

УДК 532.525.3:532.68:537.3

© 1991 г.

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, П. М. МУСАБЕКОВ, А. Я. РУДНИЦКИЙ,  
К. УМАРКУЛОВ

## О НЕМОНОДИСПЕРСНОМ РАСПАДЕ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Электризация капиллярных струй оказывает сильное влияние на их устойчивость [1–10]. Известные теоретические работы посвящены линейной [1–6], слаболинейной [7] или конечно-амплитудной [10] устойчивости таких струй в постоянном электрическом поле.

В данной работе исследование проводится в рамках полных нелинейных уравнений; основное внимание уделено эффектам, связанным с учетом переменного по времени электрического поля. Показано, что резкое уменьшение поверхностного заряда может приводить к значительному уменьшению размеров капель-сателлитов; учет длиноволнового фона также приводит к уменьшению размеров капель-сателлитов. Резкое увеличение поверхностного заряда, наоборот, увеличивает относительный вклад капель-спутников. При этом введение мелкомасштабных «фоновых» возмущений может приводить к уменьшению вклада мелких капель-спутников и к ослаблению их реакции на резко увеличивающееся электрическое поле.

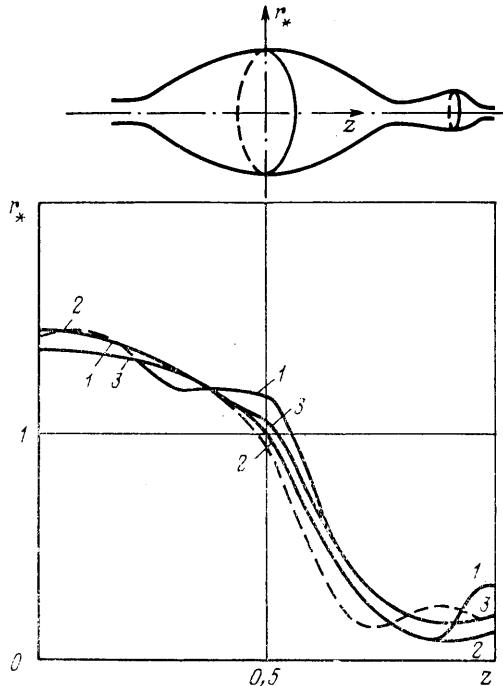
Установлена возможность увеличения степени монодисперсности с помощью относительно медленно изменяющегося во времени электрического поля. Обнаружен эффект «осредненного» воздействия быстро изменяющегося во времени электрического поля. Значительное увеличение начальной амплитуды возмущения при периодически изменяющемся электрическом поле может приводить к существенному увеличению степени монодисперсности. Введение коротковолновых возмущений при периодическом электрическом поле с большой амплитудой пульсаций может приводить к исчезновению капель-сателлитов.

1. Рассматривается цилиндрический столб жидкости радиуса  $r$ , на который наложены осесимметричные возмущения. Задача сводится к решению уравнений Лапласа для потенциала скорости  $\Phi$  и электрического потенциала  $\varphi$  [10]

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0, \quad 0 \leq r \leq r_* = a + \xi(z, t) \\ \Delta\varphi &= 0, \quad r \geq r_* \end{aligned} \tag{1.1}$$

На возмущенной границе струи  $r=r_*$  ставятся обычные кинематические и динамические граничные условия [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial t} &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial\xi}{\partial z} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ p_0 &= \kappa T - p_1; \\ p_0 &= \rho \left\{ -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + c(t) \right\} \\ p_1 &= \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2 \left( \frac{1}{8\pi} \right) \end{aligned} \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Здесь  $\kappa$  — кривизна поверхности струи,  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $p_1$  — электростатическое давление,  $p_0$  — гидродинамическое давление,  $c$  — константа интегрирования,  $\rho$  — плотность жидкости,  $n$  — внешняя нормаль к поверхности струи (см. фиг. 1).

Вычитая из первого соотношения (1.2) члены, отвечающие невозмущенному состоянию, с учетом двух других легко получить

$$-\rho \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = T(\kappa - \kappa^0) \frac{1}{8\pi} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 - \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right)^2 \right]_{r=r_*} \quad (1.3)$$

Здесь  $\kappa^0 = 1/a$  — кривизна кругового цилиндра,  $\Phi_0$  — потенциал заряженного кругового цилиндра.

