

УДК 532.582.7; 541.182.4

© 1991 г.

Ю. А. БУЕВИЧ, А. Н. ЛАТКИН

РАССЛОЕНИЕ РАВНОПЛОТНОЙ СУСПЕНЗИИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Распределение частиц в потоках суспензий обычно неоднородно, что существенно влияет на формирование полей среднего давления и средних скоростей фаз, а следовательно, и на гидравлические характеристики потока. Это в полной мере свойственно и стационарным одномерным течениям в каналах (см., например, [1–3], дополнительную библиографию можно найти в [4]). Как правило, частицы имеют тенденцию скапливаться в центральной области течения вплоть до образования там плотноупакованного ядра, что приводит к проявлению суспензий псевдопластических свойств. Однако в ряде случаев возможен противоположный эффект, когда частицы аккумулируются у стенок канала, а профиль скорости удлинен по сравнению с параболическим.

В рамках существующей гидродинамической теории суспензий описать эти явления не удастся. Поэтому при анализе потоков в каналах принимаются обычно априорные допущения о характере распределения частиц в сечениях (которое чаще всего без достаточных оснований считается однородным), а то обстоятельство, что при этом остаются неудовлетворенными поперечные компоненты уравнений сохранения импульса для фаз, вообще игнорируется. Известные попытки описать неоднородные распределения основаны на дополнительных гипотезах, имеющих эвристический характер (см., например, [5–7]).

В данной работе проблема рассмотрена на примере установившегося течения в круглой трубе в пренебрежении влиянием сил тяжести (что всегда допустимо для суспензий с одинаковыми плотностями фаз) на основе новой гидромеханической модели суспензий, предложенной в [8].

1. Уравнения движения. Уравнения сохранения для суспензии в целом и ее дисперсной фазы выпишем для стационарного течения в вертикальной круглой трубе с учетом разницы плотностей жидкости d_0 и частиц d_1 . Для простоты рассматриваем только монодисперсные суспензии сферических частиц радиуса a в ньютоновской жидкости вязкости η_0 . Уравнения сохранения массы для такого течения вырождаются. Уравнение сохранения импульса суспензии при малом числе Рейнольдса для относительного движения фаз и импульса дисперсной фазы приводит к соотношениям [8] и соответственно дает

$$\eta_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rM(\rho) \frac{dv}{dr} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - dg = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

$$f_s + f_f - f_a - \rho d_1 g = 0, \quad f_n + f_t = 0 \quad (1.2)$$

$$f_s = \frac{9}{2} \rho M(\rho) \frac{n}{a^2} (v-w), \quad f_f = \frac{3}{4} \rho \eta_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rM(\rho) \frac{dv}{dr} \right) \quad (1.3)$$

$$f_a = \rho d g$$

$$f_n = \frac{3 \cdot 6,46}{4\pi a} \rho d \left| \frac{\eta_0}{d_0} M(\rho) \frac{dv}{dr} \right|^{1/2} (v-w) \text{sign} \frac{dv}{dr} \quad (1.4)$$

$$f_i = -d_1 \frac{d}{d\rho} (\rho L(\rho) \langle w_r'^2 \rangle) \frac{d\rho}{dr} \quad (1.5)$$

$$L(\rho) = 2 \frac{\ln(1-\rho)}{\rho} + 3 \frac{1-2\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2} \frac{15-8\rho-\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

Здесь ρ — объемная концентрация частиц, $M(\rho)$ — относительная вязкость и $d = d_0(1-\rho) + d_1\rho$ — средняя плотность суспензии; продольная ось z направлена вверх. В первом уравнении (1.2) фигурируют силы Стокса, Факсена и Архимеда [8, 9], а во втором уравнении — нелинейная поперечная сила [10] и термодинамическая сила межфазового взаимодействия [8].

