

УДК 533.6.011+532.529+537.84

© 1991 г.

С. В. КОРСУНСКИЙ, И. Т. СЕЛЕЗОВ

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА**

Распространение волн в проводящих жидкостях, насыщенных пузырьками газа и подверженных действию магнитного поля, представляет значительный интерес при разработке бесконтактных методов управления динамическими процессами в агрессивных газожидкостных средах. Волновое движение однородных сжимаемых жидкостей конечной электропроводности в магнитном поле изучалось в [1-5]. В [6] были построены уравнения движения гомогенных двухфазных сред и на их основе исследовано распространение линейных и нелинейных волн в жидкостях с пузырьками газа. Эволюция коротких волн в аэрированной электропроводной жидкости анализировалась в [10].

В настоящей работе на основе уравнений магнитной гидродинамики гомогенной газожидкостной среды рассматривается распространение длинных волн в несжимаемой электропроводной жидкости, насыщенной пузырьками непроводящего газа. Показано, что распространение слабонелинейных МГД-волн в такой среде описывается уравнением Бюргерса - Кортевега - де Вриза (БКдВ). Исследуется влияние эффектов МГД-взаимодействия на параметры быстрых и медленных магнитозвуковых слабых ударных волн.

**1. Постановка задачи.** При построении уравнений динамики гомогенной электропроводной несжимаемой жидкости, насыщенной пузырьками газа, предполагается, что все пузырьки имеют одинаковый первоначальный размер и равномерно распределены в жидкости, поведение газа является адиабатическим, масса каждого пузырька считается постоянной. Предполагается, что жидкость немагнитизируемая, электро- и магнитоизотропная, газ непроводящий, магнитные проницаемости газа и жидкости равны между собой. С учетом сделанных предположений уравнения магнитной гидродинамики гомогенной газожидкостной среды записываются в виде [6, 10]

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{v}_m \Delta \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (1.2)$$

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.3)$$

$$p = p_g - \rho_f (RR_{tt} + \frac{3}{2}R_t^2) - 4\eta R^{-1}R_t \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_f(1 - \beta) + \rho_g \beta, \quad p_g = p_0 (\rho_g / \rho_{0g})^\gamma \quad (1.5)$$

$$\frac{\rho_g \beta}{1 - \beta} = \frac{\rho_{0g} \beta_0}{1 - \beta_0}, \quad \frac{\rho_g}{\rho_{0g}} = \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (1.6)$$

Здесь  $\rho$ ,  $\mathbf{v} = (u, v_2, v_3)$ ,  $p$  — плотность, скорость и давление смеси,  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\mathbf{v}_m = 1/\mu\sigma$ ,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\sigma$  — электропроводность жидкости,  $\rho_f$ ,  $\rho_g$  — плотности жидкости и газа соответственно ( $\rho_f = \text{const}$ ),  $p_g$  — давление в газе,  $R$  — радиус пузырьков,  $\beta = 4\pi R^3 n / 3$  — объемное газосодержание,  $n$  — количество пузырьков газа в единице объема смеси,  $\beta_0$  — начальное газо-

содержание,  $p_0$ ,  $\rho_{0g}$ ,  $R_0$  — давление в смеси, плотность газа и радиус пузырьков в невозмущенном состоянии.

Уравнения (1.4)–(1.6) с учетом соотношений  $\rho_g \ll \rho_f$ ,  $\rho \approx \rho_f(1-\beta)$ , справедливых для большинства реальных газожидкостных сред, приводятся к двум уравнениям для плотности и давления смеси

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-\beta_0} \left[ 1 + \frac{\beta_0}{1-\beta_0} \left( \frac{R}{R_0} \right)^3 \right]^{-1} \quad (1.7)$$

$$p = p_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{\rho_0}{1-\beta_0} \left( RR_{tt} + \frac{3}{2} R_t^2 \right) - 4\eta \frac{R_t}{R} \quad (1.8)$$

где  $\rho_0 = \rho_f(1-\beta_0)$  — плотность смеси в невозмущенном состоянии. Отметим, что соотношения (1.4)–(1.8) справедливы при условиях [8]  $R_0 \ll L_b \ll \lambda$ ,  $\beta_0 \ll 1$ , где  $\lambda$  — характерная длина звуковой волны,  $L_b$  — характерное расстояние между пузырьками.

