 0,2, -0,2, -0,6$); 5, 6 – то же для функции τ ($0,95, 0,9$). В зоне A кривые 1–4 – линии равных значений функции Φ_0 ($0,07854, 0,02618, -0,02618, -0,07854$); 5, 6 – то же для функций τ ($0,97, 0,94$). На кромках лопастных систем (линии l_1-l_4) полагалось $\tau=1$. На фиг. 2 показаны также цилиндрические развертки средних сечений лопастей рабочего колеса и лопаточно-го отвода на радиусе $R=0,114$ м.

Расчет производился для параметров $Q=0,16 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$; $\omega=34,03 \text{ с}^{-1}$ (Q – расход). На входе в рассматриваемый участок проточной части (ли-



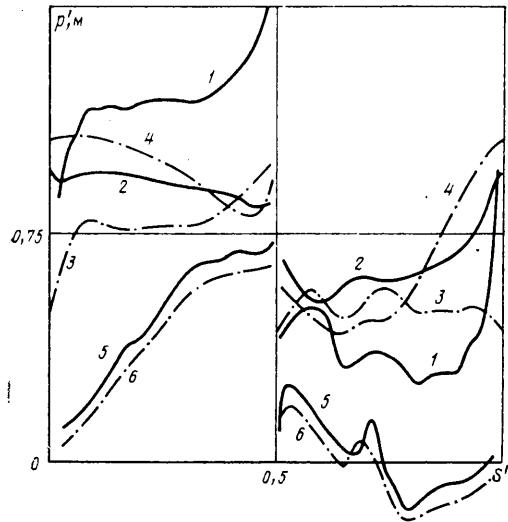
Фиг. 3

ния l_0 на фиг. 2) распределения интеграла Бернулли $G(\psi)$ и закрутки потока $\langle R c_3 \rangle(\psi)$ выбирались из эксперимента (кривые 1, 2 на фиг. 3, а; ψ' — безразмерная функция тока).

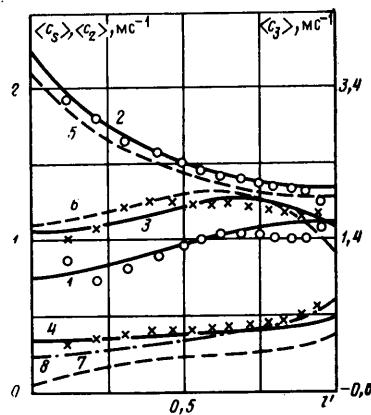
На фиг. 3, а приведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных по распределению гидродинамических параметров в сечении I—I при $Z=0,265$ м, на фиг. 3, б — в сечении II—II при $Z=0,465$ м (l' — безразмерная длина меридионального сечения). Здесь и далее штриховые линии — результаты осесимметричного расчета (метод I), штрих-пунктирные линии — результаты расчета по схеме однократного последовательного решения осесимметричной задачи и задачи обтекания решеток профилей в слое переменной толщины на поверхностях тока (метод II), сплошные линии — результаты квазитрехмерного расчета (метод III). На фиг. 3, а кривые 3, 4 и 5, 6 — распределения $\langle c_z \rangle$, $\langle c_3 \rangle$, полученные по методам III и I соответственно; кривая 7 — распределение $\langle c_3 \rangle$, полученное по методу II. Аналогично на фиг. 3, б кривые 1, 2 и 3, 4 — распределения $\langle c_z \rangle$, $\langle c_3 \rangle$, рассчитанные по методам III и I; кривая 5 — распределение $\langle c_3 \rangle$, полученное с помощью метода II. На фиг. 4 кривые 1, 3 и 2, 4 — распределения давления на лопасти рабочего колеса $p'=p \pm \rho^{-1} g^{-1}$ (см. (1.19), $g=9,81$ м \cdot с $^{-2}$) для периферийного ($R=0,175$ м) и втулочного ($R=0,0525$ м) сечений, рассчитанные с помощью методов III и II (S' — безразмерная длина вдоль профиля лопасти, отсчитываемая от выходной кромки против часовой стрелки).

Были произведены также расчеты для проточной части поворотно-лопастной гидротурбины (см. фиг. 1) с рабочим колесом (зона B) ПЛ-1075 ($N=8$) и радиальным направляющим аппаратом постоянного сечения (зона A), профиль лопатки которого в сечении $Z=\text{const}$ показан на фиг. 1 ($N=24$). Ось поворота лопатки направляющего аппарата расположена на окружности $R=0,59$ м. На фиг. 1 в зоне B кривые 1—4 — линии равных значений функции Φ_0 (0, 0,4039, 0,8078, 1,2117); кривые 5, 6 — линии равных значений τ (0,9; 0,8). На кромках лопастных систем (линии l_1-l_4) полагалось $\tau=1$.

