

УДК 532.529.013.4

© 1991 г.

Г. М. МАХВИЛАДЗЕ, Д. В. СЕРОВ, С. Е. ЯКУШ

## **О ЦИРКУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ОСАЖДЕНИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ**

Численно исследуется линейная неустойчивость процесса стационарного осаждения под действием силы тяжести бесконечного горизонтального слоя мелкодисперсных частиц в несжимаемой атмосфере. Рассматривается слой с неоднородным вертикальным распределением дисперсной фазы и малым объемным содержанием частиц, гидродинамическое взаимодействие между которыми осуществляется только через несущую фазу. Показано, что стационарное осаждение является неустойчивым: слой частиц распадается на отдельные конвективные ячейки с характерным размером порядка толщины слоя.

1. Гравитационное осаждение совокупности мелкодисперсных частиц в открытом пространстве — процесс, имеющий широкое распространение и давно привлекающий внимание исследователей. Как правило, в двумерной постановке рассматриваются облака наиболее простой правильной формы — сферической (см., например, [1–3]) или цилиндрической [4]. Между тем вопрос об эволюции облаков, имеющих вытянутую форму, при этом не затрагивается, хотя часто возникающие облака имеют именно такую форму. Неустойчивость аэрозольного образования к пространственным возмущениям может приводить к его распаду на отдельные ячейки, что в существенной мере определяет его дальнейшую эволюцию.

Ниже рассматриваются облака, вертикальный размер которых существенно меньше горизонтальных размеров. Тогда при анализе устойчивости можно пренебречь краевыми эффектами, связанными с образованием на периферии облака вихревых движений газа и рассматривать облако как плоский бесконечный слой. Как показано ниже, в несжимаемой атмосфере существует стационарный режим его осаждения, который выбирается в качестве невозмущенного состояния. Ниже анализируется линейная устойчивость этого состояния к малым возмущениям с целью выделения наиболее опасной неустойчивой моды, приводящей к распаду слоя.

По своей постановке задача имеет много общего с задачей об устойчивости ожигенного слоя (см., например, [5–8]), которая исследовалась многими авторами и продолжает обсуждаться в литературе. В одной из первых работ этого направления [5] использованы наиболее простые уравнения для описания дисперсной и несущей среды и в аналитическом виде получена зависимость скорости роста возмущений от их длины волны, откуда следует, что ожигенный слой абсолютно неустойчив. В [7] использованы наиболее полные уравнения двухжидкостной модели для вязких жидкостей и проведено численное исследование системы исходных уравнений, линеаризованной относительно малых возмущений, обнаружено существование устойчивых длинноволновых мод возмущений и условия их реализации.

Следует отметить, что задачи об устойчивости оседающего слоя и ожигенного слоя [5–8] имеют и существенные различия. Во-первых, при исследовании оседающего слоя, рассматриваемого в [1–4] и в данной работе, анализируется случай малого объемного содержания частиц, когда прямые столкновения частиц не играют роли. Это позволяет упростить исходные уравнения, но требует учета вязкости несущей фазы. Во-вторых, в оседающих слоях возникают большие градиенты плотности частиц по высоте. Это приводит к существенному усложнению уравнений, так как в них в явной форме входит вертикальная координата, что затрудняет поиск аналитического решения. Кроме того, становится невозможным использование уже имеющихся результатов по исследованию ожигенного слоя, поскольку почти во всех работах этого направления рассматриваются однородные концентрационные слои. В двух работах по неоднородным ожигенным слоям [9, 10] предприняты попытки найти границу устойчивости. При этом используются специфические приближения, пригодные только для ожигенных слоев, и остается открытым вопрос об определении наиболее быстро растущей моды возмущений.

Из сказанного следует, что непосредственное использование результатов анализа устойчивости оживленного слоя для процесса оседания плоского бесконечного слоя оказывается невозможным. В связи с этим ниже в рамках двумерной модели дисперсных сред численным методом, аналогичным предложенному в [7], анализируется ливневая устойчивость стационарного осаждения неоднородного по высоте слоя монодисперсных частиц.

2. Движение плоского слоя рассматривается в рамках основного допущения механики гетерогенных сред [11] о малости размера частиц и расстояний между ними по сравнению с характерными масштабами изменения макроскопических параметров среды. Исследуемая система рассматривается как совокупность двух взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов — газа (фаза 1) и частиц (фаза 2). Объемная доля дисперсной фазы предполагается малой настолько, что взаимодействие между частицами осуществляется только через газ. Пренебрегается хаотическим движением частиц, а также их дроблением и испарением. В силу существенно дозвукового характера течения несущая фаза рассматривается в приближении несжимаемой жидкости.

