

УДК 532.516.013.4

© 1991 г.

А. Л. АФЕНДИКОВ, В. П. ВАРИН

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ, БЛИЗКИХ К ТЕЧЕНИЮ ПУАЗЕЙЛЯ

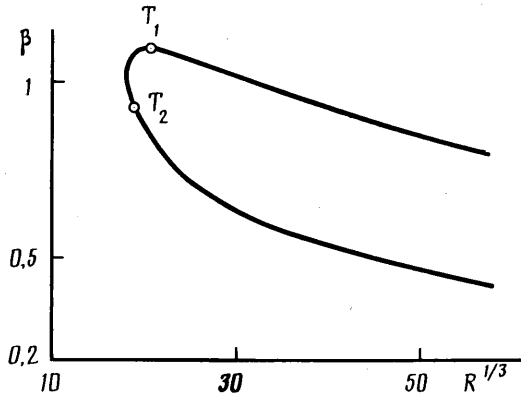
На примере бифуркации течения Пуазейля в плоском канале разбирается задача об определении величин, позволяющих изучить бифуркацию основного стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, для параметров, близких к значениям координат такой точки на кривой нейтральной устойчивости, в которой обращается в ноль первая ляпуновская величина d_0 и происходит смена с докритической бифуркации на закритическую. Для течения Пуазейля такая точка (R_2, α_2) , где R_2 — число Рейнольдса, α_2 — волновое число, имеется на нижней ветви нейтральной кривой.

В данной работе с помощью метода Ляпунова — Шмидта показано, что при $\alpha < \alpha_2$ ответвляющееся в закритическую область устойчивое периодическое по времени решение при малой надкритичности теряет устойчивость и в амплитудной поверхности образуется складка. Характер этой дополнительной бифуркации определяется знаком второй ляпуновской величины d_1 .

Для ее вычисления фиксируется величина α_2 и рассматривается бифуркация, происходящая при изменении числа Рейнольдса. Решение разыскивается в виде сходящегося ряда по степеням $\delta = (\theta(R - R_0))^{1/4}$, $\theta = \pm 1$. Условие разрешимости, служащее для определения коэффициента при δ^4 , позволяет определить значение d_2 . Это соображение является совершенно общим и позволяет изучить бифуркацию в окрестности точки вырождения на нейтральной кривой и в других задачах гидродинамики.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале $K = \{(\xi, y) : -\infty < \xi < \infty, -1 \leq y \leq 1\}$. Будем считать фиксированным средний расход жидкости Q через поперечное сечение канала и предполагать, что на стенках канала $y = \pm 1$ выполнено условие прилипания. По расходу Q введем число Рейнольдса $R = 3Q/4\nu$, где ν — кинематическая вязкость. При любом R эта задача имеет стационарное решение — течение Пуазейля с полем скорости $(U, V)' = (1 - y^2, 0)'$ и отвечающей ему функцией тока $\Psi_*(y) = y - y^3/3$. Течение будем считать $2\pi/\beta$ -периодическим вдоль оси канала. При потере устойчивости течения Пуазейля от него при некоторых условиях невырожденности ответвляется периодическое по времени решение [1–4]. Это решение в некоторой окрестности кривой нейтральной устойчивости (фиг. 1) может быть задано в виде сходящегося ряда по параметру $\delta = (\theta(R - R_0))^{1/2}$, $\theta = \pm 1$, где R_0 — число Рейнольдса, при котором происходит потеря устойчивости. Знак величины θ определяет, в какой области, до- или закритической, существует ответвляющееся от $\Psi_*(y)$ решение.

