

УДК 532.528

© 1991 г.

А. Л. ГОНОР, В. И. ЗАБУТНАЯ, Н. Н. ЯСЬКО

## О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО КАВИТАТОРА

В гидродинамике кавитационных течений задачам оптимизации кавитаторов уделено сравнительно мало внимания. Известны работы М. А. Лаврентьева [1] и Whitney A. [2], в которых показано, что в кирхгофской схеме течения профилем минимального кавитационного сопротивления, проходящем через две заданные точки, является контур, содержащий плоский торец и выпуклую дугу, представляющую свободную линию тока. Многочисленные расчеты и эксперименты по кавитационному обтеканию тел показывают, что коэффициент сопротивления  $C_{xk} = 2X/(\rho v_\infty^2 S_k)$ , отнесенный к площади мидела каверны, очень слабо зависит от формы тела и в основном определяется значением числа кавитации  $\sigma$  [3].

Систематические расчеты кавитационного обтекания клина по схеме Тулина показали [4], что зависимость коэффициента сопротивления  $C_x = 2X/(\rho v_\infty^2 S)$ , отнесенного к основанию клина, от угла клина имеет ярко выраженный минимум при малых углах раствора клина  $\alpha \sim 5-10^\circ$ . Обработка этих данных показала сильную зависимость  $C_{xk}$  от угла клина. Последнее обстоятельство наводит на мысль о существовании форм кавитаторов, имеющих  $C_{xk}$  меньше, чем у стандартных тел (диск, конус и т. д.).

В [5, 6] получены решения вариационной задачи о форме осесимметричного кавитатора минимального сопротивления при заданной ширине каверны. При этом распределение давления по поверхности тела находилось по приближенной формуле квадрата косинуса [7]. Коэффициент локального трения  $c_f$  предполагался постоянным. Оптимизация проводилась в классе каверн эллиптической формы при заданном числе кавитации  $\sigma$ . В указанной приближенной постановке найдено аналитическое решение для оптимальной формы кавитатора. Оптимальный кавитатор содержит впереди небольшой плоский торец радиуса  $r_0$ , переходящий в оживальную форму, заданную в параметрическом виде уравнениями

$$z = 2k^2 C_0 \int_{p_0}^p \frac{p(1+p^2)(p^2-3)}{[2k^2 p^3 - c_f(1+p^2)]^2} dp, \quad r = \frac{C_0(1+p^2)^2}{2k^2 p^3 - c_f(1+p^2)^2} \quad (1)$$

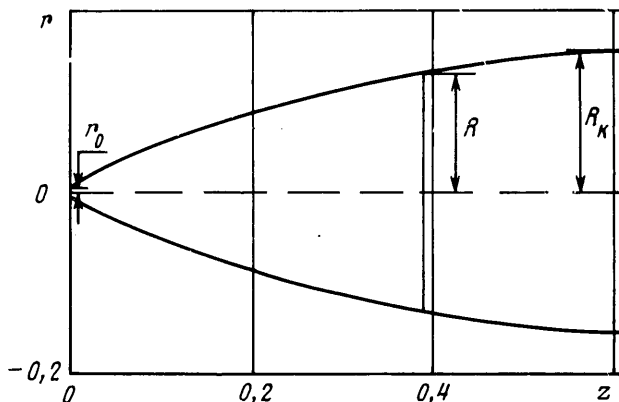
где параметр  $p=r'$ ,  $p_0$  — тангенс угла наклона касательной в начальной точке контура тела,  $k^2$ ,  $p_0$ ,  $C_0$  — параметры уравнения тела [5].

В данной работе представлены результаты точного численного расчета обтекания по схеме Рябушинского кавитатора оптимальной формы, определенной по приближенной теории [5]. Показано, что сопротивление  $C_{xk}$  указанного кавитатора меньше, чем у диска.

