МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1991

УДК 532.546

© 1991 г.

А. В. КОПАЕВ, В. М. РАДЫГИН

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ О СФЕРАХ

В [1] на примере решения задачи сопряжения для трех концентрических окружностей предложен достаточно универсальный метод «функциональных уравнений». В настоящей работе показана возможность применения указанного метода к решению задач сопряжения для пространственной фильтрации на примере двух концентрических сфер. Этот метод применим и в случае, когда границами раздела сред являются n концентрических сфер или параллельных плоскостей.

1. Рассмотрим пространственную установившуюся фильтрацию жидкости в кусочно-однородной пористой среде. В каждой из областей однородности такой среды фильтрационное течение характеризуется потенциалом, представляющим собой гармоническую функцию $\varphi(x)$, где $x=(x_1, x_2, x_3)$. При этом особые точки фильтрационного течения определяются особыми точками гармонической функции.

Пусть область фильтрационного течения состоит из областей, разделенных сферой с центром в начале координат радиуса r_1. Особые точки течения располагаются произвольно во внешности шара радиуса r_0, $r_0<r_1$, с центром в начале координат, исключая границы раздела областей однородности.

Введем обозначения областей

$$D_j^+=\{x:|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}<r_j\}$$

$$D_j^-=\{x:|x|>r_j\}$$

$$S_j=\{\eta:|\eta|=r_j\},\quad j=0,\ 1$$

$$E=\{x:r_0<|x|<r_1\}$$

Пусть потенциал $\varphi_1(x)$ описывает фильтрационное течение в шаре D_1^+ проницаемостью k_1, а потенциал $\varphi_2(x)$ — соответственно в области D_1^- проницаемостью k_2.

При этом на сфере S_1 выполняются условия [2]

$$S_1:\varphi_1=\varphi_2,\qquad k_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=k_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\tag{1.1}$$

Изменим проницаемость k_1 шара D_0^+ на k_0 и найдем потенциалы $\Phi_j(x)$, $j=0,\ 1,\ 2$, описывающие возмущенное фильтрационное течение в областях D_0^+, E, D_1^-.

Так как изменение проницаемости в шаре D_0^+ не влияет на особые точки течения, потенциалы $\Phi_j(x)$ можно представить в виде

$$\Phi_0(x)=\varphi_1(x)+g_0(x),\ \Phi_j(x)=\varphi_j(x)+g_j(x),\ j=1,\ 2\tag{1.2}$$

Здесь $g_j(x)$, $j=0,\ 1,\ 2,$— функции, гармонические соответственно в областях D_0^+, E, D_1^-. Учитывая (1.1) и представления (1.2), запишем условия на границах раздела указанных областей

$$
\begin{aligned}
S_0:\ g_1=g_0,\ \frac{\partial g_1}{\partial n}=\frac{k_0}{k_1}\frac{\partial g_0}{\partial n}+\frac{k_0-k_1}{k_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\\
S_1:\ g_2=g_1,\ \frac{\partial g_2}{\partial n}=\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial g_1}{\partial n}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Из определения функций $g_j(x)$, $j=1$, 2, следует, что эти функции можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
g_1(x)=p_1(x)+\frac{r_0}{|x|}q_0\left(\left(\frac{r_0}{|x|}\right)^2 x\right)\\
g_2(x)=\frac{r_1}{|x|}q_1\left(\left(\frac{r_1}{|x|}\right)^2 x\right)+c_1\left(1-\frac{r_1}{|x|}\right)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Функции $q_0(x)$, $q_1(x)$, $p_1(x)$ являются гармоническими соответственно в областях D_0^+, D_1^+ и непрерывными вплоть до границ вместе с частными производными первого порядка, c_1 — некоторая постоянная.