На нейтральной кривой (фиг. 1) имеются две точки, где нарушается условие невырожденности: $T_1(R_1, \alpha_1)$ и $T_2(R_2, \alpha_2)$, $(R_1, \alpha_1) \simeq (8591,4245; 1,097322)$ и $(R_2, \alpha_2) \simeq (6842,197; 0,906667)$. Вопрос о периодических течениях, близких к течению Пуазейля, для значений параметров, близких к T_1 , исследован в [4]. В данной работе исследуется окрестность другой точки вырождения — T_2 . Здесь происходит смена бифуркации с докритической при $\beta > \alpha_2$ на закритическую при $\beta < \alpha_2$. Отметим, что это исследо-



Фиг. 1

вание носит общий характер и аналогичным способом могут быть изучены бифуркации в окрестности точек вырождения и в других задачах гидродинамики. Для конечномерных динамических систем аналогичная задача хорошо изучена (см., например, [5, 6]).

Сделаем замену переменных $\xi = \beta z$ и будем разыскивать возмущения течения Пуазейля в виде $\Psi(\tau, z, y) = \Psi_*(y) + R^{-1}\psi(\tau, z, y)$. Тогда для ψ имеем задачу

$$R \frac{\partial \Delta_\beta \psi}{\partial \tau} + R\beta \left(U \Delta_\beta \frac{\partial \psi}{\partial z} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta B(\psi, \psi) - \Delta_\beta^2 \psi = 0 \quad (1.1)$$

$$\psi|_{y=\pm 1} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=\pm 1} = 0, \quad \psi(\tau, z, y) = \psi(\tau, z + 2\pi, y) \quad (1.2)$$

$$\Delta_\beta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad B(\varphi, \psi) = \frac{\partial \Delta_\beta \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_\beta \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Если отбросить в (1.1) билинейные члены и разыскивать решение в виде $\psi = e^{\lambda \tau} \varphi(z, y)$, то получим спектральную задачу об устойчивости

$$-R\lambda \Delta_\beta \varphi + N\varphi = 0, \quad N(R, \beta) = \Delta_\beta^2 - R\beta \left(U \Delta_\beta \frac{\partial}{\partial z} - U'' \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Крайевые условия индуцированы условиями (1.2). Каждому простому собственному значению λ этой задачи отвечает собственная функция вида $\varphi = e^{ikz} \chi(y)$, $k \in \mathbb{Z}$, где χ — собственная функция задачи Орра — Зоммерфельда. Поскольку без ограничения общности можно считать, что $k=1$, то эта задача имеет вид

$$-iR\beta \left(\left(U + \frac{\lambda}{i\beta} \right) l_\beta \chi - U'' \chi \right) + l_\beta^2 \chi = 0, \quad l_\beta = \frac{d^2}{dy^2} - \beta^2 \quad (1.3)$$

$$\chi = \frac{d\chi}{dy} = 0, \quad y = \pm 1 \quad (1.4)$$

Нейтральной кривой отвечают точки (R_0, α) , для которых $\lambda_0(R_0, \alpha) = -i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, где $\lambda_0(R, \beta)$ — собственное значение задачи (1.3), (1.4) с максимальной вещественной частью. Пусть χ — собственная функция, отвечающая $\lambda_0(R_0, \alpha)$ и нормированная условием $\chi(0) = 1$, тогда, как не-

СЛОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ

$$E = \frac{\partial \lambda_0(R, \alpha)}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = -\frac{i\alpha}{R_0} \left(\left(U - \frac{\omega_0}{\alpha} \right) l_\alpha \chi - U'' \chi, \xi \right)$$

$$H = \frac{\partial \lambda_0(R_0, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\alpha} = -\frac{1}{R_0} (4\alpha l_\alpha \chi + iR_0 [U l_\alpha \chi - U'' \chi] + 2i\alpha R_0 [\omega_0 \chi - \alpha U \chi], \xi)$$

где (\cdot, \cdot) — эрмитово скалярное произведение в $L_2(-1, 1)$, а ξ — собственная функция сопряженного уравнения Орра — Зоммерфельда, отвечающая собственному значению $i\omega_0$ и нормированная условием $(l_\alpha \chi, \xi) = 1$. Это условие эквивалентно условию простоты собственного значения $-i\omega_0$.

