

УДК 532.5.013.4+536.25

© 1991 г.

**Е. А. РЯБИЦКИЙ**

**О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ  
ПЛОСКОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ  
ТЕПЛА**

При отсутствии массовых сил существенное влияние на устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости оказывает зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярный эффект. Если равновесный градиент температуры достаточно велик, то наличие термокапиллярных сил на свободной поверхности может привести к возникновению конвективного движения.

Исследование монотонной неустойчивости равновесия плоского слоя проводилось в [1–3]. Анализ немонотонных возмущений [4] показал, что в случае недеформируемой свободной поверхности колебательная неустойчивость отсутствует. В [5] обнаружено, что при нелинейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры возможна колебательная неустойчивость. Настоящая работа посвящена численному исследованию устойчивости равновесия плоского слоя относительно произвольных возмущений. Показано, что для деформируемой свободной границы возникает дополнительная нейтральная кривая, соответствующая монотонной капиллярной неустойчивости. Кроме того, при учете капиллярного механизма конвекции появляется колебательная неустойчивость, которая становится наиболее опасной в области малых чисел Прандтля и волновых чисел.

1. Рассмотрим плоский слой вязкой теплопроводной жидкости при отсутствии массовых сил. Пусть внутри жидкости равномерно распределены источники тепла интенсивности  $q = \text{const}$ . Уравнения Навье – Стокса и конвективного теплообмена запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \chi \Delta \theta + q \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  – вектор скорости жидкости,  $p$  – давление,  $\theta$  – температура,  $\nu, \chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности,  $\rho$  – плотность.

Предположим, что процессами переноса в газе вне жидкости можно пренебречь. Пусть  $p_1, \theta_1$  – заданные давление и температура газа на свободной поверхности  $\Gamma$ . Тогда на  $\Gamma$  должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} (p_1 - p) \mathbf{I} \mathbf{n} + 2\rho\nu D(\mathbf{u}) \mathbf{n} = 2\sigma H \mathbf{n} + \nabla_\tau \sigma \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_1) + Q = 0 \\ f_i + \mathbf{u} \nabla f = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\Gamma$ ,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $H$  – средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ,  $\nabla_\tau = \nabla - (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{n}$  обозначает поверхност-

ный градиент,  $\lambda$  и  $\beta$  — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена,  $Q$  — поток тепла через свободную поверхность,  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  — уравнение  $\Gamma$ .

Зададим на твердой поверхности условия прилипания и теплоизоляции

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (1.3)$$

Пусть коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_1)$$

Выберем систему координат так, что уравнения твердой и свободной границ будут  $z=0$  и  $z=l$  соответственно. Рассмотрим равновесное состояние слоя

$$u = v = w = 0, \quad p = p_1 = \text{const}$$

Решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (1.2), (1.3), имеет вид

$$\theta = \theta_0 = \theta_1 - \frac{1}{2} q (z^2 - l^2) / \chi \quad (1.4)$$

Исследуем устойчивость равновесного состояния (1.4) методом малых возмущений. Пусть

$$\mathbf{u} = (U, V, W), \quad p = p_1 + P, \quad \theta = \theta_0 + T, \quad f = z - l + R$$

Выберем в качестве единиц длины, времени, скорости, давления и температуры соответственно  $l$ ,  $l^2/\nu$ ,  $\nu/l$ ,  $\rho\nu^2/l^2$ ,  $\gamma\nu l/\chi$ , где

$$\gamma = - \left. \frac{d\theta_0}{dz} \right|_{z=l} = - \frac{ql}{\chi}$$

Ищем возмущенные величины в виде

$$(U, V, W, P, T, R) = (U(\xi), V(\xi), W(\xi), P(\xi), T(\xi), R) \times \\ \times \exp(i\alpha_x x + i\alpha_y y - iC\tau)$$

Здесь  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  — волновые числа,  $C = C_r + iC_i$  — комплексный декремент,  $\xi = z/l$ ,  $\tau$  — безразмерное время. Критерием устойчивости равновесного состояния (1.4) служит знак мнимой части декремента: значения параметров задачи, для которых  $C_i < 0$ , соответствуют области устойчивости, если существуют такие значения параметров, что  $C_i > 0$ , то имеем неустойчивость; случаю  $C_i = 0$  соответствует граница устойчивости (нейтральные возмущения).

