

УДК 532.613.5:536.24

© 1991 г.

Ю. В. САНОЧКИН

ФОРМА ГРАНИЦЫ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ ЯЧЕЙКИ, ОБРАЗУЮЩЕЙСЯ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ РАСПРЕДЕЛЕННОМ НАГРЕВЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В ряде случаев (например, при лазерной или пучковой обработке материалов) на твердых поверхностях образуются тонкие протяженные области жидкой фазы с неизотермической свободной границей. Капиллярные силы играют в них определяющую роль. Скорость сканирования луча, как и скорость перемещения изотермы плавления, значительно меньше характерной скорости термокапиллярной конвекции и для рассмотрения многих вопросов правомочен квазистационарный подход. Горизонтальный размер нагреваемого участка поверхности l_* в упоминавшихся технологических процессах превосходит характерную толщину слоя по вертикали h_* .

Цель настоящей работы — теоретическое изучение деформации свободной границы жидкости термокапиллярным движением при симметричном распределенном ($l_* \gg h_*$) нагреве. Экспериментальному исследованию деформации свободной границы жидкости при слабом лучевом нагреве посвящены работы [1–5]. В [1, 6] делается вывод о термокапиллярном механизме явления, однако используемая теоретическая модель не адекватна условиям опыта, непоследовательна и незамкнута. Хотя диаметр лазерного луча сравним с капиллярной постоянной, для описания профиля поверхности применяется формула Ландау — Лифшица [7], при выводе которой не учитывается поверхностное давление. Имеется определенный произвол в задании температуры поверхности и т. д. Свободный от указанных ограничений анализ взаимодействия цилиндрического гауссова луча лазера с тонким слоем жидкости проведен в [4, 8]. В нем учитываются закон выделения энергии по толщине слоя и влияние температурного поля подложки. Решение находится численным методом.

В настоящей работе изучается случай поверхностного источника тепла (например, непрозрачная для лазерного излучения жидкость). Рассматривается плоская задача для относительно слабого нагрева, когда конвективным теплопереносом можно пренебречь и течение жидкости — ползущее. Она допускает замкнутое решение, обобщающее описание структуры термокапиллярной ячейки в приближении недеформируемости свободной границы [9].

Несимметричное распределение температуры реализуется в слое жидкости при поддержании разности температур между противоположными стенками кюветы. Рельеф границы термокапиллярного течения для этого случая изучался в [10, 11].

При нагреве лучевого типа, как увидим, твердые боковые границы области не оказывают заметного воздействия на течение, если длина ванны больше l_* на величину порядка капиллярной постоянной жидкости d . При рассмотрении многих вопросов (за исключением начальной стадии плавления металла, если говорить об упоминавшихся технологиях) слой жидкости можно считать неограниченным. Его нижняя граница задается профилем стенки $y = -h_* h(x)$. Поток тепла плотности $q_0 q(x)$ ($q(x) = 0$, $x \rightarrow \infty$) воздействует на верхнюю свободную границу жидкости $y = \xi(x)$, равновесное статическое положение которой $y = 0$. Сечение $x = 0$ есть плоскость симметрии. Ввиду условия $h_* \ll l_*$ применимо приближение пограничного слоя. Пусть физические условия таковы, что приведенные числа Рейнольдса и Марангони малы

$$R^* = (h_*^2 / l_*^2) R \ll 1, \quad M^* = PR^* \ll 1, \quad R = u_* l_* / \nu$$

где P — число Прандтля, ν — кинематическая вязкость, u_* — характерная

скорость. Тогда в уравнениях динамического и температурного пограничных слоев можно опустить конвективные члены и исходная система и граничные условия примут вид

