

подачи разбавленного полимерного раствора расхождение между диаграммами c , возрастает до 25%.

На фиг. 2 приведены расчетные зависимости относительного коэффициента местного сопротивления трения $C_f = c_f/c_{f0}$ (c_{f0} – коэффициент сопротивления в том же сечении пограничного слоя на непроницаемой пластине) от параметра вдува $b = 2v_w^0/c_{f0}$ при однородном по всей поверхности пластины выпуске пассивной примеси (кривые 1, сплошная линия отвечает зависимостям A^+ от v_w^+ , взятым из [4, 6], а штриховая соответствует случаю $A^+ = A$ и совпадает с полученной в [1]) и разбавленного полимерного раствора (кривые 2–4, отвечающие значениям $c_0/\rho = 3 \cdot 10^{-6}, 3 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-4}$). Там же представлены опытные данные [3] для пассивной примеси, с которыми хорошо согласуется сплошная линия 1. Хуже согласуется с экспериментальными данными штриховая линия, что указывает на необходимость учета вдува в длине пути смешения, особенно при $b > 1$. Исходя из представленных на фиг. 1 и 2 результатов, можно ожидать, что при расчете пограничного слоя с подачей разбавленного полимерного раствора учет вдува в длине пути смешения по второй или третьей зависимости [4, 6] будет приводить к лучшим результатам.

В заключение отметим, что, как показывает расчет, с ростом концентрации подаваемого через проницаемую стенку раствора c_0 существенно меняется характер зависимости c_f/c_{f0} от b . Если при малых значениях $c_0/\rho \sim 10^{-6}$ эта зависимость лишь незначительно отклоняется от кривой 1 (сплошная), то при $c_0/\rho \sim 10^{-4}$ с увеличением b относительное сопротивление трения сначала резко падает, затем после достижения минимального значения начинает медленно нарастать. Это обусловлено наличием оптимальной концентрации c_+ , при которой происходит максимальное снижение сопротивления.

Автор выражает благодарность В. А. Иоселевичу за внимание к работе, В. А. Алексину за полезные замечания по численному методу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексин В. А., Михайлук А. Г., Пилипенко В. Н. Сопротивление пластины при распределенной подаче полимерного раствора в турбулентный пограничный слой // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 1. С. 56–60.
2. Алексин В. А., Михайлук А. Г., Пилипенко В. Н. Влияние распределенной подачи полимерного раствора на характеристики турбулентного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 58–64.
3. Котляр Я. М., Совершенный В. Д., Стриженов Д. С. Методы и задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1987. 317 с.
4. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987. 590 с.
5. Иоселевич В. А. Микро- и макрогидродинамика полимерных растворов // Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. М.: Наука, 1987. С. 146–163.
6. Schlichting H. Recent progress in boundary-layer research // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 4. P. 427–440.
7. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 304–325.

Калуга

Поступила в редакцию
29.VI 1989

УДК 533.6.011:534.2

© 1991 г.

П. В. ТРЕТЬЯКОВ

ДИФРАКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Задача дифракции плоской единичной волны на отрезке рассматривалась многими авторами [1–4]. Однако решение с помощью преобразования Винера – Хопфа определялось только на поверхности пластиинки для всех дифракционных волн, кроме возникающей первой. Рассматривалось падение волны как по нормали к пластиинке [2], так и под произвольным углом [3]. Построение решения для всего поля течения приводится в [4].

В настоящей статье получено решение задачи дифракции произвольной акустической волны на полосе конечной ширины. Решение строится с помощью обобщения полученного ранее интеграла для задачи дифракции акустических волн на полуплоскости [5]. Вначале ищется решение задачи дифракции произвольной акустической волны на римановом многообразии, соответствующем полосе конечной ширины. После этого путем замены значений полярного угла находится решение для отраженной волны при дифракции на римановом многообразии, а затем путем линейной комбинации этих решений удовлетворяются граничные условия на поверхности полосы.

Абсолютно аналогично строится и неприводимое здесь решение задачи дифракции произвольной акустической волны на щели конечной ширины.