Используя соотношения (1.4), условия (1.3) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
S_0:\ p_1(\eta)+q_0(\eta)=g_0(\eta)\\
\Gamma_0[p_1](\eta)-\Gamma_1[q_0](\eta)=\frac{k_0}{k_1}\Gamma_0[g_0](\eta)+\frac{k_0-k_1}{k_1}\Gamma_0[\varphi_1](\eta)\\
S_1:\ q_1(\eta)=p_1(\eta)+\rho q_0(\rho^2\eta),\ \rho=r_0/r_1\\
-\Gamma_1[q_1](\eta)+c_1=\frac{k_1}{k_2}\{\Gamma_0[p_1](\eta)-\rho\Gamma_1[q_0](\rho^2\eta)\}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где Γ_α — обозначение дифференциального оператора

$$
\Gamma_\alpha[f]=\alpha f+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}
$$

Используя интеграл Пуассона для шара, единственность решения задачи Дирихле для гармонической функции и соотношения (1.5), получим основную систему функциональных уравнений

$$
\begin{aligned}
p_1(x)+q_0(x)=g_0(x)\\
\Gamma_0[p_1](x)-\Gamma_1[q_0](x)=\frac{k_0}{k_1}\Gamma_0[g_0](x)+\frac{k_0-k_1}{k_1}\Gamma_0[\varphi_1](x)\\
|x|<r_0\\
q_1(x)=p_1(x)+\rho q_0(\rho^2 x)\\
-\Gamma_1[q_1](x)+c_1=\frac{k_1}{k_2}\{\Gamma_0[p_1](x)-\rho\Gamma_1[q_0](\rho^2 x)\}\\
|x|<r_1
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Исключая из системы (1.6) функции $q_0(x)$, $p_1(x)$, $q_1(x)$, получим функциональное уравнение для нахождения $g_0(x)$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\lambda[\Gamma_\mu[g_0]](x)+\rho(2\lambda-1)(2\mu-1)\Gamma_0[\Gamma_1[g_0]](\rho^2 x)=\\
=(2\lambda-1)\{\Gamma_0[\Gamma_\mu[\varphi_1]](x)-\rho(2\mu-1)\Gamma_0[\Gamma_1[\varphi_1]](\rho^2 x)\}+\lambda\mu c_1
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

$$\lambda=\frac{k_1}{k_0+k_1}, \qquad \mu=\frac{k_2}{k_1+k_2}$$

Разлагая левую и правую части уравнения (1.7) в ряды по однородным гармоническим полиномам и приравнивая соответствующие полиномы, найдем

$$g_0(x)=c_1+(2\lambda-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{d_n}a_n(x)$$

где $a_n(x)$ — однородные гармонические полиномы разложения функции $\varphi_1(x)$ и

$$b_n=n(n+\mu)-(2\mu-1)n(n+1)\rho^{2n+1}$$

$$d_n=(n+\lambda)(n+\mu)+(2\lambda-1)(2\mu-1)n(n+1)\rho^{2n+1}$$

Отметим, что множество всех однородных гармонических полиномов степени n вместе с нулем образуют $(2n+1)$-мерное линейное пространство. Базис этого пространства образуют, например, однородные гармонические полиномы степени n, получающиеся из сферических координат точки x с помощью полиномов Лежандра и присоединенных функций Лежандра.

Теперь, используя соотношения (1.6), находим функции $p_1(x)$, $q_0(x)$, $q_1(x)$, а применяя формулы (1.4),— функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ и, наконец, по формулам (1.2) получим искомые потенциалы

$$\Phi_0(x)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(n+\mu)(d_n)^{-1}a_n(x), \qquad |x|<r_0$$

$$\begin{aligned}\Phi_1(x)=\varphi_1(x)-(2\lambda-1)(2\mu-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\rho^{2n+1}(d_n)^{-1}a_n(x)+\\ +(2\lambda-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(n+\mu)r_0^{2n+1}(d_n)^{-1}|x|^{-2n-1}a_n(x), \qquad r_0<|x|<r_1\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\Phi_2(x)=\varphi_2(x)-(2\lambda-1)(\mu-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(2n+1)r_0^{2n+1}(d_n)^{-1}|x|^{-2n-1}a_n(x), \quad |x|>r_1$$