**2. Распространение линейных волн.** Предположим, что в невозмущенном состоянии жидкость покоится при давлении  $p_0$ , плотности  $\rho_0$  и подвержена действию постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Линеаризуя соотношения (1.1)–(1.3), (1.7), (1.8) относительно малых возмущений гидродинамического ( $\mathbf{v}'$ ) и электромагнитного ( $\mathbf{h}$ ) полей, получаем

$$\rho_0 \mathbf{v}_t' = -\nabla p + \mu (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0$$

$$\rho_t = -\rho_0 \nabla \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{h}_t = \nu_m \Delta \mathbf{h} + \nabla \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{H}_0)$$

(2.1)

$$\rho = -3\beta_0 \rho_0 \frac{R}{R_0}, \quad p = -3\gamma p_0 \frac{R}{R_0} - \rho_f R_0 R_{tt} - \frac{4\eta}{R_0} R_t$$

В случае одномерного движения вдоль оси  $x$  система уравнений (2.1) приводится к одному уравнению четвертого порядка

$$\left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nu_m \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} - c_A^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} - \alpha \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - c_A^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \right\} u = 0, \quad c_A^2 = \frac{\mu H_0^2}{\rho_0} \quad (2.2)$$

$$\nu_0 = \frac{4\eta}{3\beta_0 \rho_0}, \quad c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0 \beta_0}, \quad \alpha = \frac{R_0^2}{3\beta_0 (1-\beta_0)}$$

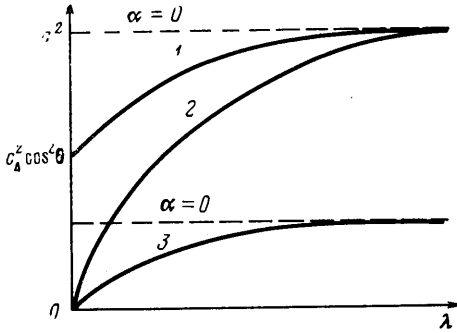
Соответствующее дисперсионное соотношение для гармонических волн  $u \sim \exp[i(\omega t - kx)]$  имеет вид

$$\omega^4 (1 + \alpha k^2) - \omega^2 k^2 (D^2 + \alpha c_A^2 k^2 \cos^2 \theta + \nu_0 \nu_m k^2) - i \nu_0 \omega k^2 (\omega^2 - c_A^2 k^2 \cos^2 \theta) - i \nu_m \omega k^2 (\omega^2 (1 + \alpha k^2) - c_0^2 k^2) + c_0^2 c_A^2 k^4 \cos^2 \theta = 0, \quad \theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{H}_0) \quad (2.3)$$

где  $D^2 = c_0^2 + c_A^2$ . Уравнение (2.3) сводится к известному дисперсионному уравнению для магнитозвуковых волн в идеально проводящей жидкости при  $\nu_0 \rightarrow 0$ ,  $\nu_m \rightarrow 0$ ,  $\alpha = 0$  [1]. В случае идеальной жидкости с пузырьками газа ( $\nu_0 \rightarrow 0$ ,  $\nu_m \rightarrow 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ) получаем уравнение для фазовых скоростей магнитозвуковых волн

$$c_p^4 (1 + \alpha k^2) - c_p^2 (D^2 + \alpha c_A^2 k^2 \cos^2 \theta) + c_0^2 c_A^2 \cos^2 \theta = 0, \quad c_p = \frac{\omega}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4)$$