$$\begin{aligned}
 u_x + v_y &= 0, & p_x &= \rho \nu y_{yy}, & p_y &= -\rho g, & T_{yy} &= 0 \\
 \nu \rho u_y &= -\alpha' T_x, & p &= \alpha/r + p_g + p_0, & v &= \zeta' u \\
 T_y &= (q_0/\kappa) q(x), & y &= \zeta(x); & u &= v = T - T_w = 0 \\
 y &= -h_* h(x); & u &= T_x = 0, & x &= 0; & u &= v = T - T_w = 0, & x \rightarrow \infty \\
 \alpha' &= -d\alpha/dT & p_g &= 2\nu\rho(v_y - \zeta' u_y)_{y=\zeta}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, α — коэффициент поверхностного натяжения, p_g — динамическое давление, r — радиус кривизны, g — ускорение силы тяжести. Плотность ρ , коэффициенты вязкости ν и теплопроводности κ считаются не зависящими от температуры. В динамическом граничном условии добавлено для общности внешнее давление $p_0(x)$, которое может вызываться, например, реакцией струи пара. Тепловые условия (1) соответствуют условиям упоминавшихся технологических процессов, если T_w равно температуре плавления. Опуская индекс, будем использовать в дальнейшем прежние обозначения безразмерных величин

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{x}{l_*}, & y_1 &= \frac{y}{h_*}, & u_1 &= \frac{u}{u_*}, & v_1 &= \frac{\nu l_*}{u_* h_*} \\
 p_1 &= \frac{p}{p_*}, & T_1 &= \frac{T - T_w}{\Delta T}, & \zeta_1 &= \frac{\zeta}{h_*}, & u_* &= \frac{\alpha' q_0 h_*^2}{\rho \nu \kappa l_*} \\
 \Delta T &= \frac{q_0 h_*}{\kappa}, & p_* &= \frac{\alpha(T_w) h_*}{l_*^2}
 \end{aligned}$$

Для давления и температуры согласно (1) получаются распределения

$$\begin{aligned}
 p &= B(\zeta - y) - [1 - \beta(h + \zeta)q]\zeta'' + (p_g + p_0)/p_* \\
 T &= (h + y)q, & B &= \frac{l_*^2}{d^2} = \frac{\rho g l_*^2}{\alpha(T_w)}, & \beta &= \frac{\alpha' \Delta T}{\alpha(T_w)}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь B — число Бонда, β — капиллярный параметр. Пропорциональный β член учитывает изменение лапласова давления из-за неизоэнтермичности свободной поверхности. Только когда в центре нагрева достигается критическая температура данного вещества, имеем $\beta=1$, как правило, $\beta \ll 1$. Интегрируя уравнения пограничного слоя и неразрывности и удовлетворяя кинематическому условию, приходим к соотношению

$$p_x = -\frac{1}{2} \mu B Q(x), \quad Q = q' + \frac{h' q}{h + \zeta}, \quad \mu = \frac{3\alpha' \Delta T}{\rho g h_*^2} \tag{3}$$

где μ — параметр, который можно назвать термокапиллярным аналогом числа Бонда [12]. С учетом (3) для составляющих скорости получаются следующие выражения:

$$u = -\frac{1}{4} Q(y+h)(3y+h-2\zeta), \quad v = \frac{1}{4} \partial/\partial x [Q(y+h)^2(y-\zeta)] \tag{4}$$

При $h=1, \zeta=0$ (4) переходит в решение [9]. Согласно (4), $u=0$ при

$x=0$, $x \rightarrow \infty$ и вдоль линии $y=1/3(-h+2\xi)$. Ее пересечение с кривой $v=0$ определяет центры вихрей. С точностью до величин $\sim h_*/l_*$ конвекцией охвачена область нагрева. Подставляя (2) в (3), находим уравнение для определения профиля границы

$$[(1-\beta(h+\xi)q)\xi'']' - B\xi' = 1/2\mu BQ + p_0'/p_* \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что вклад в (5) от динамического давления может быть отброшен как малая 2-го порядка. Так как $q \rightarrow 0$, $p_0 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то в качестве граничных условий к (5) примем $\xi(\infty)=0$ (выбор начала отсчета ξ), $\xi''(\infty)=0$ ($r \rightarrow \infty$ — плоская невозмущенная граница) и $\xi'(0)=0$ (условие симметрии).