Полагая в формулах (1.8) $k_2=k_1$, $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)$, получим фильтрационную теорему о сфере

$$\Phi_0(x)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(n+\lambda)^{-1}a_n(x)=2\lambda\varphi_1(x)-\lambda(2\lambda-1)\int_0^1\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_1(\varepsilon x)\,d\varepsilon,$$

$$|x|<r_0$$

$$\Phi_1(x)=\varphi_1(x)+(2\lambda-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(n+\lambda)^{-1}r_0^{-2n+1}|x|^{-2n-1}a_n(x)=$$

$$=\varphi_1(x)+(2\lambda-1)\frac{r_0}{|x|}\varphi_1\left(\frac{r_0^2}{|x|^2}x\right)-\lambda(2\lambda-1)\frac{r_0}{|x|}\int_0^1\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_1\left(\frac{\varepsilon r_0^2}{|x|^2}x\right)d\varepsilon, \quad |x|>r_0$$

Отметим, что задача сопряжения на одной сфере в аналогичной постановке рассматривалась в [3].

2. Приведем примеры применения полученной теоремы о сферах.

Пусть в однородной среде проницаемостью k_2 задан поступательный фильтрационный поток, описываемый потенциалом вида

$$\varphi = v_0 x_1, \quad v_0 = \text{const}$$

Используя фильтрационную теорему о сферах, построим потенциалы течения в кусочно-однородной среде с границами раздела в виде двух концентрических сфер — проницаемостью k_0 в шаре $|x|<r_0$, k_1 — в области $r_0<|x|<r_1$ и k_2 — во внешности шара $|x|>r_1$. Имеем

$$\Phi_0(x) = 9k_1k_2d^{-1}v_0x_1, \quad |x|<r_0$$

$$\Phi_1(x) = 3k_2(k_0+2k_1)d^{-1}v_0x_1 + 3k_2(k_1-k_0)r_0^3|x|^{-3}d^{-1}v_0x_1,$$
$$r_0<|x|<r_1$$

$$\Phi_2(x) = v_0x_1 + [(k_0+2k_1)(k_2-k_1) + (k_1-k_0)(2k_1+k_2)\rho^3]r_1^3|x|^{-3}d^{-1}v_0x_1,$$
$$|x|>r_1$$

$$d = (k_0+2k_1)(k_1+2k_2) + 2(k_1-k_0)(k_2-k_1)\rho^3$$

Полученные потенциалы в отличие от формул в фильтрационной теореме (1.8) не содержат рядов и поэтому удобны для практических расчетов.

Пусть в однородной среде проницаемостью k_2 фильтрационное течение определяется источником (стоком) интенсивности q, описываемым потенциалом вида

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi}[(x_1+a)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{-1/2}, \quad a>0$$

Используя фильтрационную теорему о сферах, построим потенциалы течения в кусочно-однородной среде, описанной в предыдущем примере, при условии, что $r_1<a$. Имеем

$$\Phi_0(x) = \frac{q\lambda\mu}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)^2P_n(x)}{a^{n+1}d_n}, \quad |x|<r_0$$

$$\Phi_1(x) = \frac{q\mu}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)(n+\lambda)P_n(x)}{a^{n+1}d_n} +$$
$$+\frac{q\mu(2\lambda-1)}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(2n+1)r_0^{2n+1}P_n(x)}{a^{n+1}d_n|x|^{2n+1}}, \quad r_0<|x|<r_1$$

$$\Phi_2(x) = \frac{q}{4\pi}[(x_1+a)^2+x_2^2+x_3^2]^{-1/2} + \frac{q(2\mu-1)}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n r_1^{2n+1}P_n(x)}{(n+\mu)a^{n+1}|x|^{2n+1}} +$$
$$+\frac{q\mu(1-\mu)(2\lambda-1)}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(2n+1)^2r_0^{2n+1}P_n(x)}{(n+\mu)a^{n+1}d_n|x|^{2n+1}}, \quad |x|>r_1$$

$$P_n(x) = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} (x_1 + i(x_2 \cos t + x_3 \sin t))^n \, dt$$

где $P_n(x)$ — однородный гармонический полином степени n.

Авторы благодарят П. Я. Кочину за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копаев А. В., Радыгин В. М.* Фильтрационные теоремы об окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 179–183.
2. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.
3. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.

Москва
Орел

Поступила в редакцию
31.V.1990