

**МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**  
**№ 1 • 1991**

УДК 532.543:551.578.48

© 1991 г.

**A. НАЗАРОВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СНЕЖНО-ПЫЛЕВОЙ  
ЛАВИНЫ В РАМКАХ УРАВНЕНИЙ ДВУХСЛОЙНОЙ  
МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Снежная лавина представляет собой нестационарный турбулентный поток, возникающий на склонах гор в результате нарушения равновесия снежного покрова. В ряде случаев сход лавин сопровождается так называемой воздушной волной. Существующие гипотезы по-разному объясняют физическую сущность воздушной волны: ударная волна [1, 2], вихрь, отрывающийся от тела лавины при ее торможении [3], снежно-пылевое облако, образующееся при взметывании в воздух части лавинного снега [4], и др. Математически наиболее разработана гипотеза снежно-пылевого облака.

В [5, 6] предложена и исследована математическая модель, описывающая движение центра тяжести и эволюцию размеров полуэллиптического пылевого облака на склоне постоянного уклона. Дальнейшим ее развитием можно считать двухслойную модель снежно-пылевой лавины [7]. Нижний слой моделирует плотное снежное ядро, а верхний – разреженное по сравнению с ядром пылевое облако лавины (фиг. 1). Движение каждого слоя описывается осредненными по поперечному сечению слоя уравнениями Рейнольдса. Материал слоев считается несжимаемым. Слои взаимодействуют друг с другом и с окружающей средой через межслойное трение и массообмен, под которым понимается процесс переноса массы и импульса через условную границу (скачок), разделяющую области с различными свойствами. Модель позволяет найти распределение вдоль склона толщины, средних по сечению потока скоростей и плотностей слоев в любой момент времени. Численное исследование модели было проведено лишь частично, результаты расчетов не публиковались.

В данной работе приводятся уравнения и результаты численного исследования модифицированной двухслойной модели снежно-пылевой лавины. Цель модификации состоит в упрощении модели и придании более ясного физического смысла отдельным членам уравнений. Для этого ядро здесь переопределяется как слой с неизменной (высокой) плотностью, фиксируется направление массообмена между ядром и облаком, верхняя граница облака моделируется скачком, в котором концентрация снежных частиц падает до нуля.

1. Система уравнений, описывающих квазидономерное движение лавинного потока в лотке прямоугольного поперечного сечения переменной ширины, имеет вид

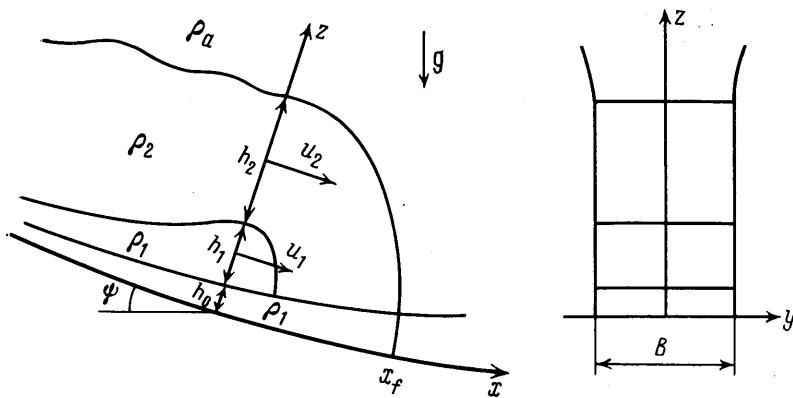
$$\frac{\partial}{\partial t}(h_i B) + \frac{\partial}{\partial x}(h_i u_i B) = F_{1i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i h_i u_i B) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i h_i u_i^2 B) = F_{2i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 h_2 B) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 h_2 u_2 B) = [\rho_1(V_1 + V_{02}) - M_s + \rho_a V_a]B$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = -V_{01} - V_{02} + \alpha V_{ss}, \quad i=1, 2$$

$$F_{11} = [V_{01} + (1-\alpha)V_{ss} - V_1]B, \quad F_{12} = (V_1 - V_s + V_{02} + V_a)B$$