Можно рассматривать разные профили дна ванны. Например, полагая $h+\xi=1$ (слой жидкости постоянной толщины), находим из (5) распределение $q(x)$, при котором свободная граница жидкости повторяет форму дна. Ограничимся в дальнейшем изучением конвекции в слое над плоским горизонтальным дном ($h=1$).

В этом случае уравнение (5) может быть 1 раз проинтегрировано и принимает вид

$$[1-\beta(1+\xi)q]\xi'' - B\xi = 1/2\mu Bq + p_0/p_* \quad (6)$$

$$\xi(\infty) = \xi'(0) = 0$$

Так как функции q , p_0 удовлетворяют граничным условиям, то при $B \gg 1$ прогиб границы воспроизводит профиль воздействий

$$\xi \simeq -1/2\mu q(x) - p_0(x)/p_* B \quad (7)$$

Деформации поверхности от воздействия внешнего давления и нагрева складываются. Во многих случаях неотрицательные функции q и p_0 имеют однотипный вид. Для краткости будем опускать в дальнейших формулах слагаемое p_0 . Если $\beta \ll 1$, то решение (6) в нулевом приближении имеет вид

$$\xi = -\frac{1}{2}\mu\sqrt{B}\left\{(\operatorname{ch}\sqrt{B}x) \int_x^\infty q(t)e^{-\sqrt{B}t} dt + e^{-\sqrt{B}x} \int_0^x q(t)\operatorname{ch}\sqrt{B}t dt\right\} \quad (8)$$

Пусть $q=0$ при $x>x_0$. Тогда в указанной области из (8) имеем

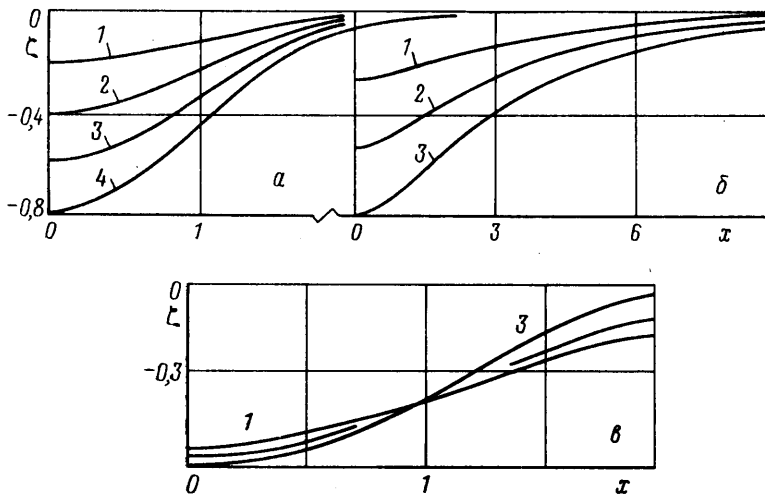
$$\xi = \xi(x_0) \exp[-\sqrt{B}(x-x_0)] \quad (9)$$

$$\xi(x_0) = -\frac{1}{2}\mu\sqrt{B} \exp(-\sqrt{B}x_0) \int_0^{x_0} q(t)\operatorname{ch}\sqrt{B}t dt$$

Таким образом, если возмущения скорости локализованы в подверженной нагреву области, деформация свободной границы распространяется вне указанной области на расстояние порядка капиллярной постоянной жидкости. Выражение (9) описывает обычное равновесие поверхности покоящейся изотермической жидкости в поле тяжести [7]. Нагрев жидкости вызывает такой же краевой эффект, как наличие стенки. Сказанное иллюстрируется следующими графиками, полученными для граничной функции:

$$q = 1/2(1 + \cos 1/2\pi x), \quad x \leq 2; \quad q = 0, \quad x > 2$$

На фиг. 1, а сравниваются профили (8) при $B=3$ (цифры 1–4 соответствуют значениям $3\mu=4, 8, 12, 16$), на фиг. 1, б — решения для $B=0,3$ ($3\mu=2, 4, 6$). При монотонной функции нагрева q рельеф границы также



Фиг. 1

оказывается монотонным. На фиг. 1, *в* показано полученное численным интегрированием (6) влияние параметра β (линии 1–3 соответствуют значениям $\beta=0, 0,5, 0,95$; $B=1, \mu=2$). Видна относительно небольшая роль изменения поверхностного давления за счет неизотермичности свободной границы.