Применяя преобразования Сквайра к линейризованной задаче, получим уравнения малых возмущений в виде

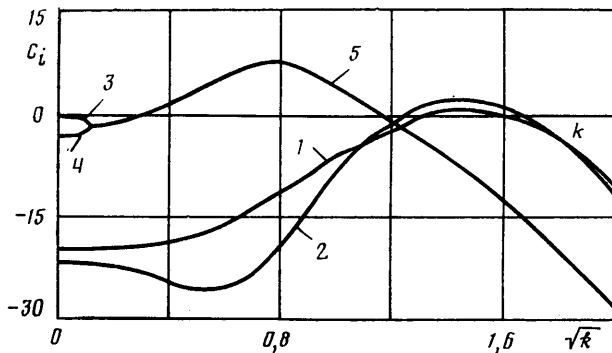
$$a\Phi + ik^2 P = \Phi_{\xi\xi}, \quad aW + P_{\xi} = W_{\xi\xi} \\ i\Phi + W_{\xi} = 0, \quad bT - \xi W = T_{\xi\xi} \quad (1.5) \\ a = -iC + k^2, \quad b = -i \text{Pr} C + k^2$$

условия на твердой границе ( $\xi=0$ ) имеют вид

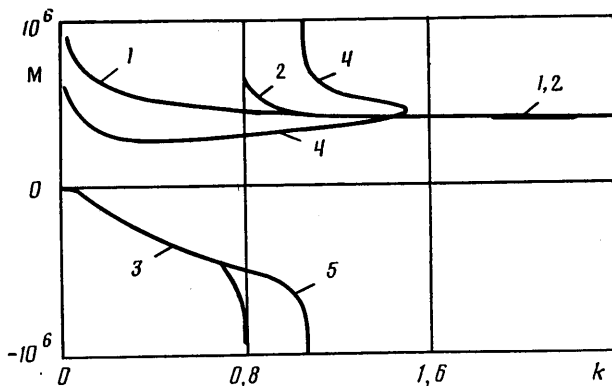
$$\Phi = W = T_{\xi} = 0 \quad (1.6)$$

а на свободной поверхности ( $\xi=1$ )

$$\Phi_{\xi} + ik^2 W + ik^2 M(T - R/\text{Pr}) = 0 \\ -P + 2W_{\xi} + k^2 W e R = 0, \quad iCR + W = 0 \quad (1.7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$T_{\xi} + \text{Bi} T - (1 + \text{Bi}) R / \text{Pr} = 0$$

$$\Phi = \alpha_x U + \alpha_y V, \quad k^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2, \quad \text{Pr} = \nu / \chi$$

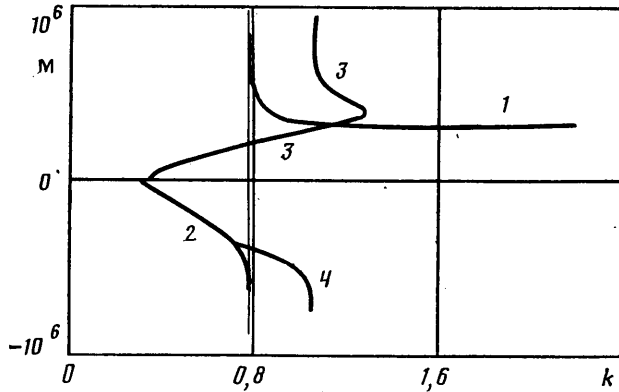
$$M = \frac{\gamma \kappa l^2}{\rho \nu \chi}, \quad \text{We} = \frac{\sigma_0 l}{\rho \nu^2}, \quad \text{Bi} = \beta l / \lambda$$

Здесь  $M$  — число Марангони,  $We$  — число Вебера,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $\text{Bi}$  — число Био.

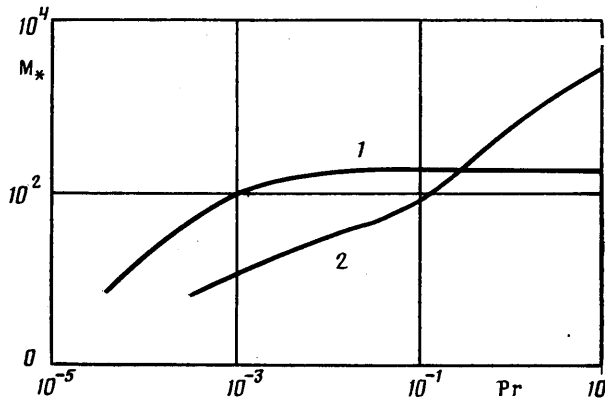
Решение задачи (1.5)–(1.7) для монотонных нейтральных возмущений ( $C=0$ ) построено в [3]. Полученная при этом аналитическая зависимость чисел Марангони от остальных параметров использовалась для контроля расчетов.

2. Численное решение задачи (1.5)–(1.7) осуществлялось методом ортогонализации [6]. На фиг. 1 приведены результаты расчетов наиболее опасных мод, полученные при  $\text{Pr}=0,016$ ,  $\text{Bi}=2$ ,  $M=200$ . Кривая 1 соответствует случаю недеформируемой свободной поверхности ( $We=\infty$ ). Неустойчивость здесь возникает из-за неоднородности распределения температуры вдоль свободной границы. Проведенные расчеты показали, что в этом случае возмущения всегда будут монотонные и для  $\text{Pr}=0,016$ ,  $\text{Bi}=2$  (расплав германия) потеря устойчивости происходит при числах Марангони, больших 194,3. Построенная численно нейтральная кривая для  $We=\infty$  приведена на фиг. 2 (кривая 1) и полностью совпадает с соответствующей нейтральной кривой, полученной в [3].