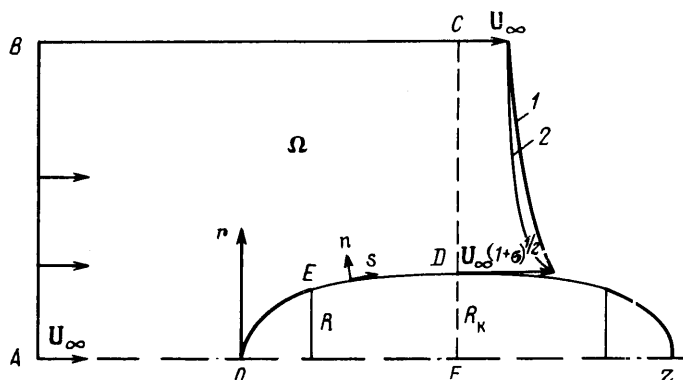
На фиг. 1 показана форма кавитатора и половины каверны, рассчитанные для  $\sigma=0,2$  и  $c_f=0,003$  в [5]. Форма кавитатора слабо зависит от величины коэффициента  $c_f$ .

Расчет коэффициента сопротивления  $C_{xk}$  кавитатора (фиг. 1) показал, что он меньше известных коэффициентов сопротивлений диска и конуса на 10% и более.

Представляет интерес проверить полученные данные методом точного численного счета. Предварительно в рамках точной постановки для схемы Рябушинского рассмотрим, какая возможность имеется для уменьшения кавитационного сопротивления за счет выбора формы кавитатора. В этой связи проанализируем величину сопротивления кавитатора с помощью теоремы количества движения, примененной к контуру, пока-



Фиг. 1



Фиг. 2

занному на фиг. 2. Части контура  $AB$  и  $BC$  достаточно удалены от тела, так что параметры течения на них можно считать невозмущенными. Тогда сопротивление симметричного тела целиком определяется распределением параметров на отрезке контура  $DC$  и имеет вид [3]

$$C_{xk} = \sigma - \frac{2}{R_k^2} \int_{R_k}^{\infty} \left( \frac{v_z^2}{v_{\infty}^2} - 1 \right) r dr$$

Распределение скорости (давления) на отрезке  $DC$  зависит от формы тела. В силу принципа максимума для гармонической функции распределение скорости должно монотонно убывать при удалении от каверны, причем чем круче будет спад кривой распределения, тем большее сопротивление будет иметь тело. Понятно, что в рамках модели потенциального обтекания коридор возможных кривых распределения сужается при  $\sigma \rightarrow 0$  и зависимость сопротивления от формы тела ослабевает. Таким образом, для умеренных чисел кавитации, не очень близких к нулю, при отрывном потенциальном обтекании можно ожидать существование тела с сопротивлением меньшим, чем у диска, когда суммарное сопротивление трения и сопротивление давления, соответствующее распределению 1 (фиг. 2), для тела будет меньше сопротивления, соответствующего распределению 2 для диска.

Одним из авторов, Н. Н. Ясько, был разработан алгоритм расчета кавитационного обтекания тел по схеме Рябушинского (фиг. 2) потенциаль-

ным потоком несжимаемой жидкости, основанный на решении нелинейных интегродифференциальных уравнений.

Рассмотрим осесимметричное обтекание тела в рамках схемы Рябушинского, т. е. предположим, что граница течения симметрична относительно некоторой плоскости  $CF$ , перпендикулярной направлению набегающего потока. Потенциальное осесимметричное течение несжимаемой жидкости в области  $\Omega$  описывается уравнением Лапласа для безразмерного потенциала возмущения  $\varphi$ . Составляющие скорости в направлении осей  $r$  и  $z$  имеют вид  $u = \partial\varphi/\partial r$ ,  $v = 1 + \partial\varphi/\partial z$ . Граница  $OED$  области  $\Omega$ , назовем ее  $S$ , состоит из участка твердой поверхности  $OE$  и свободной границы  $ED$ . Кривую  $S$  определим в параметрическом виде  $z = z(s)$ ,  $r = r(s)$ , где  $s$  — длина дуги текущей точки поверхности. На всей границе  $S$  потенциал возмущений удовлетворяет кинематическому граничному условию (непротекания), а на участке свободной границы, кроме того, динамическому условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -r'(s), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = U_0 - z'(s) \quad (2)$$

где  $U_0$  — безразмерная скорость на свободной поверхности, отнесенная к  $v_\infty$ .