Пусть ось z_0 декартовой системы координат $x_0y_0z_0$, связанной с первым ребром O , полосы с шириной, равной a , совпадает с одной из кромок этой полосы. Ось x_0 – лежит в плоскости полосы и направлена от одной кромки к другой, а ось y_0 – перпендикулярна первым двум, образуя вместе с ними правую систему.

Систему координат $x_1y_1z_1$, связанную со вторым ребром O_1 , введем следующим образом: $x_1=a-x_0$, $y_1=-y_0$, $z_1=z_0$.

Рассмотрим падение на эту полосу произвольной акустической волны вида

$$f_0(t_{01}, r_0, z_0, \cos(\alpha_0 + \theta_0)) H(\psi_{01}(\alpha_0 + \theta_0)) \quad (1)$$

$$r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}, \quad \theta_0 = \arctg(y_0/x_0)$$

Здесь t_{01} – время, отсчитываемое с момента прихода волны на ребро O , $\alpha_0 = \text{const}$ – угол, который составляет нормаль к фронту волны в момент $t_{01}=0$ в точке O с плоскостью полосы, $H(x)$ – функция Хевисайда, а f_0 – представляет собой избыточное давление (или потенциал скорости), фронт падающей волны можно записать

$$\psi_{01}(\alpha_0 + \theta_0) = \eta_{01}(t_{01}, r_0, z_0) - \cos(\alpha_0 + \theta_0) = 0$$

Волна (1) удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

этому же уравнению должно удовлетворять и решение задачи дифракции.

На поверхности полосы задается условие непротекания $\partial f / \partial n = 0$ (абсолютно жесткий экран) или $f=0$ (абсолютно мягкий экран).

В момент времени $t_{01}=0$ начинается дифракция на ребре O . Поверхность дифракции описывается соотношением

$$\eta_{01}(t_{01}, r_0, z_0) = 1. \quad (3)$$

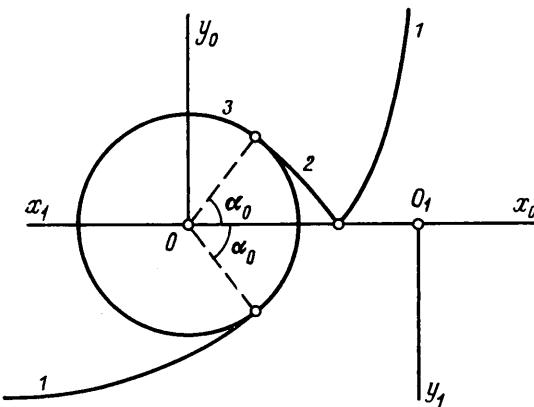
До тех пор пока волна не достигнет ребра O , дифракция протекает так же, как и на полуплоскости. На фигуре изображена картина дифракции, соответствующая этому промежутку времени, для плоскости $z_0=0$. Кроме падающей волны 1 в дифракции участвует и отраженная волна 2. Дифракционная волна обозначена на этой фигуре цифрой 3. В [5] для дифракции на полуплоскости было показано, что удобнее рассматривать вначале задачу дифракции отдельно для падающей и отраженной волн на римановой поверхности с периодичностью 4π по θ , а затем путем суперпозиции полученных решений удовлетворить граничным условиям на поверхности полуплоскости. Такой же подход будет использован в настоящей работе.

Рассмотрим риманово многообразие, соответствующее полосе конечной ширины. Для каждого из ребер (O и O_1) есть своя риманова поверхность. Однако они не являются независимыми друг от друга, а связаны таким образом, что при переходе на новый лист одной из поверхностей (при пересечении поверхности полосы) осуществляется переход на новый лист и другой поверхности. Причем периодичность решения такова, что достаточно рассмотреть два листа такого многообразия. На всех остальных листах картина будет такой же, периодически повторяясь через каждые два из них. До прихода на разрез риманова многообразия падающая волна присутствует через лист, что можно отразить, домножив выражение (1) падающей волны на $H(\sin(\alpha_0 + \theta_0)/2)$.

