

УДК 532.525.2

© 1991 г.

К. Е. ДЖАУГАШТИН, А. А. ШЕЛЕПОВ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ЗАКРУЧЕННОЙ РАДИАЛЬНО-ЩЕЛЕВОЙ СТРУЕ

Задача о распространении ламинарной затопленной веерной струи с закруткой рассматривалась в работах [1–3]. В [1] в рамках схемы струи-источника найдено автомодельное решение для струи со слабой закруткой. Попытка решения интегральным методом аналогичной задачи для струи, вытекающей из щели конечного размера, содержится в [2]. В [3] уравнения движения для струи с произвольной закруткой при использовании ряда предположений сводились к уравнениям, описывающим течение плоской затопленной струи. Ниже приводится численное решение задачи о распространении радиальной струи, истекающей с произвольной закруткой из щели конечного размера, и аналитическое решение для основного участка струи.

Рассмотрим струю, вытекающую из круговой щели (шириной $2H$ и радиусом R) во внешнее пространство, заполненное средой с физическими свойствами, такими же, как у струи. В цилиндрической системе координат, в которой течение симметрично относительно плоскости $y=0$, а осью симметрии является ось y , поперечная к вектору начальной скорости, в рамках теории пограничного слоя система уравнений движения и граничные условия имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{x} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial(xv)}{\partial y} = 0$$

$$x=R: \quad u=U, \quad w=W \quad (0 \leq y \leq H) \quad (2)$$

$$u=0, \quad w=0 \quad (H < y < \infty)$$

$$x > R: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y=0)$$

$$u=0, \quad w=0 \quad (y=\infty)$$

Из (1) и (2) следуют интегральные уравнения для продольной компоненты импульса

$$\frac{dJ_x}{dx} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \rho w^2 dy, \quad J_x = 2\pi x \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy \quad (3)$$

$$J_x = J_0 = 4\pi \rho R U^2 H \quad (x=R)$$

и момента количества движения M_y относительно оси симметрии

$$M_y = 2\pi x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho u w dy = \text{const} \quad (4)$$

Для численного решения уравнений (1), (2) перейдем к безразмерным переменным

$$x' = \frac{x}{H \text{Re}}, \quad y' = \frac{y}{H}, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad w' = \frac{w}{U}, \quad v' = \frac{v}{U} \text{Re}, \quad \text{Re} = \frac{UH}{\nu} \quad (5)$$

и произведем замену переменных

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y x^2 u w dy \quad (6)$$

аналогичную предложенной в [4]. В результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = w^2 \left[\xi^4 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi u} \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = w^2 \left[\xi^4 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{\xi w} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{u} \right) + \frac{1}{\xi^3 u^2 w} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi u) + \frac{\xi^2}{u} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$$

$$\xi = \lambda: \quad u = 1, \quad w = K \quad (0 \leq \eta < \eta_{\infty}) \quad (8)$$

$$u = 0, \quad w = 0 \quad (\eta = \eta_{\infty})$$

$$\xi > \lambda: \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0)$$

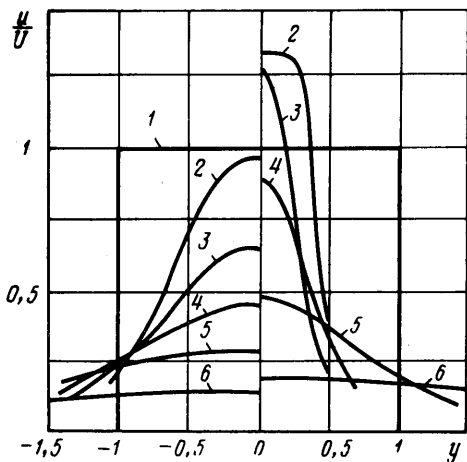
$$u = 0, \quad w = 0 \quad (\eta = \eta_{\infty})$$

$$\lambda = \frac{R}{H \text{Re}}, \quad K = \frac{W}{U}, \quad \eta_{\infty} = \lambda^2 K$$

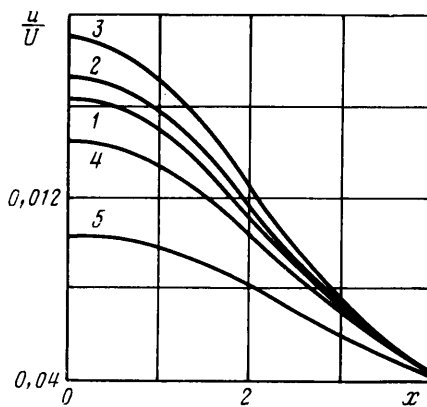
Штрихи над безразмерными величинами в (7) и (8) опущены. Как видно из уравнений (7) и граничных условий (8), рассматриваемая веерная струя характеризуется двумя режимными параметрами: динамическим K , представляющим собой отношение начальной скорости, и геометрическим λ , характеризующим кольцевое сопло.