Фиг. 1

$$F_{zi} = -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (R_i h_i^2 B \cos \psi) + R_i g h_i B \sin \psi - T_i + M_i B - X_i$$

$$R_1 = \rho_1, \quad R_2 = \rho_2 - \rho_a$$

$$T_1 = \tau_0 + \tau_b B, \quad T_2 = (\tau_a + \tau_n) B$$

$$M_1 = (1-\alpha) u_2 M_{ss} - \rho_1 u_1 V_1, \quad M_2 = \rho_1 u_1 V_1 - u_2 M_s$$

$$X_1 = g h_1 \left[ \rho_1 B \cos \psi \frac{\partial h_0}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 h_2 \cos \psi) - \frac{1}{2} \rho_1 h_1 \cos \psi \frac{dB}{dx} \right]$$

$$X_2 = g h_2 \left[ R_2 B \cos \psi \frac{\partial}{\partial x} (h_0 + h_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \rho_a h_2 \frac{d}{dx} (B \cos \psi) - \frac{1}{2} R_2 h_2 \cos \psi \frac{dB}{dx} \right]$$

Здесь  $t$  — время;  $x$  — расстояние вдоль оси лотка;  $B(x)$ ,  $\psi(x)$  — ширина и уклон лотка; величины с индексом 0 относятся к сплошному покрову, с индексом 1 — к ядру, 2 — к облаку,  $a$  — к окружающему воздуху;  $h_0(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$  — толщины слоев;  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $\rho_2(x, t)$  — осредненные по поперечному сечению потока скорости слоев и плотность облака;  $\rho_1$  — плотность снега в ядре, которая считается равной плотности в сплошном покрове;  $\rho_a$  — плотность окружающего воздуха;  $V_{01}$ ,  $V_{02}$ ,  $V_a$  — удельные скорости захвата подстилающего снега ядром, подстилающего снега и окружающего воздуха облаком,  $V_1$  — удельная скорость оттока снега из ядра в облако,  $V_s$ ,  $M_s$ ,  $V_{ss}$ ,  $M_{ss}$  — удельные скорости изменения объема и массы облака и ядра за счет оседания из облака, соответственно (под удельным понимается значение, рассчитанное на единицу площади склона);  $\alpha$  — определяется формулой (1.2);  $\tau_0$ ,  $\tau_b$  — удельные трения на нижней и верхней границах ядра,  $\tau_n$ ,  $\tau_a$  — то же, для облака;  $g$  — ускорение свободного падения.

Удельные скорости массообмена задаются следующим образом:

$$V_1 = 0 \quad (h_1 = 0)$$

$$V_1 = m_{12} |u_1 - u_2| \sqrt{\rho_1 \rho_2} (\rho_1 + \rho_2)^{-1} \quad (h_1 > 0)$$

$$m_{12} = m_1 \quad (\text{Re}_1 \geq \text{Re}_*) \quad m_{12} = m_{02} \quad (\text{Re}_1 < \text{Re}_*) \quad (1.1)$$

$$V_{01} = 0 \quad (h_0 = 0 \text{ или } h_1 = 0), \quad V_{01} = 0.5 m_{01} |u_1| \quad (h_0 > 0, h_1 > 0)$$

$$V_{02} = 0 \quad (h_0 = 0, \text{ или } h_2 = 0, \text{ или } h_1 > 0)$$

$$\begin{aligned}
V_{02} &= m_{02} |u_2| \sqrt{\rho_1 \rho_2} (\rho_1 + \rho_2)^{-1}, \quad (h_0 > 0, h_2 > 0, h_1 = 0) \\
V_a &= 0 \quad (h_2 = 0) \\
V_a &= m_a |u_2| \sqrt{\rho_a \rho_2} (\rho_a + \rho_2)^{-1} \quad (h_2 > 0), \\
V_s &= 0 \quad (h_2 = 0), \quad V_s = m_s \cos \psi \quad (h_2 > 0) \\
V_{ss} &= V_s (\rho_2 - \rho_a) (\rho_1 - \rho_a)^{-1} \\
M_s &= \rho_2 V_s, \quad M_{ss} = \rho_1 V_{ss} \\
\alpha &= 0 \quad (h_1 > 0 \text{ или } \tan \psi > \mu) \\
\alpha &= 1 \quad (h_1 = 0, \tan \psi \leq \mu)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В формуле (1.1) в отличие от [7] учитывается влияние степени турбулентности ядра на скорость массообмена между ядром и облаком. Расчеты показали, что учет зависимости  $m_{12}(\text{Re}_1)$  ( $\text{Re}_1$  — число Рейнольдса в ядре) важен, когда толщина ядра становится малой.

