УДК 533.6.011.8

Г. К. ВАРАКИН

О ПАРАМЕТРАХ АТМОСФЕРЫ ГАЗЯЩЕЙ СФЕРЫ

Описан метод расчета параметров облака, образуемого при свободномолекулярном газовыделении с поверхности сферы. Для стационарного газовыделения получены аналитические решения.

Пусть с поверхности сферы радиуса R происходит с равномерной интенсивностью свободномолекулярное истечение газа в окружающее пространство. Задача заключается в определении параметров облака газовыделения, в частности концентрации газа $n(r)$ и плотности столба молекул по лучу зрения, характеризуемой параметром $D=\int n(r)\,dr$.

Из кинетической теории газов известно, что параметры свободномолекулярного газового потока вычисляются с помощью функции распределения $f(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v})$, определяемой из решения уравнения Больцмана без столкновительного члена [1].

Полагая, что в окрестности газящей сферы отсутствуют силовые поля, а на ее поверхности функция распределения принимает значение f_0, имеем следующую постановку задачи для нахождения функции распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}=0,\quad |\mathbf{r}|=R:\quad f=f_0 \tag{1}$$

Поверхность сферы в четырехмерном пространстве $x,\ y,\ z,\ t$ зададим параметрически, используя в качестве параметров сферические углы θ, φ и время τ

$$x_0=R\sin\theta\cos\varphi,\quad y_0=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z_0=R\cos\theta,\quad t=\tau \tag{2}$$

Вводя параметр s, имеем дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{\partial t}{\partial s}=1,\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}=\mathbf{v}$$

Уравнение характеристики, проходящей через точку $(\theta,\ \varphi,\ \tau)$ на сфере, запишем в виде

$$t=s,\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}(s-\tau) \tag{3}$$

Поскольку вдоль характеристики $\partial f/\partial s=0$, то функция распределения вне сферы в точке $(x,\ y,\ z,\ t)$ принимает значение

$$f(t,\mathbf{r},\mathbf{v})=f_0\left(\tau,\theta,\varphi,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{s-\tau}\right) \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) дают параметрическое решение задачи (1). Для получения концентрации молекул надо проинтегрировать функцию распределения по скоростям. Используя параметрическое решение, можно от интегрирования по скоростям перейти к интегрированию по θ, φ, τ.

Предварительно выразим через функции (2) координаты вектора $\mathbf{N}$, нормального к поверхности сферы, и якобиан перехода I. В криволинейных координатах θ, φ векторы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, касательные к координатным линиям, имеют в точке $(\theta,\ \varphi)$ координаты

$$\mathbf{R}_1=\left\{\frac{\partial x_0}{\partial\theta},\frac{\partial y_0}{\partial\theta},\frac{\partial z_0}{\partial\theta}\right\},\quad \mathbf{R}_2=\left\{\frac{\partial x_0}{\partial\varphi},\frac{\partial y_0}{\partial\varphi},\frac{\partial z_0}{\partial\varphi}\right\}$$

В этой точке вектор нормали

$$\mathbf{N}=\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2 \tag{5}$$

С учетом (3) якобиан

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial v_x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial v_y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial v_x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial v_y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial v_z}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial v_x}{\partial\tau} & \dfrac{\partial v_y}{\partial\tau} & \dfrac{\partial v_z}{\partial\tau}\end{vmatrix}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}}{(t-\tau)^3} \tag{6}$$

Используя (4) и (6), получаем концентрацию молекул газовыделения в точке

(x, y, z) в момент времени t

$$n(t, x, y, z)=\int_0^t \iint\limits_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}\geqslant 0} f_0\left(\tau, \theta, \varphi\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{s-\tau}\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}}{(t-\tau)^3}\,d\theta\,d\varphi\,d\tau \tag{7}$$

С помощью (7) найдем концентрацию молекул и параметр D при стационарном газовыделении сферы, когда функция f_0 не зависит от времени. С учетом сферической симметрии задачи достаточно найти концентрацию молекул в точке $P(0, 0, z)$ или $P(r)$, где $r=z-R$ (центр прямоугольной системы координат находится в центре сферы). Видимая из точки P поверхность сферы характеризуется изменением углов θ и φ в диапазоне

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_*=\arccos\frac{R}{z},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

В качестве f_0 возьмем одностороннее максвелловское распределение

$$f_0=\frac{2n_0}{\pi^{3/2}v_0^3}\exp\left(-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{v_0^2}\right)$$

где n_0, v_0 — концентрация и наиболее вероятная скорость молекул газовыделения на поверхности сферы.