Так как жидкость считается идеальным проводником, выполняются условия ограниченности и задаются начальные распределения, то

$$\Phi = 0, \quad r = r_*, \quad |\Phi| < \infty, \quad r = 0, \quad |\Phi| < \infty, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

$$\Phi(z, r, 0) = \Phi_0(z, r), \quad \xi(z, 0) = \xi_0(z) \quad (1.5)$$

В качестве характерных масштабов выберем следующие: линейный размер  $a$ , скорость  $V_* = (T/\rho a)^{1/2}$ , время  $a/V_*$ , электрический потенциал  $\Phi_0$ . Нетрудно видеть, что в безразмерных переменных вид соотношений (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5) останется прежним, а изменяется лишь динамическое условие (1.3) (обозначения сохраняются)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - (\kappa - 1) + b(t) \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 - 1 \right] \\ \kappa &= \frac{1}{[1 + (\partial \xi / \partial z)^2]^{\kappa}} \left\{ \frac{1}{1 + \xi} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$b = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial \varphi^o}{\partial n} \right)^2 \frac{a}{T}$$

Величина  $b(t)$  характеризует соотношение электростатических сил и сил поверхностного натяжения. Этую величину для дальнейшего удобно определить через заряд  $Q(t)$ , приходящийся на единицу длины невозмущенной струи в данный момент времени:  $b = -Q^2/(Ta)$ .

2. Искомое решение представляется в следующем виде [10]:

$$\Phi = \sum_{n=0}^N I_0(n\alpha r) [\Phi_n^{(1)}(t) \cos(n\alpha z) + \Phi_n^{(2)}(t) \sin n\alpha z] \quad (2.1)$$

$$\varphi = A \left\{ \sum_{n=0}^N K_0(n\alpha r) [\varphi_n^{(1)}(t) \cos n\alpha z + \varphi_n^{(2)}(t) \sin n\alpha z] + \ln r \right\} \quad (2.2)$$

$$\xi = \sum_{n=0}^N [\xi_n^{(1)}(t) \cos n\alpha z + \xi_n^{(2)}(t) \sin n\alpha z] \quad (2.3)$$

Здесь  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  — модифицированные функции Бесселя I и II рода соответственно,  $\alpha > 0$  — волновое число.

Первое условие (1.4) служит для определения электростатического давления, входящего в динамическое условие (1.6). Для определения величины  $A$  будем использовать следующее соотношение: при  $r=r_*$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\alpha} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) f dz = q \frac{2\pi}{\alpha} f = r_* \sqrt{1 + \xi_z^2} \quad (2.4)$$

Для реализации изложенного подхода были разработаны два численных алгоритма. В основе первого алгоритма лежит методика, применявшаяся в [10–13]. Эта методика в точности реализует галерkinскую процедуру.

В данной работе использовался также другой алгоритм, отличающийся организацией процесса проектирования. Использовался численный гармонический анализ [14], широко применяющийся при решении различных задач гидродинамической устойчивости [14]. При этом Фурье-разложения (2.1)–(2.3) подставляются в уравнения (1.2), (1.4) и (1.6) и в точках  $z_j = (2\pi/\alpha)(j/N_s)$  ( $j=0, 1, \dots, N_s-1$ ) вычисляются все входящие в уравнения слагаемые. Для формирования искомой системы уравнений относительно амплитуд  $\Phi_n^{(i)}$ ,  $\xi_n^{(i)}$ ,  $\varphi_n^{(i)}$  выполняется обратный переход путем дискретного Фурье-преобразования, т. е. находятся коэффициенты разложения полученных правых и левых частей (1.3) и (1.6) при гармониках  $\cos n\alpha z$  и  $\sin n\alpha z$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ) в точках  $z=z_j$ .

Проведенные методические расчеты показали, что оба подхода дают результаты, различающиеся не более чем на 0,1%, однако при использовании второй методики время счета на ЭВМ сокращается в 2,0–2,5 раза.