Будем разыскивать решение задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее условию

$$\psi(\tau, z, y) = \psi(\tau + 2\pi/\omega, z, y), \quad \omega \neq 0 \quad (1.5)$$

и сделаем замену переменных $t = \omega\tau$. Введем пространство H_1 — замыкание множества функций $\psi(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, со значениями в $W_2^4(\Omega)$, таких, что $d_0 \Delta_\alpha \psi(t)/dt$ и $N\psi(t)$ сильно непрерывны по t в метрике, порожденной скалярным произведением

$$((\psi_1(t), \psi_2(t)))_{H_1} = \int_0^{2\pi} \left[\omega_0^2 \left(\frac{\partial \Delta_\alpha \psi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Delta_\alpha \psi_2}{\partial t} \right)_{L_2(\Omega)} + (\Delta_\alpha^2 \psi_1, \Delta_\alpha^2 \psi_2)_{L_2(\Omega)} \right] dt$$

где $\Omega = \{(z, y) : 0 \leq z \leq 2\pi, -1 \leq y \leq 1\}$ — область, в которой рассматривается течение.

Согласно методу Ляпунова — Шмидта [7, 8], любое малое по норме H_1 решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) вблизи нейтральной кривой можно записать в виде

$$\psi(t, z, y) = u(t, z, y) + \operatorname{Re} \gamma e^{-it} \varphi_0, \quad \gamma > 0$$

где $\varphi_0 = e^{iz} \chi(y)$, а $u(t, z, y)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-i(z-t)} \xi(y) \Delta_\alpha u(t, z, y) dt dz dy = 0 \quad (1.6)$$

Для удобства дальнейшего численного исследования введем не вполне стандартное обозначение

$$c = (R\omega - R_0 \beta c_0)/\beta, \quad \varepsilon = R - R_0, \quad h = \beta - \alpha$$

где $c_0 = \omega_0/\alpha$; тогда величины $c, \varepsilon, h, \gamma$ связаны, как это следует из результатов работ [7, 8], уравнением разветвления

$$g(c, \varepsilon, h, \gamma) = -i\alpha c + B_1 \varepsilon + B_2 h + \sum_{k=0}^{\infty} D_k(R_0, \alpha) \gamma^{2(k+1)} + O(c, \varepsilon, h) = 0 \quad (1.7)$$

$$B_1 = -R_0 E + i\alpha c_0, \quad B_2 = -R_0 H - i c_0 R_0.$$

В некоторой окрестности начала координат функция $g(c, \varepsilon, h, \gamma)$ является вещественно-аналитической. Из (1.7) по теореме о неявной функции следует, что если $\operatorname{Re} E(R_0, \alpha) \neq 0$, то

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(h) \gamma^{2k}, \quad a_0(0) = 0, \quad a_1(0) = -\frac{\operatorname{Re} D_0}{\operatorname{Re} B_1} \quad (1.8)$$

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(h) \gamma^{2k} \quad (1.9)$$

Из (1.8) следует, что если $\operatorname{Re} D_0 \neq 0$, то решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) в некоторой окрестности нуля задается сходящимися рядами

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \delta^{j+1}, \quad R\omega = R_0\omega_0 + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \delta^{2j}, \quad \delta = (\theta\varepsilon)^{1/2}, \quad \theta = \pm 1$$

2. Расчеты показывают [4], что условие $\operatorname{Re} E = 0$ выполняется только в точке T_1 , а в точке T_2 выполнены условия $\operatorname{Re} D_0(R_2, \alpha_2) = 0$, $\operatorname{Re} D_1(R_2, \alpha_2) \neq 0$. Поэтому, применяя к (1.8) подготовительную теорему Вейерштрасса, получаем, что в некоторой окрестности начала координат это уравнение эквивалентно уравнению

$$a_{20}\gamma^4 + H_1(\varepsilon, h)\gamma^2 + H_0(\varepsilon, h) = 0$$

$$H_0(\varepsilon, h) = -\varepsilon + a_{01}h + \dots, \quad a_{01} = -\operatorname{Re} B_2 / \operatorname{Re} B_1 \quad (2.1)$$

$$H_1(\varepsilon, h) = \frac{a_{30}}{a_{20}}(-\varepsilon + a_{01}h) + a_{11}h + \dots$$

где многоточием обозначены члены следующего порядка малости, а величины a_{kj} определяются из разложений

$$a_k(h) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} h^j$$

Нейтральная кривая в окрестности точки T_2 локально задается уравнением $H_0(\varepsilon, h) = 0$.