Трения на границах слоев задавались формулами, обобщающими соответствующие формулы [7, 8] на случай двухслойного течения в прямоугольном лотке при наличии предельного трения  $\tau_*$

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \tau_f \operatorname{sign}(u_1) + (k_{10}B + 2k_{1f}h_1)\rho_1 u_1 |u_1| \\
\tau_i &= \mu g \cos \psi [(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)B + (\rho_1 h_1 + 2\rho_2 h_2)h_1] \quad (z_* \leq 0) \\
\tau_f &= \tau_* (B + 2z_*) + 2\mu g \cos \psi [\rho_1 h_2 (h_1 - z_*) + 0.5\rho_1 (h_1 - z_*)^2] \quad (0 < z_* < h_1) \\
\tau_f &= \tau_* (B + 2h_1) \quad (z_* \geq h_1) \\
z_* &= h_1 + \rho_2 h_2 \rho_1^{-1} - \tau_* (\mu \rho_1 g \cos \psi)^{-1} \\
\tau_b &= k_{12}\rho_2 (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \quad (h_2 > 0) \\
\tau_b &= k_{1a}\rho_a u_1 |u_1| \quad (h_2 = 0) \\
\tau_n &= k_{21}\rho_2 (u_2 - u_1) |u_2 - u_1| \quad (h_1 > 0) \\
\tau_n &= k_{20}\rho_2 u_2 |u_2| \quad (h_1 = 0) \\
\tau_a &= k_{2a}\rho_a u_2 |u_2|
\end{aligned}$$

При  $u_1 = 0$  полагалось

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= f_a \quad (|f_a| < \tau_f) \\
\tau_0 &= \tau_* \operatorname{sign}(f_a) \quad (|f_a| \geq \tau_f) \\
f_a &= \rho_1 g \left[ h_1 B \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 B \cos \psi) \right] - \tau_b B - X_1
\end{aligned}$$

2. При исследовании типа приведенной выше системы уравнений двух корней характеристического многочлена находятся явно:  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = u_2$ . Остальные четыре корня должны определяться из уравнения

$$\begin{aligned}
[(u_1 - \lambda)^2 - H_1] [(u_2 - \lambda)^2 - H_2] &= \rho_2 \rho_1^{-1} H_1 H_2 \\
H_1 &= g h_1 \cos \psi, \quad H_2 = g h_2 \cos \psi (1 - \rho_a \rho_2)^{-1}
\end{aligned}$$

С заменой  $H_1$  на  $h_1$  и  $H_2$  на  $h_2$  это уравнение совпадает с исследованным в [9], где показано, что число его действительных корней меняется в зависимости от значений параметров, от двух до четырех. Таким образом, в некоторых областях значений параметров исследуемая система имеет составной тип. Тем не менее численные исследования подобных систем, проведенные в [10, 11], а также настоящие расчеты показывают, что практически система не выходит из области гиперболичности, по-

скольку для широкого диапазона начальных условий неустойчивости решения не наблюдалось.

Для проведения расчетов нужно задать кроме геометрии склона и параметров снежного покрова также значения коэффициентов трения и массообмена.

Начальные условия задавались в виде распределения значений глубин, скоростей и плотностей слоев на некотором участке лотка.

Решение находилось сквозным счетом с использованием явной, итерационной, третьего порядка точности схемы Русанова [12], на равномерной по  $x$  сетке с переменными границами счетного интервала.