3. В данном разделе основное внимание уделено исследованию влияния на устойчивость струи резкого изменения заряда  $q=Q/\sqrt{2Ta}$ , приходящегося на единицу длины струи:

$$q=q_0 \quad (0 \leq t \leq t_*), \quad q=q_1 \quad (t \geq t_*) \quad (3.1)$$

Начальные данные задавались в следующем виде:

$$\xi(z, 0) = 1 + \delta \cos \alpha z, \quad \Phi(r, z, 0) = 0 \quad (3.2)$$

На фиг. 1 приведены зависимости  $r_*(z')$  ( $z' = z\alpha/\pi$ ) при  $q_0 = 1,5$ ;  $q_1 = -1,0$ ;  $\alpha = 1,14$ ;  $\delta_0 = 0,1$  для значений  $t_* = 4; 3$  и  $2$  (кривые 1–3). Здесь же для сравнения штриховой линией изображена зависимость  $r_*(z)$  для

$q_0=q_1=1,5$  (выбранное значение волнового числа соответствует наиболее быстро растущему возмущению по линейной теории  $\alpha_m$  (при  $q_0=1,5$ , т. е.  $\alpha_m=1,14$ ). Приведенные зависимости показывают, что с уменьшением  $t_*$  капля-сателлит существенно уменьшается, причем при  $t_*=2$  сателлит фактически исчезает, вырождаясь в перетяжку (кривая 3). При этом время распада струи  $t_p$  несколько увеличивается, изменяясь от 5,1 при  $t_*=4$  до 5,7 при  $t_*=2$ .

Обнаруженный эффект существенного уменьшения сателлита объясняется тем, что начальная стадия развития возмущений протекает при  $\alpha=\alpha_m(1,5)=1,14$ , а на заключительной стадии распада это волновое число становится близким к значению  $\alpha_c(1,0)=1,18$ . Здесь  $\alpha_c(q_1)$  – волновое число, разделяющее области устойчивости и неустойчивости струи при заряде  $q=\text{const}$ . Для  $q=\text{const}$  при приближении  $\alpha$  к величине  $\alpha_c$  сателлит резко уменьшается [10].

Полученный эффект существенно связан с нелинейной стадией развития возмущений. Чтобы продемонстрировать это более наглядно, уменьшим значение  $q_1$ , взяв его равным 0,8. В этом случае  $\alpha_m(q_0)>\alpha_c(q_1)$ , т. е. величина  $\alpha_m(q_0)$  лежит в области устойчивости для заряда  $q=q_1$ . Результаты расчетов, выполненных для этого случая, показывают, что, как и в предыдущем случае, наблюдается эффект уменьшения сателлита при уменьшении  $t_*$ . Таким образом, область конечно-амплитудной неустойчивости расширяется по сравнению с линейным случаем. Отметим, что при  $t_*=2$  амплитуда основной гармоники  $\xi_1^{(1)}=0,17$ , при  $t_*=3$   $\xi_1^{(1)}=0,27$  и при  $t_*=4$   $\xi_1^{(1)}=0,45$ .

Однако, если и далее уменьшать величину  $q_1$  при фиксированном  $q_0$ , может оказаться, что внезапное уменьшение заряда стабилизирует струю. Так происходит, например, при  $q_1=0$  и  $t_*=2$  (все остальные параметры остаются неизменными).

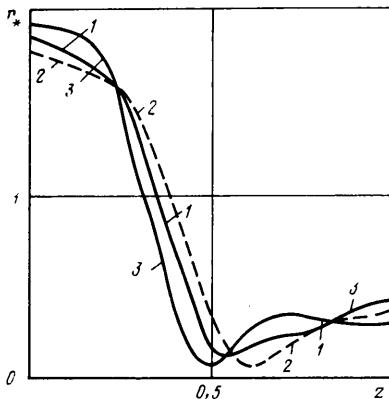
Уменьшение  $q_0$  при фиксированном  $q_1$  позволяет расширить диапазон значений  $t_*$ , обеспечивающих сохранение обнаруженного эффекта. Так, анализ зависимостей  $r_*(z^1)$  для случая  $q_0=1,3$ ,  $q_1=0$ ,  $\delta_0=0,1$ ,  $\alpha=\alpha_m(q_0)=1,0$  при  $t_*=5; 4; 3; 2$ , (а также при  $q_1=q_0=1,3$ ) показал, что уже при  $t_*=5$  сателлит значительно уменьшается (на  $\sim 10\%$ ). При дальнейшем уменьшении значения  $t_*$  размеры сателлита все более уменьшаются и при  $t_*=3$  он вырождается в перетяжку, результаты расчета для  $t_*=3$  и 2 фактически совпадают. Это означает, что начиная с некоторой амплитуды развития возмущений происходит одинаково (время распада  $t_*$  при  $q_1=q_0=1,3$  равно 5,95;  $r^*(t_*)=0$ ).