Выражение для силы Факсена в (1.3) представляет собой естественное обобщение на макроскопически неоднородные суспензии формулы, полученной в [9] для однородных систем. По существу (1.3) и (1.4) соответствуют квазигомогенной модели, согласно которой каждая частица рассматривается как погруженная в фиктивную однородную среду, свойства которой совпадают со свойствами суспензии. Эта модель приближенно справедлива для умеренно концентрированных суспензий вплоть до $\rho \approx 0,2-0,3$, при этом $M(\rho) = (1-5\rho/2)^{-1}$ [9]. Ниже указанные формулы считаются справедливыми для суспензий произвольной концентрации, а под $M(\rho)$ понимается некая эффективная аппроксимация относительной вязкости. В конкретных расчетах использовалось выражение

$$M(\rho) = (1-\rho)^{-5/2} \quad (1.6)$$

обладающее требуемыми свойствами при $\rho \rightarrow 0$, где оно асимптотически совпадает с формулой Эйнштейна, и неплохо согласующееся с экспериментальными данными при высоких концентрациях.

Термодинамическая сила f_i описывает влияние диффузионных явлений, обусловленных случайными пульсациями частиц. Конвективный поток частиц, вызванный действием этой силы, в точности равен их диффузионному потоку в поле градиента концентрации суспензии. При вычислении термодинамической силы в [8] с помощью теории Перкуса — Йевики было учтено геометрическое взаимодействие твердых сфер, связанное с эффектом исключения объема. Рассматривались два статистически независимых механизма генерации пульсаций — броуновский тепловой и псевдотурбулентный, физическая теория которого построена в [11]. Средний квадрат поперечной пульсационной скорости частиц, отвечающей первому механизму, равен просто kT/m , где kT — температура в энергетических единицах, m — масса частицы. Эта же величина для псевдотурбулентных пульсаций достаточно мелких частиц была оценена в [12]. В результате можно записать

$$\langle w_r'^2 \rangle = \frac{kT}{m} + \frac{y^2 \rho^2}{15} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right) \left(\frac{d \ln M(\rho)}{d\rho}\right)^2 (v-w)^2 \quad (1.7)$$

$$y = d_1 \rho / d = d_1 \rho [d_0(1-\rho) + d_1 \rho]^{-1}$$

где ρ_* — концентрация, отвечающая состоянию плотной упаковки; ниже в конкретных расчетах принято $\rho_* = 0,6$.

Область течения в общем случае распадается на две подобласти, в одной из которых $\rho = \rho_*$, а в другой $\rho < \rho_*$, и справедливы уравнения (1.1) и (1.2). Для средней скорости v жидкой фазы принимаем условие прилипания на стенке трубы и условие симметрии на ее оси. На поле концен-

трации налагаем одно из интегральных условий

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R \rho(r) r dr = \langle \rho \rangle \quad (1.8)$$

$$\int_0^R \rho(r) v(r) r dr \left(\int_0^R v(r) r dr \right)^{-1} = \langle \rho \rangle' \quad (1.9)$$

причем первое из этих условий соответствует заданию средней концентрации суспензии $\langle \rho \rangle$ в сечениях канала, а второе — заданию совершенно иной средней концентрации $\langle \rho \rangle'$, определяемой как доля твердой фазы в объемном потоке суспензии.

2. Структура течений. Далее подробно рассматриваем свойства течений равноплотных суспензий ($d_0 = d_1 = d$) в произвольно ориентированной трубе, когда слагаемое g в (1.1) можно опустить, стандартным образом включая его в эффективное давление. В этом случае целесообразно ввести безразмерные переменные

$$\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \zeta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{R} \left\{ \begin{matrix} r \\ z \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} V \\ W \end{matrix} \right\} = \frac{\eta_0}{PR^2} \left\{ \begin{matrix} v \\ w \end{matrix} \right\}, \quad P = -\frac{dp}{dz} \quad (2.1)$$

где R — радиус трубы; без ограничений общности можно считать $P > 0$. В этих переменных из (1.1) с учетом граничных условий в случае $\rho < \rho_*$ имеем

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi M(\rho) \frac{dV}{d\xi} \right) = -1, \quad \frac{dV}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad V(1) = 0 \quad (2.2)$$

