МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1991

УДК 532.59

Н. Л. НИКИТИН, А. Ю. ЯКИМОВ

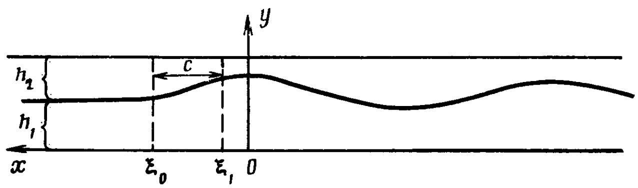
ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Экспериментально и теоретически изучаются плоские внутренние волны на границе раздела двухслойной жидкости, генерируемые равномерно движущейся областью аномального давления. Настоящее исследование продолжает работу [1], где экспериментальные результаты для данных волн сравнивались с линейной теорией и была получена оценка границ применимости линейной теории (Ri>3,5), а также работу [2], где с помощью метода узких полос в нелинейной постановке исследовались свободные внутренние волны.

Цель настоящей работы распространение метода узких полос [3] на вынужденные волновые движения и экспериментальная проверка полученных результатов. При построении теоретической модели использовались экспериментальные данные.

Как и в [2], рассмотрим течение в прямолинейном канале бесконечной длины. Пусть h_i, v_i и ρ_i — соответственно глубина слоев в невозмущенном состоянии, скорость частиц жидкости и плотность верхнего ($i=1$) и нижнего ($i=2$) слоев, причем верхний слой движется относительно нижнего со скоростью Δv. Свободная граница верхнего, более легкого слоя предполагается горизонтальной, слои — несмешивающимися.

Выберем прямоугольную систему координат (x, y), жестко связанную с областью аномального давления, движущейся с постоянной скоростью v_0.



Фиг. 1

Причем ось x принадлежит дну канала, а ось y направлена вертикально вверх (фиг. 1). В области аномального давления исходя из интеграла Бернулли и равенства давлений в обоих слоях на границе раздела получим

$$-\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 - g\rho_1 y_1 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + g\rho_2 y_2 = \frac{1}{2} v_0^2(\rho_1-\rho_2^*) + gh_1(\rho_1-\rho_2) + \overline{\Delta P},$$

$$\rho_2^* = \frac{(v_0+\Delta v_0)^2}{v_0^2}\rho_2$$

где y_1 и y_2 — текущие значения глубин слоев, $\overline{\Delta P}$ — значение аномального давления.

Воспользовавшись формулой М. А. Лаврентьева, для обоих слоев (см.

[2]) получим

$$z''+3\alpha z+\frac{9}{2}\gamma z^2=\frac{3\,\mathrm{Ri}(1-\sigma m)\Delta P(\xi)}{m(1-m)(1-\sigma)(1-\sigma)(1-m)} \qquad (1)$$

$$\Delta P(\xi)=\frac{\overline{\Delta P}}{(\rho_1-\rho_2)(h_1+h_2)g},\qquad z=\frac{h_1-y_1}{h_1+h_2},\qquad \xi=\frac{x}{h_1+h_2}$$

$$\mathrm{Ri}=\frac{g}{v_0^2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{(\rho_1-\rho_2)h_1h_2}{\rho_1h_1+\rho_2h_2},\qquad m=\frac{h_1}{h_1+h_2},\qquad \sigma=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1},\qquad \sigma^*=\frac{\rho_1-\rho_2^*}{\rho_1}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{Ri}(1-\sigma m)-(1-\sigma)(1-\sigma^*m)}{m(1-m)(1-\sigma)(1-\sigma(1-m))},\qquad \alpha=\frac{1-2m+m^2\sigma^*}{m(1-m)^2(1-m)^2(1-\sigma^*(1-m))}+$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\sigma^*}{1-\sigma^*(1-m)}\alpha$$

где $\Delta P(\xi)$ — безразмерное аномальное давление, z, ξ — безразмерные вертикальное смещение границы раздела и горизонтальная координата соответственно, Ri — число Ричардсона. Решить это уравнение аналитически для произвольного $\Delta P(\xi)$ не удается.