При тестировании счетного алгоритма использовались следующие частные решения уравнений модели. Стационарное решение для однослоистого течения на склоне постоянной крутизны при отсутствии массообмена в потоке, но наличии сухого и гидравлического трения, полученное М. Э. Эглит, в системе координат, связанной с передним фронтом потока, имеет вид

$$\rho = R = \text{const}, \quad u = U = \text{const}$$

$$2 \frac{a}{b} \left( h + \frac{c}{b} \ln \left( 1 - \frac{hb}{c} \right) \right) = \xi$$

$$a = 0,5(R - \rho_a)g \cos \psi, \quad b = (R - \rho_a)g(\sin \psi - \mu \cos \psi)$$

$$c = kRU^2, \quad R > \rho_a, \quad U > 0, \quad \tan \psi > \mu$$

Здесь  $\xi$  – продольная координата, отсчитываемая от переднего фронта потока. При  $\xi \rightarrow \infty$   $h \rightarrow h_\infty = cb^{-1}$ ;  $h_\infty$  можно трактовать как значение глубины потока, устанавливющееся в данной точке склона асимптотически (по времени).

Нестационарное решение для равномерного ( $\partial/\partial x = 0$ ) однослоистого потока на горизонтальном склоне при отсутствии трения и наличии лишь захвата воздуха имеет вид

$$\rho = \rho_a + \frac{h^\circ}{h} (\rho^\circ - \rho_a)$$

$$\frac{m_a u^\circ \rho^\circ}{\rho_a h^\circ (\rho^\circ \rho_a^{-1} - 1)^2} t + c^\circ = f \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho_a h}{(\rho^\circ - \rho_a) h^\circ} \right)$$

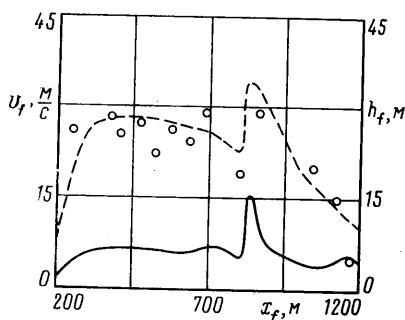
$$\rho_i h = \rho^\circ u^\circ h^\circ, \quad \rho^\circ = \rho(0), \quad u^\circ = u(0), \quad h^\circ = h(0)$$

$$c^\circ = f \left( 0,5 + \frac{\rho_a}{\rho_0 - \rho_a} \right)$$

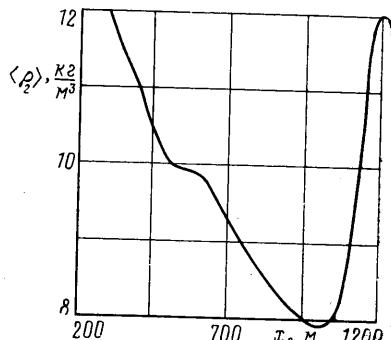
$$f(x) = 0,125 \ln \left[ \frac{(x + (x^2 - 0,25)^{1/2})^4}{x^2 + x(x^2 - 0,25)^{1/2} - 0,125} \right] + (x+1)(x^2 - 0,25)^{1/2}$$

3. Расчеты по модели проводились в три этапа. Сначала изучалось поведение потока на склоне постоянного уклона.

На первом этапе исследовалась однослоистая (чисто пылевая) лавина: влияние начальных данных, крутизны склона, коэффициентов трения и массообмена на значения параметров пылевого облака, общие закономерности его движения на постоянном уклоне. Выяснилось, что влияние возмущений начальной формы и скорости потока ослабевает по мере продвижения лавины вниз по склону и на расстоянии 4–7 начальных длин лавины от точки старта различия параметров возмущенного и невозмущенного движения не превышали 10%. Величина начальной массы ( $M_0$ ) является определяющим фактором движения лавины при отсутствии захвата снега со склона: с ростом  $M_0$  увеличиваются значения скоростей в потоке, величина  $(\rho_2 - \rho_a)$ , оцененная на одинаковом расстоянии вниз по склону, пропорциональна  $M_0$ ; вместе с тем максимальная глубина потока ( $h_m$ ) практически не зависит от  $M_0$ . Скорость роста толщины как функции координаты переднего фронта потока для сильно распыленного облака ( $\rho_2 \sim \rho_a$ ) пропорциональна  $m_a^\gamma$ , где  $\gamma = 1 + o(1)$ , в диапазоне  $0,15 \leq m_a \leq 0,60$ . При сильном распылении изменение толщины облака в единицу времени почти линейно зависит от крутизны склона. Для значения  $m_a = 0,1$  в ди-