Процесс установления конвекции при «включении» на границе гауссова распределения температуры исследовался в [12]. Рассматривался, как видно из сравнения с приведенными профилями, случай слабого нагрева с малым прогибом поверхности.

Максимальный прогиб в центре нагрева согласно (8) равен

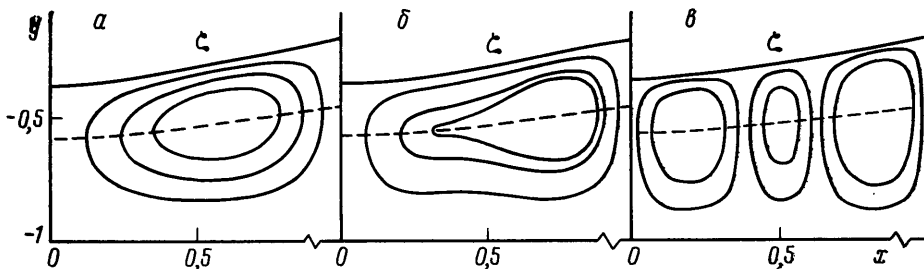
$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \mu \sqrt{B} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{B}t} q(t) dt \quad (10)$$

Область применимости полученного решения определяется условием необнажения дна $\zeta(0) > -1$, представляющим ограничение сверху на мощность нагрева. Для оценки указанной величины и глубины прогиба введем ступенчатую функцию: $q=1$ при $x \leq x_0 \sim 1$, $q=0$ при $x > x_0$. Тогда из (10) имеем

$$\zeta(0) \simeq -\frac{1}{2} \mu, \quad B \gg 1; \quad \zeta(0) \simeq -\frac{1}{2} \mu x_0 \sqrt{B}, \quad B \ll 1$$

При неизменном μ (фиксированном ΔT или q_0) прогиб при $B_1 \gg 1$ значительно больше, чем при $B_2 \ll 1$. Это связано с тем, что полная мощность нагрева в первом случае в $(B_1/B_2)^{1/2}$ раз больше, чем во втором. Сказанное коррелирует также с условием обнажения дна: $\mu \geq 2$ при $B \gg 1$ и $\mu \geq 2/\sqrt{B}$ при $B \ll 1$. Качественно такой же критерий разрыва слоя жидкости терموкапиллярным движением получается и при нагреве снизу [11].

Возможна ситуация (например, в случае испаряющейся жидкости), когда величина q в некоторой области, которая может находиться даже в пределах пятна нагрева, принимает отрицательные значения. В целом при этом может происходить нагревание жидкости. При $q > 0$ на поверхности жидкости образуется, согласно (8), впадина. Интересно выяснить, как влияет на рельеф границы изменение знака и немонотонность профиля $q(x)$. Для этого достаточно рассмотреть ступенчатую функцию: $q=1$ при



Фиг. 2

$x \leq x_0$, $q = -\delta$ при $x_0 < x < x_1$, $q = 0$ при $x > x_1$. Не выписывая решения (8), в данном случае непрерывное вместе с первой производной, отметим его свойства. Если

$$1 - (1 + \delta) e^{-\sqrt{B} x_0} + \delta e^{-\sqrt{B} x_1} > 0$$

то в центре нагрева имеем прогиб поверхности $\zeta(0) < 0$. При выполнении условия

$$\delta \operatorname{sh} \sqrt{B} x_1 > (1 + \delta) \operatorname{sh} \sqrt{B} x_0$$

на периферии ячейки происходит выпучивание поверхности $\zeta(x_1) > 0$. В области $x > x_1$ изменение формы границы происходит по закону (9). В широком диапазоне условий, когда выполняются оба неравенства, профиль поверхности является немонотонным с углублением в центре и валиком вокруг него. Возможно, сказанное относится к опытам [5], в которых использовались сильно летучие жидкости.