Предположим для определенности, что $a_{20} < 0$ и $a_{11} < 0$, и сделаем сохраняющую ориентацию невырожденную замену переменных

$$H_0(\varepsilon, h) = -\varepsilon_1, \quad H_1(\varepsilon, h) = \varepsilon_1 a_{30} / a_{20} + a_{11} \varepsilon_2$$

Пусть $D(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1 a_{30} / a_{20} + a_{11} \varepsilon_2)^2 + 4a_{20} \varepsilon_1$. Тогда из (2.1) следует, что для некоторой окрестности нуля в H_1 в плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ существует окрестность $u_\varepsilon(0)$, такая, что в области $A_1^1 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 < 0, D \geq 0\}$ задача (1.1), (1.2), (1.5) имеет одно решение, в области $A_1^2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, D > 0\}$ — два решения, а в области $A_1^3 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : D(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 0\}$ решений нет.

В качестве следствия имеем, что уравнение

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_{11}^2}{4a_{20}} \varepsilon_2^2 + g(\varepsilon_2), \quad g(\varepsilon_2) = O(\varepsilon_2^3), \quad \varepsilon_2 < 0 \quad (2.2)$$

локально задает кривую поворота, за которую периодическое по времени решение, ответвляющееся от течения Пуазейля, не продолжается. На этой кривой ответвившееся от Ψ_* периодическое решение теряет устойчивость, причем соответствующий мультипликатор обращается в единицу. Наличием этой кривой объясняется малый радиус сходимости рядов по параметру $\delta = (\varepsilon)^{1/2}$ для точек на нейтральной кривой, близких к T_2 и удовлетворяющих условию $\alpha < \alpha_2$ [4].

При $\alpha > \alpha_2$ бифуркация докритическая $\theta = -1$ и радиус сходимости ря-

дов по параметру δ также мал. За кривую

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{11}^2}{4a_{20}} \varepsilon_2^2 - g_2(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_2 > 0$$

эти ряды не продолжаются, так как кривая (2.2) является кривой ветвления для функции $\gamma(\varepsilon)$ не только при $h < 0$, но и при $h > 0$. Однако препятствие к продолжению этих рядов при $h > 0$ лежит в комплексной плоскости. Отсюда следует, что если $\alpha > \alpha_2$, то при исследовании задачи о продолжении решения задачи (1.1), (1.2), (1.5) в область чисел $R < R_0$ надо брать иные разложения или переходить к использованию численных методов.

3. Величина a_{11} для задачи о течении Пуазейля определяется довольно просто и этот вопрос опускается. Приближенно эту величину можно получить, отыскав численным дифференцированием

$$\left. \frac{dD_0(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_2}; \quad a_{11} = \left(-\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} D_0(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} \right) / \operatorname{Re} B_1(\alpha_2)$$

Покажем, как вычислить величину $\operatorname{Re} D_1$. Фиксируем $\alpha = \alpha_2$, тогда из разложения (1.8) следует, что малое решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) может разыскиваться в виде