Разрешая уравнение (2.4) относительно  $c_p^2$ , находим выражения для фазовых скоростей быстрых ( $F$ ) и медленных ( $S$ ) магнитозвуковых волн, которые существенно зависят от длины волны  $\lambda$  (качественные графики зависимостей  $c_F^2(\lambda)$  и  $c_S^2(\lambda)$  изображены на фигуре: 1 —  $c_F^2(\lambda)$ ; 2 —  $c_S^2(\lambda)$  при  $\theta = \pi/2$ ; 3 —  $c_S^2(\lambda)$ ). В случае чисто поперечного магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ) имеем  $c_S = 0$ ,  $c_F = \pm D/\sqrt{1 + \alpha k^2}$ , где выбор знака в последнем соотношении определяет направление распространения волны.



В приближении длинных волн ( $\alpha k^2 \ll 1$ ) и слабой диссипации ( $\nu_0 \ll 1$ ,  $\nu_m \ll 1$ ) решения уравнения (2.3) представляются в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \pm ck - \alpha_3 k^3 + i\alpha_2 k^2 \\ \alpha_2 &= \frac{\nu_0}{2} \frac{c^2 - c_A^2 \cos^2 \theta}{2c^2 - D^2} + \\ &+ \frac{\nu_m}{2} \frac{c^2 - c_0^2}{2c^2 - D^2} \\ \alpha_3 &= \frac{\alpha c}{2} \frac{c^2 - c_A^2 \cos^2 \theta}{2c^2 - D^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $c$  — один из корней уравнения (2.4) при  $\alpha = 0$ . Соотношение (2.5) свидетельствует о том, что в электропроводящей газожидкостной среде возмущения поля распространяются с дисперсией и диссипацией, причем параметр дисперсии и декремент затухания волн зависит от величины и направления приложенного магнитного поля.

Воспользовавшись эвристическим подходом [11], заменим в (2.5)  $\omega$  и  $k$  операторами:  $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$ ,  $k \rightarrow -i\partial/\partial x$ . Тогда относительно  $u$  получаем уравнение

$$u_t + cu_x - \alpha_2 u_{xx} + \alpha_3 u_{xxx} = 0 \quad (2.6)$$

которое является линейной частью уравнения БКдВ [13].

**3. Вывод эволюционного уравнения.** Переходя к исследованию нелинейных волн, запишем уравнения (1.1)–(1.3), (1.7), (1.8) в случае одномерного движения вдоль оси  $x$

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x) &= -p_x - \frac{1}{2} \text{Ph}(|H|^2)_x \\ \rho(U_t + uU_x) &= \text{Ph} \cos \theta H_x \\ H_t - \nu_m H_{xx} + (uH - U \cos \theta)_x &= 0, \quad \rho = (1 - \beta_0 + \beta_0 R^2)^{-1} \\ p &= \frac{\beta_0}{\gamma R^{3\gamma}} - \delta \left( RR_{tt} + \frac{3}{2} R_t^2 \right) - \nu \frac{R_t}{R} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) введены безразмерные величины по формулам (звездочки опущены)

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0}, \quad H^* = \frac{H}{H_0}, \quad R^* = \frac{R}{R_0}, \quad u^* = \frac{u}{c_0} \\ x^* &= \frac{x}{L}, \quad t^* = t \frac{c_0}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \quad U^* = \frac{U}{c_0} \\ \nu_m^* &= \frac{1}{\mu \sigma c_0 L}, \quad \text{Ph} = \frac{\mu H_0^2}{\rho_0 c_0^2}, \quad \nu = \frac{4\eta}{\rho_0 c_0 L}, \quad \delta = \frac{R_0^2}{L^2(1 - \beta_0)} \end{aligned}$$

где  $L$  — характерный линейный масштаб,  $U = v_2 + iv_3$ ,  $H = H_2 + iH_3$ .