Решение задачи дифракции этой волны на римановой поверхности с периодичностью 4π по θ_0 , добавляемое к потенциальному (1), имеет вид

$$-\varphi_{01} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\mu_{01}}^{\mu_{01}} f_0(t_{01}, r_0, z_0, 2u^2 + 1) \frac{\sin(\alpha_0 + \theta_0)/2 du}{u^2 + \sin^2(\alpha_0 + \theta_0)/2} H(\eta_{01} - 1) \quad (4)$$

$$\mu_{01} = [(\eta_{01} - 1)/2]^{1/2}$$



Для произвольной акустической волны вида

$$f_0(t_{01}, r_0, z_0, \vartheta_{01}) H(\psi_{01}(\vartheta_{01})) \quad (5)$$

при условии, что f_{01} является аналитической, формула (4) обобщается следующим образом:

$$\begin{aligned} -\varphi_{01} = & -\frac{H(\eta_{01}-1)}{2\pi} \int_{v_{01}}^1 \operatorname{Im} f_0 \left\{ -i \ln [w - (w^2 - 1)^{1/2}]^2 \right\} \frac{\cos(\vartheta_0/2) dw}{w^2 - \cos^2(\vartheta_0/2)} - \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\mu_{01}}^{\mu_{01}} \operatorname{Re} f_0 \left\{ -i \ln [(v^2 + 1)^{1/2} - v]^2 \right\} \frac{\sin(\vartheta_0/2) dv}{v^2 + \sin^2(\vartheta_0/2)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_{01} = [(\eta_{01} + 1)/2]^{1/2}, \quad i^2 = -1$$

Здесь $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z$ — обозначают мнимую и действительную части комплексного числа, а первые три аргумента f_0 , как и везде далее, опущены.

Если волна (5) присутствует на каждом листе и является антисимметричной функцией по листам, т. е. $f_0(\vartheta_0) = -f_0(-\vartheta_0)$, $f_0(\vartheta_0 + 4\pi k) = f_0(\vartheta_0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то (6) преобразуется к виду

$$-\varphi_{01} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\mu_{01}}^{\mu_{01}} \operatorname{Re} f_0 \left\{ -i \ln [(v^2 + 1)^{1/2} - v]^2 \right\} \frac{\sin(\vartheta_0/2) dv}{v^2 + \sin^2(\vartheta_0/2)} H(\eta_{01}-1) \quad (7)$$

Пусть в цилиндрических координатах, связанных с ребром O_1 , падающую волну можно представить в виде (1), где индексы O необходимо заменить на 1, причем t_{11} — время, отсчитываемое с момента прихода падающей волны на это ребро. Тогда внутри возникшей области дифракции с фронтом $\eta_{11}(t_{11}, r_1, z_1) = 1$ решение также записывается в виде (4) с заменой соответствующих индексов.

Начиная с момента времени $t_{01} + t_{11} = a$ дифракционные волны, возникающие на разных ребрах, пересекаются. Решение внутри области пересечения можно представить в виде

$$\Phi = f_1 [\cos(\alpha_l + \vartheta_l)] H[\psi_{l1}(\alpha_l + \vartheta_l)] H[\sin(\alpha_l + \vartheta_l)/2] - \quad (8)$$

$$- \sum_{j=0}^1 \varphi_{j1}(t_{j1}, r_j, z_j, \sin(\alpha_j + \vartheta_j)/2) H(\eta_{j1}-1), \quad l=0; 1$$

причем ввиду того что f_0 и f_1 совпадают, в дальнейшем будет выбираться $l=0$ или $l=1$ в зависимости от того, какое представление удобнее для рассмотрения.