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \delta^{j+1}, \quad R\omega = R_0\omega_0 + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \delta^{2j}, \quad \delta = (\theta\varepsilon)^{1/4}, \quad \theta = \pm 1 \quad (3.1)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \left(-\omega_0 R_0 \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} + N(R_0, \alpha) \right) \psi_0 = 0 \\ & \left(-\omega_0 R_0 \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} + N(R_0, \alpha) \right) \psi_j = G_j + \alpha \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_\alpha \psi_0, \quad j=1, 2, \dots \quad (3.2) \\ & G_j = \alpha \left(\frac{d}{dt} \sum_{h=1}^{j-1} c_h \Delta_\alpha \psi_{j-h} + \theta \frac{\partial}{\partial z} (U \Delta_\alpha \psi_{j-4} - U'' \psi_{j-4}) + \sum_{h=0}^{j-1} B(\psi_h, \psi_{j-1-h}) \right) \\ & \psi_j = \frac{\partial}{\partial y} \psi_j = 0, \quad y = \pm 1, \quad \psi(t, z, y) = \psi(t+2\pi, z, y) = \psi(t, z+2\pi, y) \quad (3.3) \end{aligned}$$

В точке T_2 нейтральной кривой спектральная задача (1.3), (1.4) имеет простое, чисто мнимое собственное значение $-i\omega_0$, следовательно, $\psi_0 = \gamma_0 \operatorname{Re} \chi(y) e^{i(z-t)}$, $\gamma_0 > 0$. Поэтому по индукции устанавливается, что если задачи (3.2), (3.3) окажутся разрешимыми, то $\psi_j = \operatorname{Re} \varphi_j(x, y)$, $x = z - t$, где

$$\varphi_j(x, y) = \sum_{h=0}^{j+1} e^{ikh} \chi_{jh}(y)$$

Нетрудно получить, что χ_{jh} удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\begin{aligned} L_h \chi_{jh} &= F_{jh} - ik\alpha c_j l_\alpha (\chi_{0h}), \quad k=0, 1, \dots, j+1 \quad (3.4) \\ L_h &= l_{h\alpha}^2 - ik\alpha R_0 [(U - \omega_0/\alpha) l_{h\alpha} - U'] \end{aligned}$$

$$G_j = \operatorname{Re} F_j, \quad F_j = \sum_{k=0}^{j+1} e^{ikx} F_{jk}(y)$$

$$\chi_{jk} = \frac{d}{dy} \chi_{jk} = 0, \quad y = \pm 1 \quad (3.5)$$

$$F_{jk} = \alpha \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{j+1} (p_{jk}^n + q_{jk}^n) + ik\theta (U l_{k\alpha} \chi_{j-4,k} - U'' \chi_{j-4,k}) - ik \sum_{n=1}^{j-1} c_n l_{k\alpha} \chi_{j-n,k} \right\}$$

$$p_{jk}^n = \sum_{l=\max(0, k-j+n)}^{\min(n+1, k)} B_{l, k-l}(\chi_{nl}, \chi_{j-1-n, k-l})$$

Для $k \neq 0$ обозначим $M_1 = \min(n+1, j-n+k)$, $M_2 = \min(n+1, j-n-k)$

$$q_{jk}^n = \sum_{l=k}^{M_1} B_{l, k-l}(\chi_{nl}, \bar{\chi}_{j-1-n, l-k}) + \sum_{l=0}^{M_2} B_{-l, k+l}(\bar{\chi}_{nl}, \chi_{j-1-n, k+l})$$

$$q_{j0}^n = \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\min(n+1, j-n)} B_{l, -l}(\chi_{nl}, \bar{\chi}_{j-n-1, l})$$

$$B_{h,l}(f(y), g(y)) = e^{-i(k+l)x} B(e^{ikx} f(y), e^{ily} g(y))$$

Для разрешимости задач (3.2), (3.3) необходимо и достаточно выполнения условия ортогональности

$$(F_{j1}, \xi) = i\alpha \gamma_0 c_j \quad (3.6)$$

Из (1.8) следует, что $c_{2k+1} = 0$, $k=0, 1, \dots$. При $j=2$ условие разрешимости имеет вид $\gamma_0^2 D_0 = i\alpha c_2$. Тогда $\chi_{21}^\circ = \chi_{21}^\circ + \gamma_2 \chi_0(y)$, где γ_2 — вещественная константа, а частное решение χ_{21}° в соответствии с (1.6) возьмем удовлетворяющим условию $(l_\alpha \chi_{21}^\circ, \xi) = 0$. Тогда при $j=4$ условие ортогональности (3.6) принимает вид