Рассмотрим, как сказывается на структуре ячейки модуляция нагрева. Пусть плотность потока тепла дается выражением

$$q = [1 + \varepsilon + \cos \pi x + \varepsilon \cos(2n+1)\pi x] / 2(1 + \varepsilon), \quad x \leq 1, \quad q = 0, \\ x > 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Амплитуда модуляции ε входит в выражения для u и v с множителями $(2n+1)\pi$ и $(2n+1)^2\pi^2$ соответственно. Если вычислить интегралы в (8), то нетрудно проверить, что амплитуда возмущения ζ , обусловленного второй гармоникой q , равна $B\varepsilon e/4(1+\varepsilon)[B+(2n+1)^2\pi^2]$. Таким образом, модуляция нагрева сильно влияет на поле скоростей вблизи поверхности поворота потока $u=0$ и в значительно меньшей степени на форму границы. На фиг. 2 сравниваются линии тока и форма мениска области нагрева при $B=1$, $\mu=2$, $n=1$ для случаев $\varepsilon=0$ (2, а), слабой модуляции $\varepsilon=0,07$ (2, б) и сильной модуляции $\varepsilon=0,7$ (2, в). В последнем случае ячейка разбивается на три субъячейки с противоположными направлениями циркуляции в соседних областях. Волнистость профиля свободной поверхности на графиках не видна, но она доступна для наблюдения оптическими методами и способна вызывать интерференционные эффекты.

Образование впадины на свободной границе жидкости под местом нагрева описано впервые, видимо, в [1] (малолетучие углеводороды) для цилиндрического и в [2] (подкрашенная вода) для ленточного лазерного луча. Качественное соответствие (8) с данными опыта налицо. Говорить о количественном сопоставлении ввиду того, что в опытах использовались, по-видимому, толстые слои жидкости и неизвестно распределение тепловыделения по высоте, строго говоря, неправомерно. Все полученные выше результаты, как и в [9], непосредственно переносятся на случай однородного объемного тепловыделения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Da Costa G.* Self-focusing of a Gaussian laser beam reflected from a thermocapillary liquid surface // *Phys. Lett.* 1980. V. 80A. № 4. P. 320–322.
2. *Helmers H., Witte W.* Holographic study of laser-induced liquid surface deformations // *Optics Comm.* 1984. V. 49. № 1. P. 21–23.
3. *Низовцев В. В.* Капиллярная конвекция в жидком слое при лазерном облучении // *Инж.-физ. журн.* 1988. Т. 55. № 1. С. 85–92.
4. *Viznyuk S. A., Rasporov S. F., Sukhodol'skii A. T.* On thermocapillary aberrational transformation of laser beams // *Optics Comm.* 1989. V. 71. № 5. P. 239–243.
5. *Низовцев В. В.* Исследование стимулированной локальным облучением и естественной конвекции в тонком слое испаряющейся жидкости // *ПМТФ.* 1989. № 1. С. 138–145.
6. *Da Costa G., Calatroni J.* Transient deformation of liquid surfaces by laser-induced thermocapillarity // *Appl. Optics.* 1979. V. 18. № 2. P. 233–235.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
8. *Визнюк С. А., Суходольский А. Т.* О термокапиллярном самовоздействии лазерного излучения в тонких слоях поглощающей жидкости // *Квантовая электрон.* 1988. Т. 15. № 4. С. 767–770.
9. *Саночкин Ю. В.* Термокапиллярная конвекция в тонком слое неравномерно нагретой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. № 2. С. 120–128.
10. *Пшеничников А. Ф., Токменина Г. А.* Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1983. № 3. С. 150–153.
11. *Зуев А. Л., Пшеничников А. Ф.* Деформация и разрыв пленки жидкости под действием термокапиллярной конвекции // *ПМТФ.* 1987. № 3. С. 90–95.
12. *Pimpitkar S. H., Ostrach S.* Transient thermocapillary flow in thin liquid layers // *Phys. Fluids.* 1980. V. 23. № 7. P. 1281–1285.

Москва

Поступила в редакцию
24.XI.1989