В момент времени $t_{01} = a$ волна дифракции, возникшая на первом ребре, достигает ребра O_1 и начинается вторичная дифракция. Ввиду того что на этом ребре присутствуют волны f_1 и Φ_{11} , необходимо рассмотреть дифракцию лишь $-\varphi_{01}$. Уравнение фронта этой волны в координатах ребра O_1 имеет вид $\psi_{12}(\pi - \vartheta_1) = 0$, причем

$r_0 = (r_1^2 + a^2 - 2ar_1 \cos \theta_1)^{1/2}$, $t_{12} = t_{01} - a$. Данная волна присутствует на обоих листах риманова многообразия и зависит от $\sin(\alpha_0 + \theta_0)/2$. Введем $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае волна антисимметрична по листам и для определения решения φ_{12} необходимо воспользоваться (7), а полное решение будет иметь вид (8), к которому необходимо прибавить φ_{12} .

Аналогично для вторичной дифракции на первом ребре, которая начинается в момент времени $t_{11} = a$ (только здесь необходимо ввести $\theta_3 = \pi - \theta_1$ и $t_{02} = t_{11} - a$). Решение φ_{02} пишется с помощью формулы (7), примененной к φ_{11} . Точно так же, как и выше, при возникновении пересечения волн вторичной дифракции полное решение внутри него записывается

$$\Phi = f_l [\cos(\alpha_l + \theta_l)] H[\psi_{l1}(\alpha_l + \theta_l)] H[\sin(\alpha_l + \theta_l)/2] + \\ + \sum_{j=0}^1 \sum_{m=1}^2 (-1)^m \varphi_{jm}(t_{jm}, r_j, z_j, \sin(\alpha_j + \theta_j)/2) H(\eta_{jm}-1), \quad l=0; 1 \quad (9)$$

Этот процесс можно продолжить до бесконечности и каждую из вновь возникающих волн можно представить через предыдущую следующим образом:

$$-\varphi_{0k} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\mu_{01}}^{\mu_{01}} \operatorname{Re} \varphi_{1k-1} \left\{ -i \ln[(v^2+1)^{1/2} - v]^2 \right\} \frac{\sin(\theta_0/2) dv}{v^2 + \sin^2(\theta_0/2)} H(\eta_{01}-1) \quad (10)$$

Полное решение для k -той дифракции на ребрах O и O_1 примет вид

$$\Phi = f_l [\cos(\alpha_l + \theta_l)] H[\psi_{l1}(\alpha_l + \theta_l)] H[\sin(\alpha_l + \theta_l)/2] + \\ + \sum_{j=0}^1 \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m \varphi_{jm} H(\eta_{jm}-1) + (-1)^k \varphi_{0k} H(\eta_{0k}-1), \quad l=0; 1 \quad (11)$$

$$\Phi = f_l [\cos(\alpha_l + \theta_l)] H[\psi_{l1}(\alpha_l + \theta_l)] H[\sin(\alpha_l + \theta_l)/2] + \\ + \sum_{j=0}^1 \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m \varphi_{jm} H(\eta_{jm}-1) + (-1)^k \varphi_{1k} H(\eta_{1k}-1), \quad l=0; 1 \quad (12)$$

Внутри пересечения волн k -той дифракции получим

$$\Phi = f_l [\cos(\alpha_l + \theta_l)] H[\psi_{l1}(\alpha_l + \theta_l)] H[\sin(\alpha_l + \theta_l)/2] + \\ + \sum_{j=0}^1 \sum_{m=1}^k (-1)^m \varphi_{jm}(t_{jm}, r_j, z_j, [\sin(\alpha_j + \theta_j)/2]) H(\eta_{jm}-1), \quad l=0; 1 \quad (13)$$

Таким образом, задача дифракции произвольной акустической волны вида (1) на римановом многообразии, соответствующем полосе конечной ширины, полностью решена.

Для получения решения той же задачи для отраженной волны

$$f_0(t_{01}, r_0, z_0, \cos(\alpha_0 - \theta_0)) H(\psi_{01}(\alpha_0 - \theta_0))$$

необходимо во всех проведенных выше построениях заменить θ_0 на $4\pi - \theta_0$, а θ_1 на $4\pi - \theta_1$.