Результаты расчета приведены на фиг. 1–4. На фиг. 1 (слева от оси $K=0$, справа — $K=1,0$; $\lambda=0,05$) кривая 1 соответствует $x=0,05$, 2 — 0,1, 3 — 0,2, 4 — 0,3, 5 — 0,5, 6 — 1,0. На фиг. 2 кривая 1 соответствует $K=0$, 2 — $K=0,5$, 3 — $K=1,0$, $\lambda=0,05$. На фиг. 3: 1 — $K=0,5$, 2 — $K=0,7$, 3 — $K=1,0$, $\lambda=0,05$, 4 — $\lambda=0,03$, 5 — $\lambda=0,02$, $K=1,0$. На фиг. 4 $\lambda=0,05$.

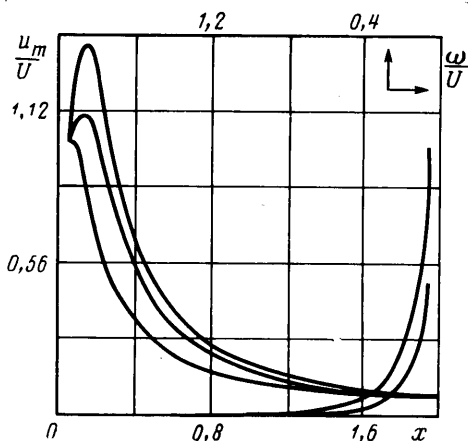
Как видно, закрутка приводит к увеличению радиальной компоненты скорости в приосевой области струи (фиг. 1, 2). Поэтому, если придерживаться известной схемы разделения области развития струи [5], начальным участком можно считать область, в которой сохраняется «плато» в профиле скорости (при его однородном распределении на срезе сопла). За счет уменьшения азимутальной компоненты скорости происходит увеличение радиальной составляющей импульса, которая на основном участке струи достигает некоторого предельного конечного значения (фиг. 4). Очевидно, что течение в области, отдаленной от устья течения, соответ-



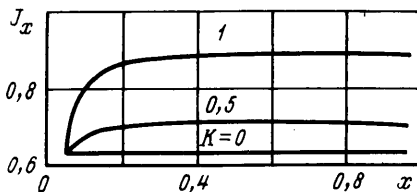
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

ствуется течению в струе со слабой закруткой, но с другим, большим значением начального импульса. Указанные эффекты увеличиваются с ростом режимных параметров K и λ (при постоянном значении одного из них (фиг. 3)).

Исследуем основной участок струи. Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$u = u_m F'(\varphi), \quad w = w_m \Phi(\varphi), \quad \varphi = \frac{y}{\delta} \quad (9)$$

где F' , Φ — универсальные профили скоростей, зависящие от координаты φ ; u_m , w_m , δ — соответственно максимальные значения скоростей и условная ширина, зависящая только от продольной координаты x .

Следуя методу локальной автомодельности [6, 7], произведем в (1) замену переменных (9). Получим

$$F''' + \frac{\delta(u_m' \delta x)'}{\nu x} F F'' - \frac{u_m' \delta^2}{\nu} F'^2 + 6S(x) \Phi^2 = 0 \quad (10)$$

$$\Phi'' + \frac{\delta(u_m \delta x)'}{\nu x} F \Phi' - \frac{u_m \delta^2}{\nu x} \left(x \frac{w_m'}{w_m} + 1 \right) F' \Phi = 0$$

$$S = \frac{1}{6} \frac{w_m^2 \delta^2}{u_m \nu x} \quad (11)$$

Интегральные условия (3), (4) после преобразования примут вид

$$\frac{dJ_x}{dx} = b \rho w_m^2 \delta, \quad J_x = a \rho x u_m^2 \delta, \quad J = J_0 \quad (x=R) \quad (12)$$

$$M_y = c \rho x^2 u_m w_m \delta$$

$$a = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F'^2 d\varphi, \quad b = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2 d\varphi, \quad c = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F' \Phi d\varphi, \quad I = \frac{b}{a}$$

Используя эти уравнения и тождество

$$(u_m \delta^2)' = u_m' \delta^2 + 2u_m \delta \delta'$$

найдем выражения комплексов, входящих в уравнения (10). После преобразований уравнения примут вид

$$F''' + \frac{1}{3} \left[2 \frac{u_m \delta^2}{\nu x} + \frac{(u_m \delta^2)'}{\nu} \right] (FF')' = 6S \left[\frac{I}{3} (2F'^2 - FF'') - \Phi^2 \right] \quad (13)$$