Учет деформации свободной поверхности приводит к дестабилизации равновесия. Это иллюстрирует кривая 2 на фиг. 1, построенная при  $We=$



Фиг. 3



Фиг. 4

$=10^4$ . Для этого значения числа Вебера потеря устойчивости происходит при  $M \geq 186,1$ ; соответствующая нейтральная кривая приведена на фиг. 2 (кривая 2). Для этой моды  $C_i$  всегда равно нулю, независимо от  $We$ . Кроме того, учет деформации свободной поверхности приводит к появлению нового механизма неустойчивости. Как показано на фиг. 1, при конечном числе Вебера появляются две новые, монотонные в области малых  $k$  моды (кривые 3, 4). С убыванием числа Марангони эти моды смещаются вверх и при отрицательных  $M$  кривая 3 пересекает ось  $C_i=0$ . Нейтральная кривая для этих возмущений, построенная при  $We=10^4$ , показана на фиг. 2 (кривая 3). Таким образом, капиллярная неустойчивость равновесия относительно монотонных возмущений возникает только при охлаждении жидкости.

Рассмотрим возникновение колебательной неустойчивости. Как показано на фиг. 1, с ростом  $k$  монотонные капиллярные моды сливаются, образуя комплексно-сопряженную пару. Мнимая часть декремента приведена на фиг. 1 (кривая 5), модуль вещественной части монотонно растет. На фиг. 2 при  $We=10^4$  построена нейтральная кривая для колебательных возмущений (кривая 4). Кроме нагрева жидкости аналогичный механизм возникновения колебательной неустойчивости имеет место и при охлаждении. В этом случае, как показано на фиг. 2, нейтральная кривая колебательных возмущений (кривая 5) ответвляется от нейтральной кривой капиллярных монотонных возмущений. Для  $Pr=0,016$ ,  $Bi=2$ ,  $We=10^4$  это происходит при  $k=0,71$ . Область устойчивости на фиг. 2 ограничена снизу

кривой 3 при  $k < 0,71$  и кривой 5 при  $0,71 < k < 1,063$ . Сверху граница проходит по кривой 4 при  $k < 1,38$  и кривой 2 при  $k > 1,38$ . Отметим, что кривая 5 и верхняя ветвь кривой 4 имеют одну и ту же асимптотику  $k = 1,063$ . Таким образом, наблюдается аналогия в поведении нейтральных кривых для монотонных и колебательных возмущений. Кроме того, анализ расчетов показывает, что капиллярная неустойчивость имеет место только для достаточно длинных волн (при  $k < 1,496$ ), а коротковолновые возмущения свободной границы стабилизируются силами поверхностного натяжения.

Результаты исследования других факторов, влияющих на устойчивость равновесия, приведены на фиг. 3 и 4. Проведенные при различных числах Био расчеты показали, что случай теплоизолированной свободной поверхности ( $Bi = 0$ ) будет наиболее неустойчивым и для колебательных возмущений. На фиг. 3 приведены нейтральные кривые, построенные при  $Pr = 0,016$ ,  $Bi = 0$ ,  $We = 10^4$ . Здесь кривые 1, 2 соответствуют монотонным возмущениям, а кривые 3, 4 — колебательным. Минимальные числа Марангони  $M$  при этих параметрах равны 81,8 для монотонных возмущений и 0 — для колебательных (для сравнения при  $Bi = 2$  имеем  $M = 186,08$  и 40,53 соответственно).

Проведенный анализ показал, что увеличение  $Pr$  приводит к стабилизации равновесия. На фиг. 4 приведены зависимости  $M$  от числа Прандтля, построенные для  $Bi = 2$ ,  $We = 10^4$ . Кривая 1 здесь соответствует монотонным возмущениям, а кривая 2 — колебательным. Как показано на фиг. 4, при малых числах Прандтля наиболее опасной является колебательная неустойчивость, а при больших — монотонная. Определяющим параметром здесь служит число Вебера. Так, для  $We = 10^7$  смена наиболее опасных возмущений происходит при  $Pr = 8 \cdot 10^{-4}$ , а для  $We = 10^4$  — при  $Pr = 0,3$ .

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за полезное обсуждение работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 5. P. 489–500.
2. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. № 3. P. 321–340.
3. Андреев В. К., Родионов А. А., Рябицкий Е. А. Возникновение термокапиллярной конвекции в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слоях под действием внутренних источников тепла // ПМТФ. 1989. № 2. С. 104–108.
4. Vidal A., Acrivos A. Nature of the neutral state in surfacetension driven convection // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 3. P. 615–616.
5. Урнин В. А., Яковлев Д. Г. Возбуждение капиллярных волн в неоднородно прогретых жидких пленках // Журн. техн. физики. 1989. Т. 59. № 2. С. 19–25.
6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.

Красноярск

Поступила в редакцию  
13.IV.1990