откуда

$$M(\rho) dV/d\xi = -\xi/2, \quad V(1) = 0 \quad (2.3)$$

Из первого уравнения в (1.2) с учетом (1.3) и (2.2) получаем

$$V - W = a^2 / (6R^2 M(\rho)) \quad (2.4)$$

Используя это выражение в (1.7) и далее в (1.5), а (2.3) — в (1.4), из второго уравнения (1.2) после преобразований, учитывая также формулу (1.6), получаем

$$\frac{1}{\rho(1-\rho)^{5/2}} \frac{dK(\rho, A)}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = -B\xi^{1/2}, \quad \rho < \rho_* \quad (2.5)$$

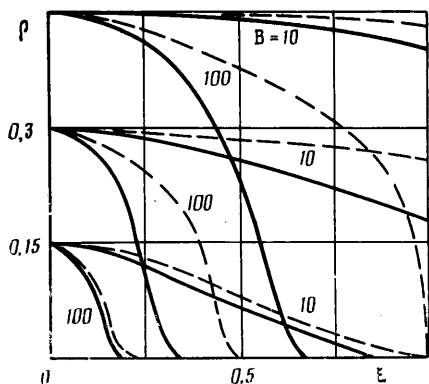
$$K(\rho, A) = \rho L(\rho) [\rho^4 (1-\rho)^3 (1-\rho/\rho_*) A + 1] \quad (2.6)$$

$$A = 0,015 \frac{\pi a^7 dP^2}{\eta_0^2 kT}, \quad B = 0,76 \frac{a^4 a^{1/2} (RP)^{1/2}}{\eta_0 kT} \quad (2.7)$$

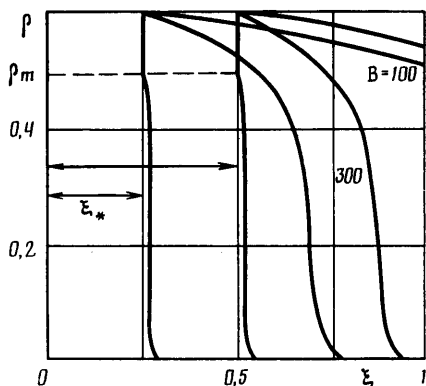
Уравнение (2.5) полностью определяет поле концентрации в сечениях трубы; постоянная интегрирования определяется при использовании одного из условий

$$2 \int_0^1 \rho(\xi) \xi d\xi = \langle \rho \rangle \quad (2.8)$$

$$\int_0^1 \rho(\xi) V(\xi) \xi d\xi \left(\int_0^1 V(\xi) \xi d\xi \right)^{-1} = \langle \rho \rangle' \quad (2.9)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

следующих из (1.8) и (1.9). По известному профилю $\rho(\xi)$ нетрудно из (2.3) вычислить $V(\xi)$, а из (2.4) определить безразмерную скорость скольжения фаз.

Условия (2.8) и (2.9) весьма неудобны. Поэтому целесообразно задавать, например, значение $\rho(0)=\rho_0$, решать задачу при разных ρ_0 , а затем находить связи между ρ_0 и $\langle\rho\rangle$, $\langle\rho\rangle'$ на основании (2.8), (2.9).

Рассмотрим поведение распределений при малых ρ , когда из (2.5) с учетом (1.5) и (2.6) следует

$$\left(5A\rho^3 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{d\rho}{d\xi} \approx -B\xi^{1/2}$$

$$5/4A(\rho_0^4 - \rho^4) + \ln(\rho_0/\rho) \approx {}^2/3 B\xi^{3/2}$$

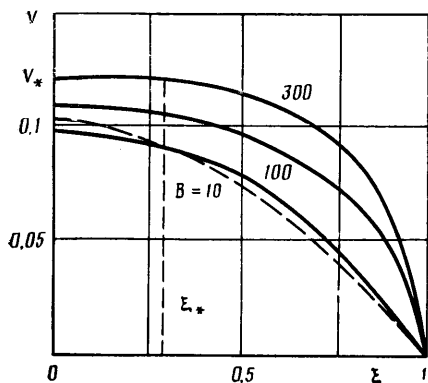
откуда получаем, что функция $\rho(\xi)$ нигде не обращается в нуль.

Профили концентрации при не малых ρ , получаемые путем интегрирования (2.5) при условии $\rho=\rho_0$ при $\xi=0$, проиллюстрированы на фиг. 1 при разных B (цифры у кривых) и $A=0, 10^3$ (сплошные и штриховые кривые соответственно).