Рассмотрим часть спектра вблизи  $\alpha_m(q_1)$ . Расчеты были проведены при

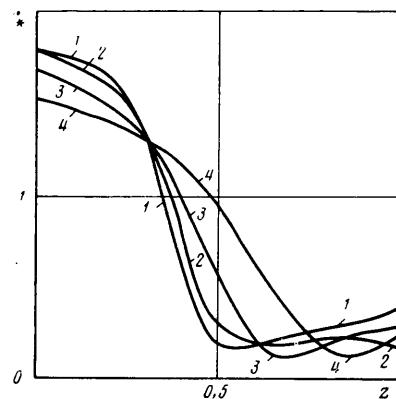
$$\xi(z, 0) = 1 + \delta_{01} \cos \alpha z + \delta_{02} \cos 2\alpha z \quad (3.3)$$

для различных значений  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $t_*$ ,  $\delta_{01}$ ,  $\alpha$  и при  $\delta_{02}=0,1$ . Рассмотрим случай:  $q_0=1,5$ ,  $q_1=0$ ,  $\alpha=0,57$ . Расчеты проводились при  $N=12$  и с удвоенным количеством точек дискретизации  $N_s=48$ . Значение  $\alpha$  выбрано так, что  $\alpha_m(q_0)=1,14=2\alpha$ , с одной стороны, а с другой – величина  $\alpha=0,57$  находилась вблизи значения  $\alpha_m(q_1)$ . Сравнение зависимостей  $r_*(z^1)$  для значения  $t_*=3$  при  $\delta_{01}=0,02, 0,05$  и 0 показывает, что крупномасштабный «фон» оказывает влияние на распад струи только при достаточно большой своей амплитуде (при  $\delta_{01}=0,02$  распад струи происходит практически так же, как и без фона). В целом, учет фона лишь усиливает эффект уменьшения сателлита. Объясняется это, по-видимому, общим влиянием крупномасштабных составляющих спектра на процесс распада струи.

Рассмотрим начальные данные типа (3.2). На фиг. 2 даны зависимости  $r_*(z)$  для следующих вариантов:  $q_0=0$ ,  $q_1=1,3$ ,  $\alpha=\alpha_m(q_0)=0,7$ ,  $\delta_0=-0,1$ ,  $t_*=6, 4, 3$  (кривые 1–3), а также для варианта  $q_0=q_1=0$  (штрихованная кривая 4).



Фиг. 2



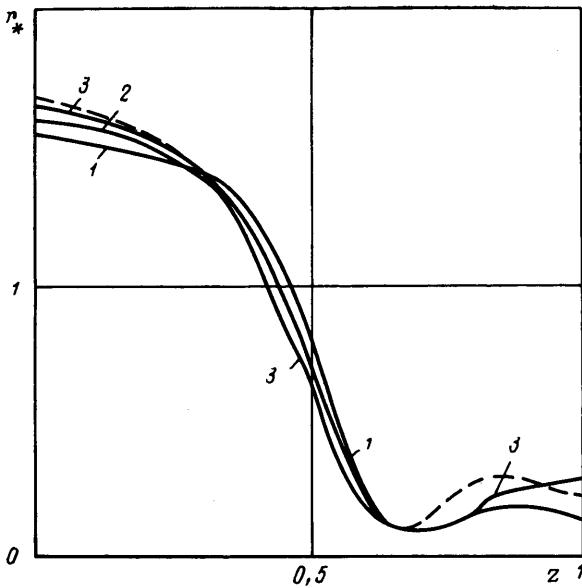
Фиг. 3

вая линия). Отметим, что время распада  $t_p$  при  $q_1=0$  составляет 7,85. Как и следовало ожидать, скачкообразное увеличение заряда оказывает на динамику распада струи обратный эффект по сравнению со случаем уменьшения заряда и приводит к существенному увеличению сателлита. Причем структура сателлита при этом заметно изменяется. Так же как и в случае  $q_0 > q_1$ , при  $q_0 = q_1$  уменьшение  $t_*$  приводит к увеличению эффекта. «Обратный» эффект объясняется тем, что увеличение заряда изменяет «эффективное» волновое число, но в сторону длинных волн.