Основываясь на анализе экспериментальных данных, сконструируем решение для вынужденных волн, состоящее из частных решений (1) для областей перед и за областью аномального давления и частного решения (1) с правой частью в области аномального давления. Условия сшивки решений на границе областей — равенство функций и их первых производных.

В экспериментах использовался электрогидродинамический способ создания областей пониженного давления, подробно описанный в [1, 4]. При этом возмущение давления сосредоточено в основном под заряженным электродом. Анализ экспериментальных данных показывает, что в большинстве случаев перед областью давления граница раздела практически не возмущена. Будем считать, что в этой области $z(\xi)=0$.

В области аномального давления в рассматриваемом диапазоне параметров ($\mathrm{Ri}<3{,}5$) отклонение границы раздела есть монотонная функция горизонтальной координаты ξ. Кроме того, при достаточно больших скоростях на распределение давления вдоль границы раздела кроме электрического поля, симметричного относительно центра области, оказывает влияние движущийся электрод. Это влияние приводит к созданию небольшого относительно электрической части разряжения в кормовой части электрода, т. е. к некоторой асимметрии приложенного давления. В [1] было экспериментально показано, что концевые эффекты практически не влияют на амплитудно-частотную характеристику генерируемых волн. Будем считать, что координаты ξ_0 и ξ_1 совпадают с началом и концом электрода.

Выберем модельное решение в области давления в виде

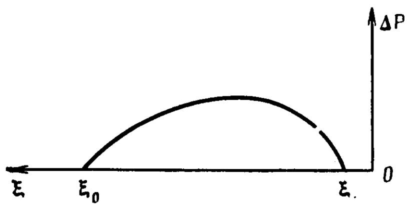
$$z(\xi)=a(1-\cos(b(\xi_0-\xi)))\sin b(\xi_0-\xi) \qquad (2)$$

где a и b — произвольные параметры. Эта функция автоматически обращается в ноль вместе с первой производной на переднем конце области. Условия постановки задачи требуют также равенства функций и их первых производных и обращения в ноль $\Delta P(\xi)$ на заднем конце области. Это дает три уравнения

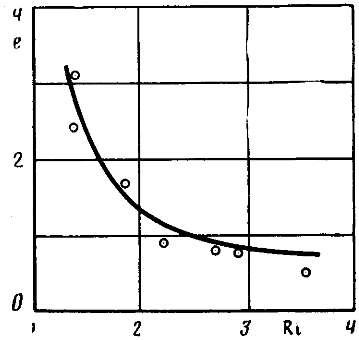
$$z_1=a(1-\cos bc)\sin bc$$

$$3\gamma\left(z_0^3+\frac{\alpha}{\gamma}z_0^2-z_1^3-\frac{\alpha}{\gamma}z_1^2\right)=-ab(1-\cos^2 bc+\cos bc)$$

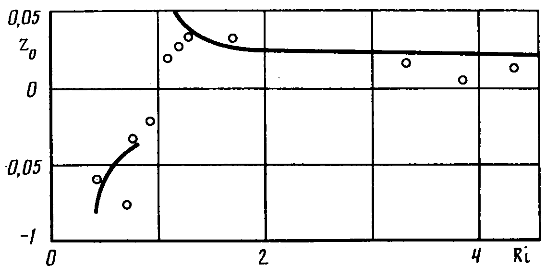
$$-(3\alpha z_1+{}^9/_2z_1^2)=ab^2\sin bc(4\cos bc-1)$$



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

Здесь z_0 — амплитуда волны, z_1 — координата границы раздела на заднем конце области ξ_1, c — длина области.

Выбранному решению (2) соответствует модельное распределение безразмерного давления вида

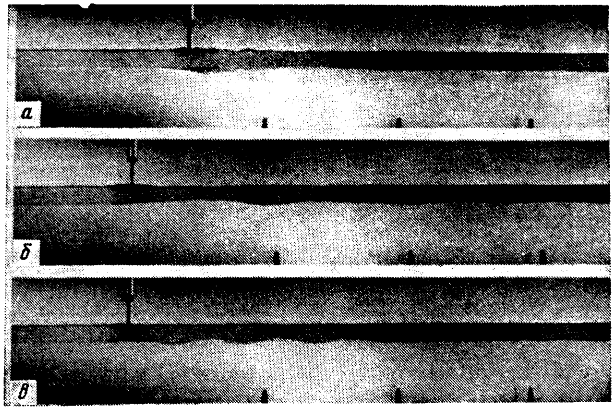
$$\Delta P(\xi)=a\sin(b(\xi_0-\xi))\,[b(4\cos(b(\xi_0-\xi))-1)+$$
$$+3(1-\cos(b(\xi_0-\xi)))+\gamma(1-\cos(b(\xi_0-\xi)))^2\sin(b(\xi_0-\xi))]$$