На фиг. 5 приведены расчетные и экспериментальные распределения параметров в сечениях I—I и II—II для $Q=0,702$ м $^3\cdot$ с $^{-1}$; $\omega=11$ с $^{-1}$; $\varphi_1=0$, $\alpha=20$ (φ_1 — угол установки лопастей, α — на-



Фиг. 4



Фиг. 5

правляющих лопаток, отсчитываемый от закрытого положения направляющего аппарата). Во входном сечении перед направляющим аппаратом полагалось $G=9,81 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, $\langle R c_s \rangle = 0,36 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Кривые 1, 2 — распределения $\langle c_s \rangle$, $\langle c_z \rangle$ в сечении I—I, кривые 3, 4 — распределения $\langle c_z \rangle$, $\langle c_s \rangle$ в сечении II—II, полученные с помощью метода III. Кривая 5 — распределение $\langle c_s \rangle$ в сечении I—I, кривые 6, 7 — распределения $\langle c_z \rangle$, $\langle c_s \rangle$ в сечении II—II, полученные по методу I (при расчете с помощью метода I распределение $\langle c_s \rangle$ в сечении I—I практически совпадало с кривой 1). Кривая 8 — распределение $\langle c_s \rangle$ в сечении II—II, полученное по методу II (распределение $\langle c_s \rangle$ в сечении I—I, полученное с помощью метода II, практически совпадало с кривой 2). На фиг. 4 кривыми 5, 6 показаны распределения давлений $p' = p \pm \rho^{-1} g^{-1}$ на лопасти рабочего колеса для средней линии тока, рассчитанные соответственно по методам III и II (S' — безразмерная координата вдоль профиля, отсчитываемая по часовой стрелке). Различие указанных выше распределений давления практически на постоянную величину для рассматриваемого примера расчета объясняется разницей в определении интеграла Бернулли из-за различия $\langle R c_s \rangle$ на входе в рабочее колесо (см. кривые 2, 5 на фиг. 5).

Приведенные результаты квазитрехмерных расчетов показывают удовлетворительное согласование их с экспериментом. Следует отметить, что результаты, полученные на основе осесимметричного расчета (методы I и II), могут значительно отличаться (как количественно, так и качественно) от экспериментальных данных для лопастных систем с небольшой густотой. Для достаточно густых лопастных систем наблюдается удовлетворительное согласование численных результатов, полученных по упрощенной схеме с помощью однократного последовательного решения двух двумерных задач теории гидромашин (осесимметричной и «решеточной»), с данными экспериментов. Это обстоятельство позволяет существенно (более чем на порядок) сократить затраты машинного времени при расчетах течений в густых лопастных системах по указанной упрощенной схеме.

Автор благодарит А. И. Кузину и А. В. Гольдина за предоставленные материалы экспериментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
2. Заболотный Ф. Т. Расчет установившегося осесимметричного вихревого течения несжимаемой невязкой жидкости в радиально-осевой турбомашине // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 3. С. 147–155.
3. Сироткин Я. А. Осесимметричное вихревое течение в турбинной ступени на переменных режимах // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1983. № 2. С. 120–131.
4. Клинович В. И. Расчет течений в проточной части насос-турбин на основе решений прямой осесимметричной задачи теории гидромашин // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 12–19.
5. Эгинберг И. Э., Раухман Б. С. Гидродинамика гидравлических турбин. Л.: Машиностроение, 1978. 279 с.
6. Хирш, Варзе. Комбинированная программа расчета квазитрехмерного потока в турбомашинах методом конечных элементов // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Энергетические машины и установки. 1979. Т. 101. № 1. С. 151–159.
7. Дженнерионс, Стоу. Система квазитрехмерного проектирования лопаток турбомашин // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Энергетические машины и установки. 1985. Т. 107. № 2. С. 34–50.
8. Топаж Г. И. Расчет интегральных гидравлических показателей гидромашин. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 205 с.
9. Адлер. Современное состояние внутренней аэродинамики центробежного рабочего колеса. Ч. 1. Методы расчета невязкого течения // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Энергетические машины и установки. 1980. Т. 102. № 3. С. 193–206.
10. Lacor C., Hirsch Ch. Non-viscous three-dimensional rotational flow calculations in blade passages // Notes Numer. Fluid Mech. 1982. V. 5. P. 150–161.
11. Моргунов Г. М. Интегральный метод трехмерного расчета вихревого баротропного течения в турбомашинах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 3–12.

Ленинград

Поступила в редакцию
14.III.1990