При  $q_0 < q_1$  в области неустойчивости (при  $q=q_1$ ) может оказаться, например, вторая гармоника. Более того, величина  $2\alpha$  может быть близкой к значению  $\alpha_m(q_1)$ . Тогда при  $t > t_*$  эта гармоника должна начать интенсивно нарастать из-за собственной неустойчивости, а не только из-за нелинейного взаимодействия. В силу этого, при достаточно малых величинах  $t_*$  рост второй гармоники будет оказывать влияние на процесс распада струи при скачкообразном увеличении заряда.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть  $q_0=0$ ,  $q_1=1,5$  и  $\alpha=0,6$ . При этом первая гармоника лежит вблизи  $\alpha_m(q_0)$ , а вторая — вблизи  $\alpha_m(q_1)$  (начальные данные задаются в виде (3.3)). Третья гармоника ( $\alpha=1,8$ ) лежит вне области неустойчивости при  $q=1,5$ , так как  $\alpha_c(1,5)=1,58$ . Сопоставление зависимостей  $r_*(z)$  при  $\delta_{02}=0,02$  ( $\delta_{01}=0,1$ ) для различных значений  $t_*$  (6, 4 и 3) показывает, что форма струи при введении коротковолнового фона изменяется с уменьшением  $t_*$  незначительно. Причем изменения касаются в основном большой капли. Сателлит же практически не изменяется. Таким образом, коротковолновый фон как бы замораживает процесс распада струи, делая его менее чувствительным к резкому увеличению величины заряда.

В то же время увеличение амплитуды второй гармоники оказывает значительное влияние на процесс распада струи независимо от того, изменяется ли величина  $q$  и вообще заряжена струя или нет. На фиг. 3 приведены зависимости при  $q_0=0$ ,  $q_1=1,5$ ,  $t_*=3$ ,  $\delta_{01}=0,1$ ,  $\alpha=0,6$  для различных значений амплитуды коротковолнового фона: для  $\delta_{02}=0,02$ ,  $0,05$ ,  $0,1$  (кривые 1–3). Увеличение амплитуды коротковолнового фона приводит к значительному уменьшению сателлита и к уплощению основной большой капли, причем особенно заметно форма струи на конечной стадии распада меняется при величине  $\delta_{02} \geq 0,05$  (кривые 2, 3). В том случае, когда  $q=0$ , наличие фона оказывает на процесс распада качественно такое же влияние, как и при  $q \neq 0$ , однако степень этого влияния несколько ослабляется. Во всех рассмотренных вариантах расчета увеличение амплитуды фона приводит к уменьшению времени распада струи. Например,



Фиг. 4

$\alpha=0,6$ ,  $\delta=0,1$ ,  $q=1,5$ ,  $t_*=3$ , время  $t_p$  уменьшается от 8,45 при  $\delta_{02}=0,02$  до 7,5 при  $\delta_{02}=0,1$ .

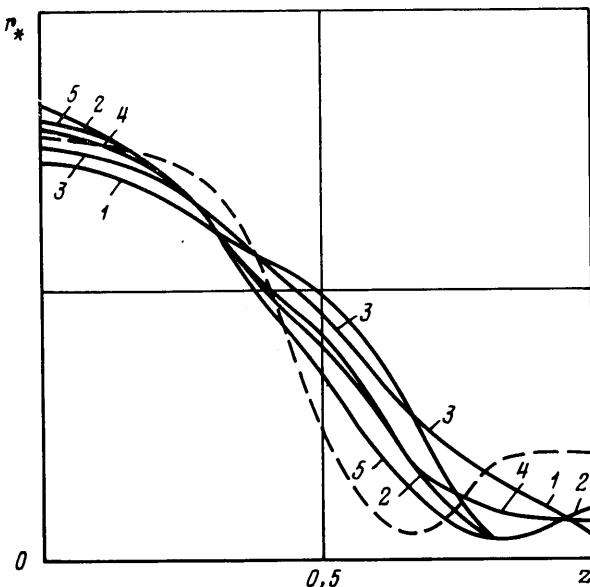
4. В данном разделе рассматривается влияние переменного поля