Для определения решения задачи дифракции на полосе конечной ширины, в зависимости от вида граничных условий на ее поверхности, необходимо проделать следующую процедуру.

Если выполняется условие непротекания $\partial f / \partial n = 0$, то к решению для падающей волны нужно прибавить решение для отраженной волны. Если же на поверхности пластиинки выполняется условие $f = 0$, то из решения для падающей волны необходимо вычесть решение для отраженной волны.

В итоге получено решение задачи дифракции произвольной акустической волны на полосе конечной ширины.

Нетрудно убедиться, что решение задачи дифракции на полосе конечной ширины при условии непротекания будет также и решением задачи дифракции для

щели конечной ширины, являющейся дополнением до плоскости рассмотренной полосы, при $f=0$. И наоборот, решение для полосы при $f=0$ будет решением для щели при условии непротекания на ее поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fox E. N. The diffraction of sound pulses by an infinitely long strip // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1948. V. 241. № 823. P. 71–103.
2. Сагомоян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1970. 120 с.
3. Исраилов М. Ш. Дифракция акустической волны на пластине // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 159–163.
4. Красильщикова Е. А. Дифракция акустической волны на неподвижной пластинке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 123–130.
5. Третьяков В. В., Третьяков П. В. К дифракции на клине акустических волн со сферической или цилиндрической симметрией // Газовая и волновая динамика. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 79–83.

Москва

Поступила в редакцию
20.XII.1989

УДК 533.6.011.5

© 1991 г.

Л. П. ВЕРЕЩАКА, А. А. СОБАЧКИН, Л. Е. СТЕРНИН

ГРАНИЦА ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ БЕЗУДАРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЕЛ

Построена серия кривых, ограничивающих область существования экстремальных безударных реактивных сопел для различных значений показателей адиабаты. Вне этой области экстремальные сопла содержат внутри себя сфокусированные висячие скачки уплотнения.

Решение методом контрольного контура вариационной задачи о сопле наибольшей тяги для осесимметричного изоэнтропического потока с постоянным показателем адиабаты γ получено в [1], а для баротропного газа – [2] и в [3]. Отметим, что два конечных соотношения на экстремали, определяющие в результате решения задачи Гурса экстремальный контур сопла, найденные в [2] и [3], полностью совпадают.

В [4, 5] показано, что существует область, в которой отсутствуют безударные решения вариационной задачи о сопле наибольшей тяги. В [6, 7] в этой области получено разрывное решение вариационной задачи с фокусированными ударными волнами, берущими начало от границы области влияния на контур сопла. Фундаментальный анализ различных решений вариационных задач для сопел дан в [8].

Исследование, проведенное для случая $\gamma=1,4$ в [9], показало, что область разрывных решений характеризовалась слишком большими для того времени степенями расширения при сравнительно умеренных длинах сопел, что и послужило причиной прекращения работ в этом направлении. Тем не менее в связи с неуклонным ростом степени расширения сопел, используемых в двигателестроении, исключить возможность попадания в данную область нельзя, об этом, в частности, свидетельствует и сравнительная недавно вышедшая работа [10].

Таким образом, сейчас стал актуальным вопрос о достаточно точно определении границ области, внутри которой экстремальное сопло можно найти на базе работ [1–3, 8] при использовании комплекса программ, широко внедренных в инженерную практику. Построение же экстремального контура по методике [6–8] значительно сложнее и хуже обеспечено программными средствами. Поэтому при расчете короткого контура с высокой степенью расширения заранее необходимо знать, какой области будет соответствовать рассматриваемый контур.

В [5], где впервые обнаружено наличие двух областей, приведено уравнение границы, разделяющей эти области. Однако данное уравнение связывает параметры не в концевой точке сопла B (фиг. 1), а в начальной точке D экстремальной характеристики первого семейства DB .

$$\gamma \sin \theta \sin(\alpha + \theta) - \cos \alpha \sin^2 2\alpha + \sin \theta \sin(\theta - \alpha) - \sin \alpha \sin 2\theta \cos 2\alpha = 0 \quad (1)$$