Введем новые независимые переменные  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\xi = x - ct$ , где малый параметр  $\varepsilon$  характеризует безразмерную амплитуду волны, и представим искомые функции в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned}(u, U) &= \varepsilon(u_1, U_1) + \varepsilon^2(u_2, U_2) + \dots \\ (\rho, R) &= 1 + \varepsilon(\rho_1, R_1) + \varepsilon^2(\rho_2, R_2) + \dots \\ p &= \beta_0/\gamma + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \quad H = \sin \theta + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots\end{aligned}\quad (3.2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что  $\nu, \nu_m, \delta = O(\varepsilon)$ . Подставляя разложения (3.2) в (3.1), удерживая члены первого и второго порядка малости и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  к нулю, получаем алгебраическое уравнение для  $c$  и эволюционное уравнение типа БКДВ относительно  $u_1(\tau, \xi)$

$$\begin{aligned}c^4 - c^2(1 + Ph) + Ph \cos^2 \theta &= 0 \\ u_{1\tau} + \alpha_1 u_1 u_{1\xi} - \alpha_2 u_{1\xi\xi} + \alpha_3 u_{1\xi\xi\xi} &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{\gamma + 1}{2\beta_0} + \frac{3}{2} \frac{c^2(c^2 - 1)}{c^2 - Ph \cos^2 \theta} \right) \frac{c^2 - Ph \cos^2 \theta}{c^4 - Ph \cos^2 \theta}\quad (3.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{\nu_0}{2} \frac{c^2 - Ph \cos^2 \theta}{2c^2 - (1 + Ph)} + \frac{\nu_m}{2} \frac{c^2 - 1}{2c^2 - (1 + Ph)}$$

$$\alpha_3 = \frac{\delta c}{6\beta_0} \frac{c^2 - Ph \cos^2 \theta}{2c^2 - (1 + Ph)}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{3\beta_0}$$

Параметр  $\alpha_1$  в (3.4) характеризует нелинейную поправку к скорости магнитозвуковой волны, параметр  $\alpha_2$  является параметром диссипации, а  $\alpha_3$  — дисперсии волн. При отсутствии магнитного поля ( $Ph = 0$ ) имеем  $c^2 = 1$ ,  $\alpha_1 = (\gamma + 1)/2\beta_0$ ,  $\alpha_2 = \nu_0/2$ ,  $\alpha_3 = \delta/6\beta_0$ , и уравнение (3.3) приводится к виду, полученному в [6, 9] для непроводящей газожидкостной среды.

4. Анализ решений уравнения БКДВ (3.3). Структура решений уравнения БКДВ в значительной степени определяется величинами коэффициентов уравнения. Поэтому прежде всего проанализируем соотношения (3.4).

Полученные выше результаты справедливы при  $\beta_0 \ll 1$ . В этом случае величина  $c_0^2 \gg 1$  и при  $\beta_0 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ ,  $B_0 = \mu H_0 \sim 10$  Тл имеем  $Ph < 1$ . Кроме того, в дальнейшем для простоты предполагается, что  $Ph^2 \ll 1$ . Тогда, из (3.4) с точностью до членов порядка  $O(Ph^2)$  получаем для быстрых и медленных магнитозвуковых волн

$$c_F^2 \approx 1 + Ph \sin^2 \theta$$

$$\alpha_1^{(F)} \approx \frac{\gamma + 1}{2\beta_0} (1 - Ph \sin^2 \theta) + \frac{3}{2} Ph \sin^2 \theta\quad (4.1)$$

$$\alpha_2^{(F)} \approx \frac{\nu_0}{2} + \frac{\nu_m}{2} Ph \sin^2 \theta, \quad \alpha_3^{(F)} \approx \frac{\delta}{6\beta_0} \left( 1 + \frac{Ph \sin^2 \theta}{2} \right)$$

$$c_S^2 \approx Ph \cos^2 \theta$$

$$\alpha_1^{(S)} \approx \frac{\gamma + 1}{2\beta_0} Ph \sin^2 \theta + \frac{3}{2} (1 - Ph \sin^2 \theta)\quad (4.2)$$

$$\alpha_2^{(S)} \approx \frac{\nu_m}{2} (1 - Ph \sin^2 \theta), \quad \alpha_3^{(S)} \approx 0$$