Схема струйного обтекания по Рябушинскому является однопараметрической, в качестве параметра удобно задавать длину дуги свободной поверхности  $s_*(ED)$ . Все линейные размеры отнесены к радиусу миделя тела  $R$ .

Пусть известно некоторое приближение свободной границы  $r_0(s)$  и  $z_0(s)$ . Потенциал возмущений  $\varphi$  на свободной границе можно определить, проинтегрировав уравнение (2) с граничным условием  $\varphi_D = \varphi(s_*) = 0$

$$\varphi(s) = z_D(s) - z_0(s) + U_0(s - s_*) \quad (3)$$

где  $z_D$  — длина каверны до миделя.

Для определения  $\varphi$  из уравнения Лапласа с граничным условием (2) на твердой поверхности и условием (3) на свободной границе воспользуемся методом конечных элементов [8].

Границу  $S$  аппроксимируем с помощью  $N+L$  прямолинейных отрезков (граничных элементов), где  $N$  — количество элементов на свободной границе,  $L$  — на поверхности тела. Величины, определенные в центре  $i$ -го граничного элемента, обозначаются индексом  $i$ .

Граничное интегральное уравнение, соответствующее этой задаче, имеет вид [8]

$$\frac{1}{2} \varphi(M) = \int_S \left\{ \frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_p} [G_1(M, P) - G_1(M_1, P)] + \right. \\ \left. + \varphi(P) [G_2(M, P) - G_2(M_1, P)] \right\} dS_p \quad (4)$$

$$G_1(M, P) = \frac{1}{\pi} \rho [(\rho+r)^2 + (\xi-z)^2]^{-1/2} K(k)$$

$$G_2(M, P) = \frac{1}{2\pi} [(\rho+r)^2 + (\xi-z)^2]^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{2\rho(\xi-z)n_z - [(\xi-z)^2 + r^2 - \rho^2]n_r}{(\rho-r)^2 + (\xi-z)^2} E(k) + n_r K(k) \right\}$$

$$k^2 = 4r\rho [(\rho+r)^2 + (\xi+z)^2]^{-1}$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы,  $n_p = \{n_r, n_z\}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $S$  в точке  $P$ ,  $M(r, z)$  и  $P(\rho, \xi)$  — точки на  $S$ , которая полагается гладкой кривой, а  $M_1(r, 2z_D - z)$  — точка, симметричная  $M$  относительно плоскости симметрии  $DF$  (фиг. 2).

Уравнение (4) — интегральное уравнение смешанного типа: на твердой границе искомой является функция  $\varphi(s)$ , на свободной границе —  $\partial\varphi(s)/\partial n$ . Применяя к (4) квадратурную формулу второго порядка точности, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\partial\varphi/\partial n$  или  $\varphi$  на свободной или твердой границе соответственно

$$\frac{1}{2} \varphi_i = A_{ij} \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} + B_{ij}\varphi_j, \quad i, j = 1, \dots, N+L \quad (5)$$

$$A_{ij} = \int_{S_j} [G_1(P_i, P) - G_1(P_{1i}, P)] dS_p, \quad B_{ij} = \int_{S_j} [G_2(P_i, P) - G_2(P_{1i}, P)] dS_p$$

Здесь по повторяющимся индексам проводится суммирование,  $P_i$  — точки в середине  $i$ -го граничного элемента.

Интегралы вычислялись численно методом Гаусса с четырьмя узлами, а в случае  $i=j$ , когда подынтегральная функция имеет особенность, — методом Канторовича с выделением особенности [9].