$$q(t)=q_0+q_1 \cos \omega t \quad (4.1)$$

На фиг. 4 приведены зависимости  $r_*(z)$  при  $q_0=1,2$ ;  $q_1=0,4$ ;  $\alpha=\alpha_m(q_0)=0,92$ ;  $\delta_0=0,1$  для значений  $\omega$ . Кривые 1–3 соответствуют  $\omega=0,5$ ; 1,2. Штриховая кривая отвечает случаю  $q_1=0$  (заряд постоянен). Отметим, что время распада струи при  $q=0$ ,  $q_0=1,2$  составляет  $t_p=6,4$ , поэтому при  $\omega=1$  период изменения заряда  $q(t)$  приблизительно равен  $t_p$ , а при  $\omega=0,5$  и 2 период изменения заряда соответственно вдвое меньше или вдвое больше времени  $t_p$ . В случае  $\omega=0,5$  (фиг. 4) размер сателлита уменьшается по сравнению с  $q_1=0$ ,  $q_0=1,2$  (кривая 2 и штриховая линия). Но уже при  $\omega=1$  отличие формы струи на конечной стадии распада от случая постоянного заряда весьма познательно. При дальнейшем увеличении  $\omega$  (до  $\omega=3$ ) зависимость  $r_*(z)$  с точностью до изображения совпадает со случаем  $q=\text{const}=1,2$ . Отметим, что время распада при  $\omega=0,5$  равно 5,8, что несколько меньше времени  $t_p$  при  $q_1=0$ ,  $q_0=1,2$ .

Снова проявляется эффект уменьшения сателлита при уменьшении заряда (в процессе распада струи при  $\omega=0,5$  заряд изменяется от 1,6 до 0,8). При превышении величиной  $q_1$  некоторого порога, процесс распада перестает зависеть от величины  $q_1$ . Так, при  $q_0=0,8$ ;  $\alpha=\alpha_m(q_0)=0,8$ ;  $\delta_0=-0,1$  и  $\omega=0,5$  при изменении  $q_1$  от 0,2 до 0,8 результат практически не изменяется. Значение  $q_1=0,8$  является в этом случае предельным, так как минимальное значение заряда при этом равно нулю. При других значениях величины  $q_0$  зависимость результатов от  $q_1$  качественно не изменяется.

Сравнение численных данных показывает, что уменьшение  $\delta_0$  от 0,1 до 0,05 практически не изменяет результатов. При увеличении амплитуды до  $\delta=0,2$  происходит общее уменьшение капель-сателлитов. При этом влияние переменности  $q$  существенно уменьшается. Это можно объяснить уменьшением времени распада струи, так что нелинейные процессы, от-



Фиг. 5

ветственные за эффекты, связанные с переменностью  $q(t)$ , не успевают проявиться. Отсюда следует, что для эффективного управления процессом распада струи при помощи изменения по времени заряда начальный уровень возмущений в струе должен быть достаточно мал (не более 10%). Отметим, что при достаточно большой амплитуде колебаний заряда II гармоника может оказаться в области неустойчивости. Поэтому если в начальном спектре имеется возмущение с волновым числом  $2\alpha$ , то это может приводить к заметному изменению результатов.

Пример расчета представлен на фиг. 5. Начальные данные задаются в виде (3.3),  $q_0=0,8$ ,  $q_1=0,8$ ,  $\delta_{01}=\delta_{02}=0,1$ ,  $\alpha=0,8$ . Кривые 1–5 соответствуют значениям  $\omega=0,5$ ; 1; 3; 6; 10. Штриховая линия отвечает случаю  $q_1=0$ ,  $q_0=0,8$ . Приведенные зависимости  $r_*(z)$  показывают отсутствие эффекта «осреднения» заряда даже при  $\omega=10$  (ср. кривую 5 и штриховую линию) и немонотонную зависимость размера сателлита от величины  $\omega$  (так, при  $\omega=3$  (кривая 3) сателлит вообще отсутствует). Важно, что эффекты, связанные с переменностью  $q(t)$ , усиливаются по сравнению со случаем  $\delta_{02}=0$ .