Используя формулы (2) и (3), запишем компоненты вектора $\mathbf{v}$ в точке $(0, 0, z)$

$$\mathbf{v}=\left\{-\frac{R}{t}\sin\theta\cos\varphi, -\frac{R}{t}\sin\theta\sin\varphi, \frac{z-R\cos\theta}{t}\right\}$$

Из (2) и (5) находим компоненты вектора $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N}=\{R^2\sin^2\theta\cos\varphi, R^2\sin^2\theta\sin\varphi, R^2\sin\theta\cos\varphi\}$$

Отсюда

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}=\frac{R^3}{t}\Phi\left(\frac{z}{R}, \theta\right),\quad \Phi=\sin\theta\left(\frac{z}{R}\cos\theta-1\right)$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\left(\frac{R}{t}\right)^2 F\left(\frac{z}{R}, \theta\right),\quad F=1-2\frac{z}{R}\cos\theta+\left(\frac{z}{R}\right)^2$$

Подставляя $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ в f_0, а f_0 и $\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}$ в (7) и полагая для стационарного случая верхний предел интегрирования по t равным ∞, получим

$$n(z)=\int_0^\infty\int_0^{\theta_*}\int_0^{2\pi}\frac{2n_0}{\pi^{3/2}v_0^3}\exp\left[-\left(\frac{R}{v_0t}\right)^2 F\right]\frac{R^3}{t^4}\Phi\,d\varphi\,d\theta\,dt$$

Этот трехкратный интеграл после интегрирования по φ и t сводится к однократному интегралу по θ

$$\frac{n(z)}{n_0}=\int_0^{\theta_*}\frac{\Phi}{F^{3/2}}\,d\theta$$

Вводя обозначения $y=z/R$, $A=1+y^2$, $B=2y$ и проводя замену $A-B\cos\theta=x$, получаем

$$\frac{n(z)}{n_0}=\frac{1}{B}\left(-2\sqrt{A-2}+\frac{A-2}{\sqrt{A-B}}+\sqrt{A-B}\right)$$

Выполнив алгебраические преобразования, находим концентрацию молекул газовыделения в зависимости от расстояния до поверхности сферы

$$\frac{n(r)}{n_0}=1-\sqrt{1-\left(1+\frac{r}{R}\right)^{-2}} \tag{8}$$

Используя (8), найдем величину плотности столба молекул газовыделения

$$\frac{D}{n_0R}=\int\limits_0^\infty\left(1-\sqrt{1-\left(1+\frac{r}{R}\right)^{-2}}\right)d\left(\frac{r}{R}\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(A-\sqrt{(1+A)^2-1}+\arccos\frac{1}{1+A}\right)=\frac{\pi}{2}-1$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.IV.1990

УДК 533.697.2 : 532.525.2

С. Ю. КРАШЕНИННИКОВ, И. Р. МИКЛАШЕВСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СТРУИ ИЗ ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ЩЕЛИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВОКРУГ ВОЗДУХОЗАБОРНИКА

Излагаются результаты экспериментального исследования струйного течения, возникающего при распространении конической струи из тонкой щели, расположенной по периферии всасывающего отверстия. Исследовалась перестройка струйного течения, связанная с возникающей трехмерной структурой течения. Предложена схема течения.

В [1, 2] исследовались струи, распространяющиеся из кольцевого сопла с заглушенной центральной частью или с выдувом газа в центральную часть сопла. В том случае, когда подвод газа в центральную часть сопла невелик или отсутствует, давление в центральной зоне кольцевой струи существенно снижается, из-за чего струя сильно искривляется и вблизи сопла образуется внутренняя зона обратных токов. При отсосе газа через центральную часть сопла также должна возникать подобная картина течения, однако описания такого рода течений в литературе не встречаются.

1. В данной работе рассматривалась возможность применения кольцевой струи в качестве экрана, ограничивающего попадание нежелательной примеси, распределенной в окружающем воздухе, во всасывающий канал. Струя, вытекающая из кольцевого сопла, экранирует отверстие всасывающего канала и препятствует попаданию в него воздуха из области, расположенной вблизи сопла. Картина такого течения и схема установки, на которой проводились исследования, приведены на фиг. 1, *а*.

Установка представляет собой всасывающий патрубок круглого сечения диаметром 40 мм и сужающееся кольцевое сопло шириной 0,5 мм с радиусом кольца $R=25$ мм. Скорость воздуха на входе в патрубок составляла 0–40 м/с $\pi(\lambda_b)=1-0{,}94$, где λ_b – приведенная скорость в воздухозаборном патрубке, $\pi(\lambda)$ – газодинамическая функция). Струя из кольцевого сопла вытекала при критическом и сверхкритическом перепадах давления ($\pi_c=p_c^*/B_0=2{,}0-3{,}5$, где p_c^* – полное давление воздуха в сопле B_0 – давление в окружающем воздухе [3]). Воздух в струе «помечался» небольшой добавкой гелия, объемная концентрация которого не превышала 10%. Эксперименты проводились с тремя различными соплами с центральным углом $\alpha=0$, 40, 80°. При истечении из сопла с углом $\alpha=80°$ струя прилипала к поверхности модели и образовывала пристенную веерную струю на торцевой поверхности модели.

2. Эксперименты, проведенные с соплами с углами $\alpha=0$, 40°, показывают: для диапазона параметров истечения струи $1<\pi_c\leqslant 3{,}5$ и при разрежении в воздухозаборнике, соответствующем $\pi(\lambda_b)=1-0{,}94$, в зависимости от соотношения расходов воздуха через воздухозаборник и кольцевое сопло, реализуются три различные схемы течения.

Расход воздуха через воздухозаборник значительно меньше расхода воздуха через сопло. В этом случае течение качественно не отличается от течения, описанного в [2]. Кольцевая струя на больших удалениях от модели переходит в обычную затопленную струю. На фиг. 2 приведены экспериментальные данные о положении