Система (5) может быть представлена в виде

$$C_{ij}X_j = F_i \quad (6)$$

$$C_{ij} = A_{ij}, \quad j \leq N; \quad C_{ij} = B_{ij} - 0,5\delta_{ij}, \quad N < j \leq N+L$$

$$X_j = \frac{\partial\varphi_j}{\partial n}, \quad j \leq N; \quad X_j = \varphi_j, \quad N < j \leq N+L$$

$$F_i = D_{ij}Y_j, \quad D_{ij} = 0,5\delta_{ij} - B_{ij}, \quad j \leq N; \quad D_{ij} = -A_{ij}$$

$$N < j \leq N+L; \quad Y_j = \varphi_j, \quad j \leq N; \quad Y_j = \frac{\partial\varphi_j}{\partial n}, \quad N < j \leq N+L$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

В системе (6) неизвестной является также величина скорости на свободной границе  $U_0$ . Для определения  $U_0$  получим дополнительное уравнение, приравняв значение потенциала в точке схода свободной границы, полученное по формуле (3), к значению, полученному линейной экстраполяцией по двум соседним точкам на твердой поверхности

$$z_D - z_0(E) - U_0 s_* = \varphi_{N+1} + (\varphi_{N+1} - \varphi_{N+2}) \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_{N+1} + \Delta_{N+2}} \quad (7)$$

где  $\Delta_i$  — длина  $i$ -го граничного элемента.

Система  $N+L$  уравнений (5) и уравнение (7) решались численно методом исключения Гаусса с выбором ведущего элемента.

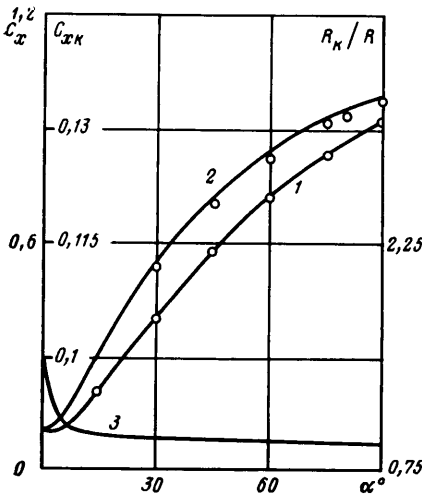
Новое положение свободной границы находилось интегрированием соотношений

$$r_i' = \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \left[ \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \right)^2 + z_{0i}'^2 \right]^{-1/2}, \quad z_i' = \text{sign}(r_{i+1}' - r_i') \sqrt{1 - r_i'^2} \quad (8)$$

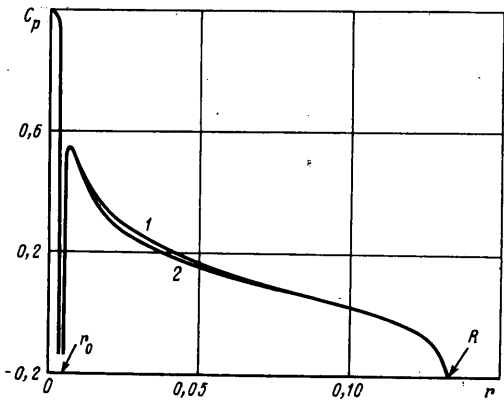
с начальными условиями  $r(0) = r_E$ ,  $z(0) = z_E$ . Заметим, что в случае сходимости итерационного процесса (8) переходит в (2).

Итерационный процесс повторялся до тех пор, пока два последовательных приближения свободной границы не совпадали с требуемой точностью  $\varepsilon < 10^{-4}$ , где  $\varepsilon$  — абсолютная величина максимального расстояния между точками (узлами) на границе каверны  $i+1$  и  $i$  приближений. Заметим, что начальное приближение для свободной границы должно быть близким к решению и должно удовлетворять крайним условиям о непрерывности касательной в точке схода струй и в плоскости симметрии  $DF$ .