$$\gamma_0^4 D_1 + \theta B_1 + 2\gamma_2 \gamma_0 D_0 = i\alpha c_4$$

Это же соотношение получается и если разыскивать решения уравнения (1.7) в виде

$$\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j ((\theta \varepsilon)^{1/4})^{j+1}, \quad c = \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} ((\theta \varepsilon)^{1/4})^{2j}$$

Используя выражения для F_{jk} , получаем

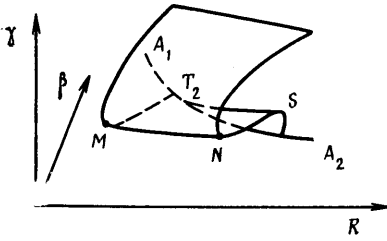
$$D_1 = \alpha (B_{01}^\circ(\xi_{10}, \chi_{21}^\circ) + B_{10}^\circ(\chi, \chi_{30}^\circ) + [B_{-1,2}^\circ(\bar{\chi}, \chi_{32}^\circ) + B_{3,-2}^\circ(\chi_{23}, \bar{\chi}_{12}) + B_{2,-1}^\circ(\xi_{12}, \bar{\chi}_{21}^\circ)]/2, \xi)$$

$$B_{h,l}^\circ(f(y), g(y)) = B_{h,l}(f(y), g(y)) + B_{l,k}(g(y), f(y))$$

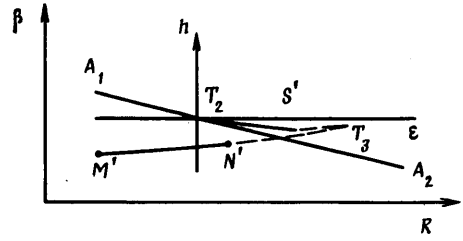
$$\xi_{10} = \gamma_0^{-2} \chi_{10}, \quad \xi_{12} = \gamma_0^{-2} \chi_{12}, \quad \xi_{23} = \gamma_0^{-3} \chi_{23}$$

Здесь χ_{21}° — частное решение уравнения

$$L_1 \chi_{21}^\circ = -D_0 l_\alpha \chi + \alpha \{B_{10}^\circ(\chi, \xi_{10}) + 0,5 B_{-1,2}^\circ(\bar{\chi}, \xi_{12})\}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

удовлетворяющее условию $(l_\alpha \chi_{21}^\circ, \zeta) = 0$. Для определения $\chi_{30}^\circ, \chi_{32}^\circ$ имеем

$$L_0 \chi_{30}^\circ = \frac{\alpha}{2} \operatorname{Re} \{ 2B_{00}(\xi_{10}, \xi_{10}) + B_{1,-1}(\chi, \bar{\chi}_{21}^\circ) + B_{1,-1}(\chi_{21}^\circ, \bar{\chi}) + B_{2,-2}(\xi_{12}, \bar{\xi}_{12}) \}$$

$$L_2 \chi_{32}^\circ = \frac{\alpha}{2} (B_{02}^\circ(\xi_{10}, \xi_{12}) + B_{11}^\circ(\chi, \chi_{21}^\circ) + B_{-1,3}^\circ(\bar{\chi}, \xi_{23})) - 2D_0 l_2 \xi_{12}$$

Функции $\chi_{21}^\circ, \chi_{30}^\circ, \chi_{32}^\circ$ удовлетворяют краевым условиям (3.5).