Фиг. 2



Фиг. 3

апазоне  $30^\circ \leq \psi \leq 80^\circ$  аппроксимация расчетных данных приводит к зависимостям

$$\frac{dh_m}{dt} = 0,03(\psi + 5) \pm 15\%, \quad \frac{dx_f}{dt} = 0,3(\psi + 63) \pm 15\%$$

Подобные соотношения получаются экспериментально в опытах стратифицированными течениями [13].

На втором этапе моделировался двухслойный поток на постоянном уклоне. Ставилась задача определить диапазон значений коэффициентов модели, в котором расчетные параметры лавинного потока близки к реальным.

При выборе значений коэффициентов трения использовался обширный материал, накопленный по этому вопросу в гидравлике и лавиноведении (список литературы приведен в [7]).

Гораздо меньше известно о коэффициентах массообмена. В расчетах были найдены значения  $m_s$ ,  $m_1$  и  $m_a$ , при которых возможно возникновение и развитие пылевого облака, отсутствовавшего в начальный момент времени. Характеристики образующегося облака близки к реальным при  $m_s=0-1$  м/с,  $m_a=0,1-0,5$ ,  $m_1=0,05-0,10$ . Порядок величины этих оценок согласуется с экспериментальными данными для стратифицированных течений и газовых струй [14]. В случае, когда облако присутствует в начальный момент времени, двухслойное течение может осуществляться при меньших значениях  $m_1$ ,  $m_a$ . При этом в зависимости от начальных условий эволюция облака может идти двумя путями. Подобно тому как отмечено в [5], облако поддерживается и развивается, если его начальная глубина и скорость достаточно высоки, и оседает в противном случае.

На заключительном этапе на основе имеющихся данных полевых наблюдений высоты и скорости переднего фронта был проведен расчет трех пылящих лавин, сошедших в Хибинах и на Памире. Коэффициенты трения при расчете выбирались примерно равными для всех трех лавин:  $k_{20} \approx 0,3$ ,  $k_{2a} \approx 0$ ,  $k_{10} \approx 0,02$ ,  $\mu \approx 0,3$ ,  $\tau_* / \rho = 5-10$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>; коэффициенты массообмена, фиксированные для каждой отдельной лавины, менялись в пределах:  $m_s = 0,07-0,75$  м/с,  $m_a = 0,04-0,13$ ,  $m_1 = 0,01-0,1$ , т. е. не выходили за границы, определенные в предшествующих расчетах. Отличия расчетных значений от измеренных на большей части пути лавин не превышают 17%.

Поскольку данные полевых наблюдений памирских лавин еще не опубликованы, ниже приводятся результаты расчета лишь хибинской лавины, описанной в [15] под номером 3. На фиг. 2 сплошной линией изображено расчетное изменение высоты  $h_f$ , а штриховой — скорости  $v_f$  переднего фронта лавины как функций его координаты  $x_f$ . Точками обозначены значения скорости фронта, измеренные в натуре. Участок 0–300 м соответ-

ствует снегосборной зоне, в которой произошло формирование и разгон лавины. На участке 300–700 м лавина двигалась в постепенно суживающемся лотке. Расчет, как и данные стереофотосъемки, выявляет некоторое уменьшение ее скорости. При движении в лотке точка максимума глубины и скорости потока, находившаяся первоначально вблизи переднего фронта, «отстала» от него более чем на 100 м. После выхода из лотка на конус выноса передний фронт лавины начал тормозиться. На отметке 800 м его настигла двигавшаяся сзади волна повышения уровня, что привело к всплеску значений  $h_f$ ,  $v_f$ . В дальнейшем происходило торможение лавинного потока, сопровождавшееся его растеканием вдоль склона. Ядро лавины, первые 250 м двигавшееся впереди облака, при  $x_f=1200$  м отстало от него более чем на 100 м.