По описанному выше алгоритму было рассчитано кавитационное обтекание дисков, конусов и других тел и проведено сравнение результатов расчета с известными данными [10, 11]. На фиг. 3 дана зависимость



Фиг. 3



Фиг. 4

коэффициента сопротивления  $C_x$  (кривая 1) и радиуса каверны  $R_k/R$  (кривая 2) для конусов от угла полураствора конуса  $\alpha \in (0, 90^\circ)$  при  $\sigma=0,1$ . На интервале  $\alpha \in [15^\circ, 90^\circ]$  максимальная относительная погрешность определения  $C_x$  составляет 1%, а  $R_k/R \sim 2\%$  в сравнении с расчетами [10] (данные [10] отмечены на фиг. 3 точками). При этом коэффициент сопротивления  $C_{xk}$ , определенный по данным расчета, с увеличением угла полураствора конуса заметно падает (см. кривую 3 на фиг. 3) до  $\alpha \sim 20^\circ$ , сохраняя в дальнейшем почти постоянное значение.

Сравнение с расчетами [11] дает максимальную относительную погрешность определения  $C_x$  и  $R_k/R$  порядка 1,5%. Так, для  $\sigma=0,1048$  по данным [11],  $C_x=0,915$ ,  $R_k/R=3,109$ , по предложенному методу  $C_x=0,9265$ ,  $R_k/R=3,15$ , а для  $\sigma=0,1477$   $C_x=0,9516$  и  $0,9643$ ,  $R_k/R=2,678$  и  $2,72$  соответственно.

Численные результаты, приведенные в работе, получены при варьировании числа узлов на теле  $L=20-60$  и на свободной границе  $N=30-5$ .

Для оптимального кавитатора (фиг. 1) расчеты были выполнены двумя различными численными методами. Сравнение результатов по коэффициенту давления  $C_p$  показано на фиг. 4, где кривая 1 — данные для оптимального кавитатора, полученные по просьбе авторов Э. Л. Амроминым (по численному методу [12]), кривая 2 — расчет по предложенному методу. Совпадение расчетов давления по разным методам достаточно хорошее.

Указанным методом был также проведен расчет кавитационного обтекания оптимальных кавитаторов, рассчитанных по формулам (1) при различных значениях  $\sigma$  и  $c_f=0,003$ . Данные по коэффициенту сопротивления  $C_{xk}$  и данные соответствующего расчета для диска приведены ниже:

$\sigma$	0,1	0,125	0,15	0,175
$C_{xk}$ (диск)	0,0887	0,112	0,1328	0,1546
$C_{xk}$ (оптим. тело)	0,081	0,102	0,125	0,150

Сопоставление результатов показывает, что в диапазоне чисел кавитации  $\sigma=0,1-0,175$  получено уменьшение сопротивления при переходе к оптимальному кавитатору на 7%.

Авторы выражают глубокую признательность Г. Ю. Степанову за ценные замечания, высказанные при подготовке данной работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. А.* О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй // *Мат. сб.* 1938. Т. 4. № 3. С. 391–458.
2. *Whitney A. K.* Theory of optimum shapes in free-surface flows. Pt 2. // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 55. № 3. P. 457–472.
3. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
4. *Терентьев А. Г.* Математические вопросы кавитации: Учебн. пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 1981. 131 с.
5. *Гонор А. Л., Забутная В. И.* Вариационная задача о кавитационном сопротивлении тела вращения // *Математическое моделирование нестационарных задач механики сплошных сред.* М., 1985. С. 7–14.
6. *Гонор А. Л., Забутная В. И.* Определение формы кавитатора минимального сопротивления при обтекании потоком жидкости // *Струйные и отрывные течения.* М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 70–77.
7. *Гонор А. Л.* Определение поля течения на поверхности некоторых тел в потоке несжимаемой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1976. № 2. С. 187–190.
8. *Брербия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. *Демидович Б. П., Марон П. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
10. *Гузевский Л. Г.* Численный анализ кавитационных течений: Препринт № 40–79. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1979. 36 с.
11. *Кожуро Л. А.* Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1980. Т. 11. № 5. С. 109–115.
12. *Амромин Э. Л., Иванов А. Н.* Осесимметричное обтекание тел в режиме развитой кавитации // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1975. № 3. С. 37–42.

Москва,  
Днепропетровск

Поступила в редакцию  
5.I.1990