$$\Phi'' + \frac{\delta(u_m \delta x)'}{\nu x} (F\Phi)' = 0$$

Принимая на основе метода разделения переменных

$$u_m \delta^2 = 2\nu x \quad (14)$$

из (13) получим

$$F''' + 2(FF')' = 2S [I(2F'^2 - FF'') - 3\Phi^2] \quad (15)$$

$$\Phi'' + 2(1+SI)(F\Phi)' = 0$$

Решением этой системы уравнений, удовлетворяющим граничным условиям

$$\varphi=0: \quad F=0, \quad F'=\Phi=1$$

$$\varphi=\infty: \quad F'=\Phi=0$$

является функция

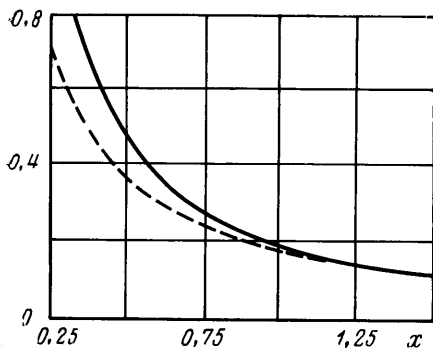
$$F' = \Phi = \text{ch}^{-2}(\sqrt{1+S}\varphi) \quad (16)$$

Значения a, b, c, I в (12) при этом будут равны

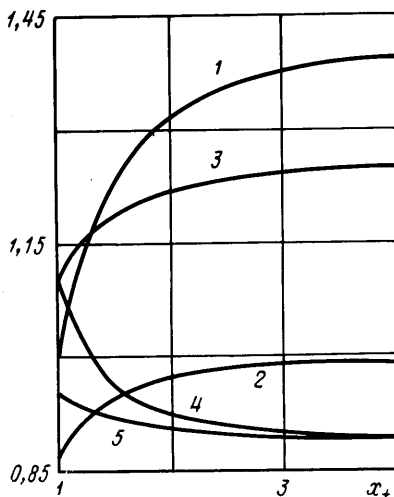
$$a = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{1+S}}, \quad a=b=c, \quad I=1 \quad (17)$$

Как видно из (16), распределение скорости на основном участке струи совпадает с автомоделным профилем скорости слабозакрученной струи [8]. Для отыскания масштабных значений скорости и ширины струи воспользуемся уравнениями (11), (12), (14), (16), (17). Решения их, записанные для безразмерных величин, имеют вид

$$J_x = J_0 f, \quad u_m = u_m^0 \left(\frac{f}{g} \right)^{3/2} \quad (18)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

$$w_m = w_m^\circ \frac{1}{(fg^2)^{1/3}}, \quad \delta = \delta^\circ \left(\frac{g}{f} \right)^{1/3}$$

$$u_m^\circ = \frac{1}{2} \sqrt[3]{9\lambda^2} \frac{1}{x}, \quad w_m^\circ = \frac{1}{2} \sqrt[3]{9\lambda^2} \frac{\lambda K}{x^2}, \quad \delta^\circ = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{3\lambda} x}$$

Индексом градус обозначены выражения, соответствующие случаю слабой закрутки.

Функции f , g , S отражают влияние закрутки и являются функциями координаты $x_+ = x/\lambda$ и параметра K

$$f = \sqrt{1 - K^2 \left(\frac{1}{x_+^2} - 1 \right)}, \quad S = \frac{K^2}{3(fx_+)^2}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{1+S}} \quad (19)$$

Вдали от устья струи выражения (18) переходят в решение для струи со слабой закруткой [8], но соответствующему другому, большему значению начального импульса

$$J_x = J_0 \sqrt{1 + K^2}$$

Этот результат согласуется с численными расчетами, приведенными выше. При этом аналитические и расчетные значения импульса J_x вдоль оси x практически совпадают (фиг. 4), в то время как в переходной области в изменении максимальной скорости есть некоторое различие (на фиг. 5, сплошная линия — численный расчет, штриховая — расчет по (18)). На фиг. 6 показано изменение функций f , g и масштабных величин вдоль оси струи (1 — f , 2 — g , 3 — u/u_m° , 4 — w/w_m° , 5 — δ/δ° , $K=1$). Видно, что увеличение импульса струи за счет закрутки сопровождается увеличением относительного значения радиальной компоненты скорости и уменьшением ее ширины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Радиально-щелевая струя в пространстве, заполненном той же жидкостью // Тр. Ленинград. политехн. ин-та им. М. И. Калинина. 1953. № 5. С. 5-14.

2. Шахов В. Г. Слабозакрученная радиально-щелевая струя, истекающая из кольцевого источника конечного диаметра // Инж.-физ. журн. 1969. Т. 16. № 3. С. 398–404.
3. Смирнов Е. М. Автомодельное решение для веерных струй с произвольной степенью закрутки // ПМТФ. 1977. № 5. С. 71–75.
4. Белоглазов Б. П. Об одном преобразовании уравнений свободных струйных течений несжимаемой жидкости, основанном на их инвариантах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198. № 3. С. 543–546.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960. 715 с.
6. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
7. Бектурганов Е., Джаугаштин К. Е., Сакипов З. Б., Ярин А. Л. Струйное обтекание движущейся поверхности // Изв. СО АН СССР. № 3. Сер. техн. наук. 1981. Вып. 1. С. 33–41.
8. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
15.1.1990