Качественно расчетные этапы движения лавины и конфигурация ядра и облака отвечают описанным в [15]. Отклонение полученных для скорости фронта значений от измеренных в натуре в среднем не более 10%. Как видно из фиг. 2, на заключительном этапе движения модель дает повышенные значения скорости фронта. Подобное поведение решения отмечено и при расчете памирских лавин и объясняется, возможно, тем, что модель весьма упрощенно учитывает процессы межфазного взаимодействия в облаке и не учитывает профильного сопротивления движущейся лавины.

На фиг. 3 показано расчетное изменение средней плотности в пылевом облаке хибинской лавины. Вплоть до  $x_f=1000$  м плотность облака снижается, что говорит о преобладании процесса захвата воздуха над остальными обменными процессами в лавине. Далее, однако, на фоне снижения скорости потока захват воздуха подавляется оседанием, а продолжающийся приток снега из ядра приводит к возрастанию плотности облака. По ходу движения лавины средняя плотность облака меняется в пределах 8–12 кг/м<sup>3</sup>, что соответствует данным измерений плотности в реальных пылевых лавинах [4].

Качественно картина эволюции ядра и облака, получаемая на основе расчетов по двухслойной гидравлической модели, отвечает наблюдаемой в реальных условиях. Получено неплохое количественное совпадение расчета с имеющимися данными наблюдений при физически допустимых значениях коэффициентов массообмена. Поставляемая моделью информация достаточна для определения большинства практически важных характеристик лавинного потока. Все это позволяет говорить о перспективности применения двухслойной модели для снеголавинных расчетов.

Автор глубоко признателен М. Э. Эглит, под руководством которой выполнена эта работа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Москалев Ю. Д.* О возникновении воздушной волны при движении лавин // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. М., 1970. Вып. 16. С. 57–62.
2. *Тебуев Д. И., Долов М. А., Холкевич В. А.* Термодинамическая модель образования ударной волны при сходе снежных лавин // Там же. С. 62–67.
3. *Якимов Ю. Л., Щурова И. Е.* Природа воздушной волны, вызванной снежной лавиной // Успехи советской гляциологии. Фрунзе: Илим, 1968. С. 355–359.
4. *Григорян С. С., Урумбаев Н. А.* О природе лавинной воздушной волны // Науч. тр. ин-та мех. МГУ. 1975. № 42. С. 74–82.
5. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Модель для расчета движения пылевой снежной лавины // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. М., 1971. Вып. 31. С. 74–80.
6. *Эглит М. Э., Свешникова Е. И.* Математическое моделирование снежных лавин // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. М., 1980. Вып. 38. С. 79–84.
7. *Эглит М. Э., Вельтищев Н. Н.* Исследование математических моделей пылевой снежной лавины // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. Вып. 53. М., 1985. С. 116–119.

8. Данилова Е. М. Движение снежной лавины в лотке, поперечное сечение которого моделируется прямоугольником // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика.. 1978. № 4. С. 110–116.
9. Овсянников Л. В. Модели двухслойной «мелкой воды» // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
10. Еленин Г. Г. Об одной системе квазилинейных нестационарных уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1186–1190.
11. Чернышева Р. Т. Двухслойное течение жидкости в руслах // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1978. Т. 9. № 3. С. 147–160.
12. Русанов В. В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
13. Beghin P., Brugnot G. Contribution of theoretical and experimental results to powder-snow avalanche dynamics // Cold Reg. Sci. and Technol., 1983. V. 8. № 1. Pp. 67–73.
14. Васильев О. Ф., Квон В. И., Лыткин Ю. П., Розовский И. Л. Стратифицированные течения. М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 8. М., 1975. С. 74–131.
15. Самойлов В. А. Стереофотограмметрическая съемка движения лавины в Хибинах // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. М., 1976. Вып. 28. С. 128–133.

Москва

Поступила в редакцию  
4.V.1990