Для значений параметров, соответствовавших условиям экспериментов, эта функция удовлетворяет налагавшимся на нее требованиям и удовлетворительно описывает реальное распределение давления. Характерный вид $\Delta P(\xi)$ приведен на фиг. 2.

Для замыкания системы уравнений необходимо задать дополнительное условие, определяющее интенсивность давления $\Delta P(\xi)$. В силу модельности предлагаемой постановки это условие может быть задано различными способами. Использовались два способа — задание отклонения границы раздела или величины приложенного давления в середине области. В первом случае отклонение границы раздела определялось по фотоснимкам, во втором — считалось, что величина давления в середине области совпадает с давлением, обусловливаемым средней величиной электрического поля, и равно $P_1=\gamma U^2/(8\pi H^2)$, где P_1 — размерное давление, γ — диэлектрическая проницаемость верхней жидкости, U, H — соответственно разность потенциалов и расстояние между электродом и нижней жидкостью. Оказалось, что оба способа дают практически один результат.

Таким образом, задача свелась к системе четырех трансцендентных уравнений, которая может быть решена численно. Результаты расчетов зависимости длин и амплитуд волн от числа Ричардсона приведены соответственно на фиг. 3 и 4 сплошными линиями.

Теоретические результаты сопоставлены с экспериментальными исследованиями в лабораторном лотке, заполненном двухслойной жидкостью (вода — керосин). Лоток имел размеры 4000×200×160 мм. Область пониженного давления создавалась с помощью электрического поля. Во всех экспериментах глубина нижнего слоя жидкости была 100 мм, глубина верхнего 25 мм. Длина области пониженного давления (длина электрода) составляла 46 и 112 мм. Форма границы раздела фиксировалась на фотопленку, которая обрабатывалась на измерительном двухкоординатном приборе ДИП-3.



Фиг. 5

В экспериментах реализовывались различные волновые режимы. На фиг. 5 представлены волны, возбуждаемые областью пониженного давления, при значениях параметров H=25 мм, U=12 кВ. Очевидно, режим, представленный на фиг. 5, *а*, является уединенной волной типа «впадина» (Ri=0,7), на фиг. 5, *б* представлены волны, имеющие различную кривизну вершины и впадины, а на фиг. 5, *в* волны имеют синусоидальную форму, т. е. они близки к линейным.

На фиг. 3 и 4 представлены результаты экспериментов в виде точек. Фигура 3 показывает хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов по длине волны. Несколько худшее совпадение теории и эксперимента наблюдается по амплитуде волны (фиг. 4). Однако при малых значениях числа Ричардсона, в области отрицательных амплитуд, где расположены наиболее интересные уединенные волны типа «впадина», наблюдается достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

При больших значениях числа Ричардсона хорошее согласование с экспериментом дает линейная теория [1].

Определенный интерес вызывает вопрос: что происходит с волновой картиной при смене знака амплитуды волны (Ri=1)? Наблюдения позволяют сделать предположение, что при этих режимах возникают неустойчивые волновые движения, описание которых лежит за пределами применимости данной теории. Исследование этих режимов должно стать темой отдельной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров С. В., Никитин Н. Л.* Внутренние волны, возбуждаемые в двухслойной жидкости перемещающейся областью давления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 109–116.
2. *Якимов А. Ю.* Метод узких полос для нелинейных задач стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 174–178.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. С. 398–403.
4. *Калиниченко В. А., Нестеров С. В., Никитин Н. Л., Секерж-Зенькович С. Я.* Об одном способе моделирования процесса возбуждения волн в жидкости областями пониженного давления // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. № 4. С. 432–434.

Москва

Поступила в редакцию 28.XII.1989