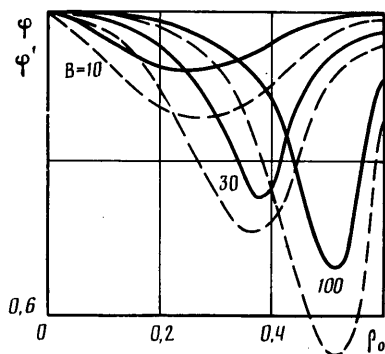
С повышением содержания частиц в потоке профили типа изображенных на фиг. 1 перестают быть возможными и вместо них в центральной части трубы устанавливаются распределения с жестким ядром, образованным плотноупакованными частицами. Такие распределения для чисто броуновских суспензий ($A=0$) и двух значений безразмерного радиуса ξ_* жесткого ядра показаны для разных B (цифры у кривых) на фиг. 2.

Известные распределения концентрации дают возможность построить и соответствующие профили скорости путем интегрирования уравнения (2.3) в предположении, что скорость жесткого ядра, если оно вообще образуется, постоянна. На фиг. 3 изображены такие профили при $A=0$ и разных B (цифры у кривых), отвечающие одной и той же средней по сечению концентрации $\langle\rho\rangle=0,3$. Здесь же штриховой линией показан обычный параболический профиль, соответствующий однородному распределению частиц. Реальные профили затуплены по сравнению с параболическим; при этом в случае $B=300$ в потоке образуется жесткое ядро с $\xi_* \approx 0,26$. Относительное уменьшение количества частиц вблизи стенки и соответственное уменьшение вязкости вызывают увеличение (при прочих равных условиях) локального градиента скорости, что приводит в конечном итоге к увеличению расхода.

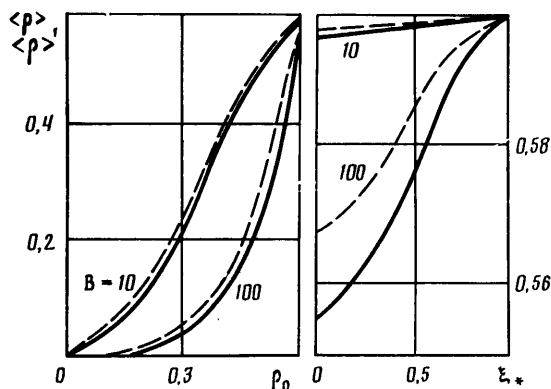
Для замыкания задачи нужно найти зависимости параметров ρ_0 и ξ_* от реально задаваемых значений концентрации $\langle\rho\rangle$ и $\langle\rho\rangle'$. Это можно



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

сделать, вычисляя интегралы в (2.8) и (2.9). Результаты численных расчетов для двух значений B (цифры у кривых) и $A=0$ представлены на фиг. 4. Сплошные и штриховые кривые изображают соответственно $\langle \rho \rangle$ и $\langle \rho' \rangle$. Среднее значение концентрации $\langle \rho' \rangle$, определяемое по доле частиц в объемном расходе суспензии, больше средней концентрации $\langle \rho \rangle$ частиц в сечении потока.

Кривые на фиг. 1—4 относятся к суспензиям очень мелких частиц или к коллоидным системам, когда доминируют броуновские пульсации. С увеличением размеров частиц усиливается роль псевдотурбулентного движения, способствующего при $B=\text{const}$ формированию более однородных распределений частиц тем в большей степени, чем выше средняя концентрация. С ростом размера частиц увеличивается не только параметр A , характеризующий относительную роль псевдотурбулентности, но одновременно и B , что приводит к усилению крутизны профилей концентрации. Постоянство B может быть при этом практически обеспечено лишь путем соответственного уменьшения радиуса трубы R , что не всегда реально. Поэтому кривые с $A=10^3$ на фиг. 1 имеют чисто демонстрационный характер.