Из приведенных соотношений видно, что наличие электропроводности и приложенного магнитного поля приводит к увеличению скорости, параметров дисперсии и диссипации быстрых магнитозвуковых волн. Следует подчеркнуть, что параметры быстрых магнитозвуковых волн в главном порядке определяются гидродинамическими величинами  $\alpha_{10} = (\gamma + 1)/2\beta_0$ ,  $\alpha_{20} = v_0/2$ ,  $\alpha_{30} = \delta/6\beta_0$ , а эффекты МГД-взаимодействия учитываются в следующем приближении по Ph. В свою очередь скорость и коэффициент диссипации медленных магнитозвуковых волн определяется преимущественно МГД-эффектами, а дисперсией медленных магнитозвуковых волн можно пренебречь.

Рассмотрим уравнение (3.3) с коэффициентами (4.1). Для новой иско-мой функции  $F = \alpha_1 u_1$  уравнение (3.3) приводится к виду

$$F_\tau + FF_\xi - \alpha_2 F_{\xi\xi} + \alpha_3 F_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.3)$$

Точное решение уравнения (4.3) для произвольных отличных от нуля параметров  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  было найдено в [12]

$$F = a \exp(\chi) \operatorname{sech}^2(\chi/2) \\ \chi = \frac{\alpha_2}{5\alpha_3}(\xi + 2a\tau), \quad a = \frac{3\alpha_2^2}{25\alpha_3} \quad (4.4)$$

Это решение типа «кинк», причем  $F \rightarrow 0$ ,  $\chi \rightarrow -\infty$ ,  $F \rightarrow 4a$ ,  $\chi \rightarrow +\infty$ . С учетом соотношений (4.1) для  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  в данном случае получаем  $a \approx a_0(3 - 2\alpha_*)$ ,  $a_0 = 3\alpha_{20}^2/25\alpha_{30}$ ,  $\alpha_* = 1 + \operatorname{Ph} \sin^2 \theta (1/4 - v_m/v_0)$ . Таким образом, амплитуда и скорость волны (4.4) увеличиваются или уменьшаются при возрастании Ph в зависимости от того, больше или меньше нуля величина  $(4v_m - v_0)$ .

Анализ асимптотического поведения решений уравнения (4.3) при  $\xi \rightarrow -\infty$ , аналогичный проведенному в [13], показывает, что ударная волна, описываемая уравнением (4.3), имеет монотонный профиль при  $\alpha_0 > \alpha_*$  и осциллирующий при  $\alpha_0 < \alpha_*$ , где  $\alpha_0 = \alpha_{20}/\sqrt{2F_0\alpha_{30}}$ . Если же  $\alpha_0 \ll \alpha_*$ , то асимптотическое представление для решения уравнения (4.3) при  $\xi \rightarrow -\infty$  записывается в виде

$$F \sim F_0 + \operatorname{const} \exp \left[ \frac{\alpha_{20}\xi}{2\alpha_{30}} \left( 1 + \operatorname{Ph} \sin^2 \theta \left( \frac{v_m}{v_0} - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \times \\ \times \cos \left[ \sqrt{\frac{F_0}{2\alpha_{30}}} \xi \left( 1 - \frac{\operatorname{Ph} \sin^2 \theta}{4} \right) \right]$$

Уравнение БКДВ исследовалось асимптотическими методами во многих работах [13, 14]. В [14] было установлено, что при малых  $\alpha_2$  асимптотическое решение уравнения БКДВ типа уединенной волны записывается в виде

$$F = a(\tau) \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{a(\tau)}{12\alpha_3}} \left( \xi - \frac{1}{3} \int_0^\tau a(\tau) d\tau \right) \right] \\ a(\tau) = A \left( 1 + \frac{8\alpha_2\tau}{45\alpha_3} \right)^{-1}, \quad a(0) = A$$