4. Методика численного решения уравнения Орра — Зоммерфельда подробно разобрана в [9]. В данной работе при дискретизации задач (3.4), (3.5) использованы аналогичные соображения. Расчеты дают, что в точке

$$T_2 \operatorname{Re} B_2 / \operatorname{Re} B_1 \approx 17921,39, \quad \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} D_0(R_0(\alpha), \alpha) |_{\alpha=\alpha_2} \approx -0,00979, \quad D_1 \approx$$

$\approx (-1,041 - i \cdot 7,137) \cdot 10^{-8}, \operatorname{Re} B_1 \approx -0,012079$, где собственная функция χ нормирована условием $\chi(0) = 1$.

Отсюда следует, что расположение кривой поворота на плоскости (R, β) имеет вид, изображенный на фиг. 3. На фиг. 2 схематически изображена часть амплитудной поверхности в окрестности точки T_2 . При прямом численном моделировании (см., например, [10, 11]) эффект наличия складки (T_2, S) был пропущен. Наличие второй точки поворота в амплитудной поверхности при $\alpha < \alpha_2$ следует из того, что при достаточно малых числах Рейнольдса течение Пуазейля абсолютно устойчиво. Проекция складок (T_2, S) и (M, K) на плоскость (R, β) (фиг. 3), вообще говоря, могут пересечься в некоторой точке T_3 и в этом случае в амплитудной поверхности имеется сборка. Наличие точки может определяться тем, что имеется точка (ϵ_*, h_*) , $h_* \neq 0$, такая, что $a_1(h_*) = 0$, однако наличие такой точки пока не установлено. Отметим, что при использовании методов Пуанкаре — Линштедта, Ляпунова — Шмидта или метода редукции на центральное многообразие все получающиеся утверждения являются локальными и справедливыми лишь в малой окрестности нейтральной кривой. Поэтому попытки получить с помощью этих методов складку (M, K) или точку (ϵ_*, h_*) (см., например, [12]) носят, без соответствующих оценок радиусов сходимости, эвристический характер.

Течение Пуазейля в плоском канале — один из самых простых, но не самый удачный пример, на котором можно продемонстрировать важность адекватного использования геометрических характеристик прибора или технологического объекта для изучения автоколебательных движений жидкости в нем. В качестве примера укажем, что в задачах о течении жидкости между вращающимися сферами или цилиндрами кроме основного параметра — числа Рейнольдса в качестве второго параметра можно использовать относительный зазор $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$, где r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего объекта соответственно. В этом случае, если параметр δ_* данной установки окажется близким к критическому, в аппа-

рате могут наблюдаться течения, появление которых легко объясняется, только если включить в рассмотрение соответствующие дополнительные параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen T. S., Joseph D. D.* Subcritical bifurcation of plane Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. Pt 2. P. 337–351.
2. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 4. С. 791–794.
3. *Бабенко К. И., Орлова М. Г., Стебунов В. А.* Периодические течения, близкие к течению Пуазейля в плоском канале: Препринт № 55. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1978. 37 с.
4. *Афендикова А. Л., Бабенко К. И., Варин В. П.* Об автоколебательных режимах, близких к течению Пуазейля в плоском канале: Препринт № 116. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1988. 36 с.
5. *Takens F.* Unfolding of certain singularities of vector fields: generalized Hopf bifurcations // *J. Diff. Eq.* 1973. V. 14. № 3. P. 476–493.
6. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. С. 638–655.
8. *Joseph D. D., Sattinger D. H.* Bifurcating time periodic solutions and their stability // *Arch. Ration. Mech. and Anal.* 1972. V. 45. № 2. P. 79–109.
9. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
10. *Zahn J. P., Toomre J., Spiegel E., Gough D.* Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. № 2. P. 319–345.
11. *Herbert T.* Stability of plane Poiseuille flow. Theory and experiment // *Fluid Dynamics Transactions*. V. 11. Warszawa, 1983. С. 77–126.
12. *Skobelev B. Yu., Molodov Yu. I.* Subcritical autooscillations and nonlinear neutral curve for Poiseuille flow // *Comp. & Math. with Appl.* 1980. V. 6. № 1. P. 123–133.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1990