В потоках суспензий достаточно крупных частиц, когда доминируют псевдотурбулентные пульсации, естественно вводить в (2.5), (2.6) вместо B параметр $B'=B/A$, а относительную роль броуновского движения характеризовать при помощи параметра $A'=1/A$, где A и B определены в (2.7). При больших значениях A функция $K(\rho, A)$ из (2.6)

достигает максимума при некотором $\rho = \rho_m(A)$, если $1/A \leq 0,00186$. При $1/A = 0, 0,001$ и $0,0015$ имеем соответственно $\rho_m = 0,492, 0,541, 0,547$. Непрерывные профили типа изображенных на фиг. 1, соответствующие течениям без жесткого ядра, возможны лишь при $\rho_0 < \rho_m$. Если же реальные значения $\langle \rho \rangle$ или $\langle \rho' \rangle$ оказываются выше отвечающих профилям с $\rho_0 = \rho_m$, то неизбежно образование центрального жесткого ядра с $\rho = \rho_*$, причем на его границе $\xi = \xi_*$ концентрация непрерывна при $1/A > 0,00186$ или претерпевает скачок к значению $\rho(\xi_* + 0) = \rho_m(A)$ — в противоположном случае. Непрерывные части профилей концентрации равноплотных суспензий в условиях доминирования псевдотурбулентности оказываются очень крутыми. Так, на фиг. 2 изображены распределения при $1/A = 0$ и $B/A = 100$. В областях $\xi > \xi_*$ концентрация резко убывает от значения ρ_m при $\xi = \xi_* + 0$ до нуля, так что эти распределения крайне незначительно отличаются от соответствующих течений с жестким плотноупакованным ядром в центре и чистой жидкостью вне его. Поскольку профили скорости для таких течений легко записываются в аналитической форме, соответствующие кривые на фиг. 3 и 4 не приводятся.

Таким образом, в потоках равноплотных суспензий гомогенизация возможна фактически только за счет броуновского движения частиц. Псевдотурбулентность оказывается относительно слабой и поэтому не способна эффективно препятствовать расслоению с образованием плотноупакованных ядер. Это связано прежде всего с малостью относительной скорости фаз, обусловленной только действием силы Факсена, которая пропорциональна малой величине a^2/R^2 . При этом термодинамическая сила (1.5) оказывается пропорциональной квадрату этой скорости, в то время как поперечная сила (1.4) содержит ее только в первой степени. Совершенно иную ситуацию следует ожидать для суспензий с различными плотностями фаз, когда относительная скорость формируется за счет действия силы тяжести за вычетом силы плавучести.

Важное следствие расслоения суспензии и обусловленного им относительного снижения эффективной вязкости вблизи стенки состоит в изменении гидравлического сопротивления потоку по сравнению с сопротивлением фиктивным течениям той же суспензии с однородным распределением частиц по сечению с концентрацией $\langle \rho \rangle$ или $\langle \rho' \rangle$. Соответствующие коэффициенты снижения сопротивления проще всего определить, рассматривая объемный расход Q в реальном потоке и расходы $\langle Q \rangle$ и $\langle Q' \rangle$ указанных фиктивных течений, т. е.

$$\varphi = \langle Q \rangle / Q, \quad \varphi' = \langle Q' \rangle / Q \quad (2.10)$$

Зависимости этих коэффициентов от своих аргументов представлены сплошными и штриховыми кривыми соответственно при разных B (цифры у кривых) и при $A = 0$ на фиг. 5. Видно, что снижение сопротивления в результате расслоения суспензии может быть весьма значительным, что необходимо учитывать при проведении вискозиметрических испытаний.

Механизм исследованного расслоения суспензий существенно отличается от механизма известного эффекта Сегре — Зильберберга [13]. В последнем случае, как с очевидностью следует из теории в [14, 15], миграция одиночных частиц обусловлена совместным действием противоположно направленной поперечной нелинейной силы и силы взаимодействия частиц со стенкой, причем асимптотически достигается такое положение частицы в потоке, где суммарная поперечная сила обращается в нуль. В рассматриваемом же здесь случае взаимодействие почти каждой частицы со стенкой экранируется другими частицами и устанавливающееся распределение концентрации, формально соответствующее балансу нелинейной поперечной и термодинамической сил, в действительности отве-

чает условию обращения в нуль суммы конвективного и диффузионного потоков, т. е. представляет собой результат коллективных эффектов [8]. Взаимодействием со стенкой можно пренебречь для частиц, находящихся от нее на расстоянии $l \gg a\rho^{-1/2}$, где ρ — текущее значение концентрации. Это неравенство нарушается непосредственно вблизи стенки, что необходимо учитывать в анализе образования свободного от частиц пристеночного слоя.