С учетом соотношений (4.1) находим, что в этом случае характер зависимости  $a(\tau)$  определяется формулой

$$a(\tau) = A \left[ 1 + \frac{\tau}{\tau_*} \left( 1 + \left( \frac{v_m}{v_0} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Ph} \sin^2 \theta \right) \right]^{-1}, \quad \tau_*^{-1} = \frac{8A\alpha_{20}}{45\alpha_{30}}$$

Эволюция медленных магнитозвуковых волн в рассматриваемой системе при  $\operatorname{Ph}^2 \ll 1$  описывается уравнением (3.3) с коэффициентами (4.2), т. е.

классическим уравнением Бюргерса. Структура решений этого уравнения исследована достаточно подробно [15]. Одно из решений, описывающее слабые ударные волны, записывается в виде

$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} - \frac{F_1 - F_2}{2} \operatorname{th} \left[ \frac{F_1 - F_2}{2} \frac{(\xi - W\tau)}{2\alpha_2} \right] \quad (4.5)$$

$$F_1 = F(-\infty), \quad F_2 = F(+\infty), \quad W = (F_1 + F_2)/2, \quad F = \alpha_1 u_1$$

Из (4.2) следует, что волны типа (4.5) существуют только при наличии магнитного поля, а увеличение амплитуды приложенного магнитного поля приводит к возрастанию скорости и уменьшению характерной ширины переходной области ударной волны.

Полученные в настоящей работе результаты позволяют сделать следующие выводы. В электропроводящей газожидкостной среде, подверженной действию магнитного поля, существует два типа продольных волн — быстрые и медленные магнитозвуковые, распространяющиеся с дисперсией и диссипацией. При этом эволюция слабонелинейных возмущений описывается уравнением БКДВ, а скорости, амплитуды, параметры дисперсии и диссипации магнитозвуковых волн определяются как гидродинамическими эффектами, так и эффектами МГД-взаимодействия. В случае, если величина объемного газосодержания очень мала, дисперсией медленных магнитозвуковых волн можно пренебречь, а характер влияния МГД-эффектов на параметры быстрых магнитозвуковых волн определяется соотношением коэффициентов вязкой диссипации и диссипации за счет конечной электропроводности среды.

Наличие электропроводности жидкой фазы и приложенного магнитного поля позволяет оказывать управляющее воздействие на структуру магнитозвуковых волн, в частности изменять условия перехода от осциллирующего к монотонному профилю быстрой волны, определять характер затухания ее амплитуды, регулировать характерную ширину медленной слабой ударной волны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бай Ши. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М.: Мир, 1964. 301 с.
2. Шерклиф Дж. А. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320 с.
3. Солуян С. И., Хозлов Р. В. К теории простых магнитогидродинамических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. № 2(8). С. 534.
4. Корсунский С. В. Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в электропроводящих средах // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 1. С. 48–52.
5. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитоупругих средах. Киев: Наук. думка, 1975. 163 с.
6. Van Wijngaarden L. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. № 3. P. 465–474.
7. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
8. Caflisch R. E., Miksis M. J., Papanicolaou G. C., Ting Lu. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids // J. Fluid Mech. 1985. V. 153. P. 259–273.
9. Накоряков В. Е., Покусав Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофиз. СО АН СССР. 1983. 237 с.
10. Манукян С. М. Исследование нелинейных узких пучков в электропроводящей жидкости с пузырьками газа // Изв. АН АрмССР. 1988. Т. 41. № 3. С. 37–46.
11. Корпел А., Банерджи П. П. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и к решениям солитонного типа // ТИИЭР. 1984. Т. 72. № 9. С. 6–30.
12. Кудряшов Н. А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 465–470.
13. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
14. Ott E., Sudan R. N. Damping of solitary waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 6. P. 1432–1434.
15. Sachdev P. L. Nonlinear diffusive waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 246 p.

Киев

Поступила в редакцию  
1.III.1990