В рассмотренном примере параметры выбраны таким образом, чтобы специально продемонстрировать влияние фона. Расчеты, проведенные для других значений параметров и, в частности, для меньших значений  $\delta_{02}$  ( $\delta_{02}=0,01$ ; 0,02; 0,05), показали, что отмеченные закономерности полностью сохраняются.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что при наличии внешнего управляющего параметра, в данном случае переменного электрического поля, моделируемого переменным зарядом, можно влиять на процесс распада вполне определенным предсказуемым образом и, в частности, воздействовать на степень монодисперсности распаша.

5. В работе проведено также экспериментальное исследование устойчивости капиллярных струй в присутствии постоянного электрического поля. На жидкую струю, горизонтально вытекающую из тонкой трубы с внутренним диаметром 0,5 мм и длиной 10 см под избыточным давлением в 1 атм, и на соосный кольцевой электрод с внутренним радиусом

в 2 см, окружающий эту струю на выходе из сопла, подавалось соответственно отрицательное и положительное высокое напряжение ( $0 < U \leq 8$  кВт). При этом наблюдалось заметное уменьшение размеров основных капель примерно на 40%. Показана также тенденция к «спариванию» капель как для нейтральных, так и для заряженных струй. Причем с увеличением заряда эта тенденция вначале усиливается, затем, начиная примерно с  $U=7$  кВт, наоборот, ослабляется. Спаривание капель объясняется ростом низкочастотных спектральных составляющих (в данном случае субгармоники с волновым числом  $\alpha/2$ ). Аналогичным образом объясняется довольно частое явление разрыва струи на несколько крупных кусков — при этом могут выделяться составляющие спектра с  $\alpha/3$ ,  $\alpha/4$  и т. п. Эти экспериментальные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с расчетными данными об увеличении роли «ундертонов» при ненулевых зарядах. Некоторое ослабление этого эффекта при дальнейшем увеличении заряда объясняется, по-видимому, наблюдаемым возникновением трехмерных возмущений.

В полном соответствии с расчетами при увеличении напряжения (или заряда на поверхности струи) наблюдается ускорение распада, сближение капель, уменьшение и уточнение перешейка между ними, из которого и происходит в дальнейшем образование мелких капель-сателлитов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рэлей (Дж. В. Стретт). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
2. Френкель Я. И., Вагер Г. П. Действие электрического поля на струю жидкости // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1948. Т. 12. № 1. С. 3–6.
3. Taylor G., Van Dyke M. D. Electrically driven jets // Proc. Roy. Soc. London. A. 1969. V. 313. № 1515. P. 453–475.
4. Melcher J. R. Field-coupled surface waves. Cambridge (Mass.): M. I. T. Press, 1963. 190 с.
5. Michael D. H. Note on the electrostatic instability of a jet // Can. J. Phys. 1967. V. 45. № 9. P. 3179–3185.
6. Бураев Т. К., Верещагин И. П., Пашин М. М. Исследование процесса распыления жидкостей в электростатическом поле // Сильные электрические поля в технологических процессах. Вып. 3. М.: Энергия, 1979. С. 87–105.
7. Malik S. K., Singh M. Nonlinear breakup of an electrohydrodynamic jet // Quart. Appl. Math. 1983. V. 41. № 3. P. 273–287.
8. Бондаренко Н. Ф., Гак Е. З. Электромагнитные явления в природных водах. М.: Гидрометеоиздат, 1984. 152 с.
9. Бегузин Я. Е. Капля. М.: Наука, 1986. 174 с.
10. Герценштейн С. Я., Мусабеков П. М., Рудницкий А. Я., Уразов Ш. Н. Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 5. С. 1073–1077.
11. Лышевский А. С. Распыливание топлива в судовых дизелях. Л.: Судостроение, 1971. 248 с.
12. Герценштейн С. Я., Филянд Л. В., Шкадов В. Я. Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977. С. 172–180.
13. Филянд Л. В. Неустойчивость и распад капиллярных жидких струй в спутном потоке воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 124–128.
14. Orsog C. Численное моделирование турбулентных течений // Турбулентность. Принципы и применения/Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. С. 311–347.

Москва

Поступила в редакцию  
2.X.1989