В развитой теории априори пренебрегали возможностью существования составляющей силы межфазового взаимодействия, пропорциональной $\nabla\rho$. Из общих соображений следует, что такая составляющая должна быть весьма малой, но тем не менее она может в принципе быть отличной от нуля [9]. Ее вычисление для суспензий еще не проведено, но такая сила возникает в фильтрационных течениях в неподвижном зернистом слое [16]. В учете этой силы можно усматривать одно из возможных направлений обобщения теории.

Естественное обобщение должно состоять также в учете влияния на расслоение силы тяжести и других внешних массовых сил в неравноплотных суспензиях. В наклонных потоках поперечная компонента силы тяжести, действующая на частицы, за вычетом силы плавучести обычно значительно больше поперечной нелинейной силы. Поэтому первая способствует в основном расслоению. В вертикальных потоках в зависимости от знака $d_1 - d_0$ и направления потока эта сила существенно влияет на скорость межфазового скольжения и может даже изменить ее знак, т. е. частицы будут опережать жидкость. Это приведет к изменению знака силы f_n из (1.4), а следовательно, и к изменению направления миграции частиц с последующим их накоплением вблизи стенок.

Все сделанные выводы в качественном отношении подтверждаются экспериментально. Однако количественное сравнение в настоящее время затруднено в связи со сложным характером влияния параметров и противоречивостью результатов разных авторов, а также с тем, что обычно сообщаются далеко не все условия проведения опытов, позволяющие осуществить такое сравнение. По-видимому, для этой цели необходима постановка специальных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cox R. G., Mason S. G. Suspended particles in fluid flow through tubes // Ann. Rev. Fluid Mech. 1971. V. 3. P. 291–316.
2. Goldsmith H. L., Mason S. G. Some experiments in hemodynamics. V. Microrheological techniques // Biorheology. 1975. V. 12. № 3–4. P. 181–192.
3. Law D. H.-S., Mc Taggart R. S., Nandakumar K., Masliyah J. H. Settling behaviour of heavy and buoyant particles from a suspension in an inclined channel // J. Fluid Mech. 1988. V. 187. P. 301–318.
4. Умаров А. И., Азмедов Ш. Х. Двумерные задачи гидродинамики многофазных сред. Ташкент: Фан, 1989. 95 с.
5. Павловский Ю. Н. О пристеночном эффекте // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 2. С. 160–165.
6. Попель А. С. О гидродинамике суспензий // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 24–30.
7. Gennes P. G., de. Dynamics of concentrated dispersions: a list of problems // Physicochem. Hydrodynam. 1981. V. 2. P. 31–44.
8. Бувеч Ю. А., Зубарев А. Ю., Исаев А. М. О гидромеханике суспензий // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57. № 3. С. 402–412.
9. Бувеч Ю. А., Марков В. Г. Реологические свойства однородных мелкодисперсных суспензий. Нестационарные течения // Инж.-физ. журн. 1978. Т. 34. № 6. С. 1007–1013.
10. Saffman P. G. The lift a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385–400; 1968. V. 31. Pt 3. P. 624–632.
11. Бувеч Ю. А. Statistical hydromechanics of disperse systems // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. Pt 3. P. 489–507; 1972. V. 52. Pt 2. P. 345–355; 1972. V. 56. Pt 2. P. 313–336.

12. Бувич Ю. А., Исаев А. М. Элементарная теория псевдотурбулентности в мелко-дисперсных суспензиях // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57. № 2. С. 239–246.
13. Segre G., Silberberg A. Behaviour of microscopic rigid spheres in Poiseuille flow // J. Fluid. Mech. 1962. V. 14. Pt 1. P. 115–157.
14. Ho В. P., Leal L. G. Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. Pt 2. P. 365–400.
15. Vasseur P., Cox R. G. The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. Pt 2. P. 385–413.
16. Гольдштик М. А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984. 163 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
12.II.1990