С учетом сделанных предположений двумерное нестационарное движение гетерогенной смеси описывается следующими уравнениями [11]:

$$\rho_1 \frac{d_1 \mathbf{V}_1}{dt} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{V}_1 - \mathbf{f} + \rho_1 \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \mathbf{V}_2}{dt} = \mathbf{f} + \rho_2 \mathbf{g}, \quad \frac{d_2 \rho_2}{dt} = -\rho_2 \operatorname{div} \mathbf{V}_2 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f} = C_\mu \rho_1 \rho_2 (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2), \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_i, \nabla), \quad \operatorname{Re}_p = \frac{2d w_{12}}{\nu} \quad (2.3)$$

Здесь  $t$  — время;  $\mathbf{V}_i = (u_i, v_i)$  — скорости газа и частиц ( $i=1, 2$ );  $\rho_1, \rho_2$  — средние плотности газа и частиц;  $P$  — давление газа;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\mathbf{g} = (0, -g)$  — вектор ускорения силы тяжести;  $d$  — диаметр частицы;  $w_{12}$  — относительная скорость частицы и газа;  $\nu$  — коэффициент молекулярной кинематической вязкости. Взаимодействие двух фаз при малом объемном содержании дисперсной фазы и для мелких частиц с числом Рейнольдса частицы  $\operatorname{Re}_p \ll 1$  согласно [11] описывается выражением (2.3) ( $C_\mu$  — постоянный для данного размера частиц коэффициент, соответствующий стоковому режиму обтекания частицы). Уравнения (2.1), (2.2) записаны в неподвижной системе координат, ось  $Y$  которой направлена вверх, ось  $X$  — вдоль слоя.

Ограниченное облако падающих частиц может двигаться либо в режиме фильтрации, либо в режиме увлечения [4, 12]. В первом случае каждая частица падает независимо от других и задача об устойчивости установившегося движения совокупности частиц в целом здесь не возникает.

Второй режим, наблюдающийся для мелких частиц при достаточно больших их концентрациях, характеризуется значительным гидродинамическим взаимодействием между частицами и полным или частичным вовлечением газа в общее движение. Отвечающее режиму увлечения «внешнее» число Рейнольдса, которое строится по размеру аэрозольного образования  $R$ , характерной скорости падения  $\sqrt{Rg}$  и молекулярной кинематической вязкости газа  $\nu$ , достигает больших величин; поэтому течение газа в облаке носит турбулентный характер.

В случае плоского аэрозольного слоя, образуемого мелкими частицами достаточно большой концентрации, движение газа в слое также будет носить турбулентный характер, что учитывается в (2.1) заданием эффективной турбулентной вязкости  $\eta$ .

Система (2.1), (2.2) имеет стационарное решение, которое отвечает оседанию слоя как целого с постоянной скоростью. Из первого уравнения

(2.2) следует, что скорость стационарного оседания равна

$$v_2^\circ = -g/(\rho_1 C_\mu) \quad (2.4)$$

Здесь и ниже индекс градус обозначает стационарные величины.

Перейдем теперь в движущуюся систему координат  $(x, y)$ , которая перемещается вместе с оседающим в стационарном режиме слоем. Для этого выполним замену переменных и свяжем начало координат с центром слоя  $x=X, y=Y+v_2^\circ t$  (заметим, что вид уравнений (2.1), (2.2) при этом не изменяется). Тогда в новой системе координат стационарное состояние соответствует неподвижному слою ( $V_2^\circ=0$ ), на который снизу набегаёт поток газа, имеющий скорость  $v_1^\circ=-v_2^\circ$ . Стационарное распределение плотности частиц в слое выбиралось гауссовым, а стационарное распределение давления газа с точностью до константы определяется из уравнений движения:

$$\rho_2^\circ(y) = a_0 \exp[-(y/R)^2], \quad P^\circ = - \int (\rho_1 g + C_\mu \rho_1 \rho_2 v_1^\circ) dy \quad (2.5)$$

где  $\rho_2^\circ$  — стационарная плотность частиц,  $a_0$  — значение плотности частиц в центре слоя,  $R$  — характерная полутолщина слоя.

Линеаризуя систему (2.1)–(2.2) относительно малых возмущений к стационарному состоянию (2.4)–(2.5), которые обозначаются штрихом, вводя функцию тока  $\Psi(x, y)$ , завихренность  $\Omega(x, y)$  и переходя к безразмерным переменным, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Omega - \frac{\rho_2^\circ}{\text{Fr} \varepsilon} \left( \Omega - \left( \frac{\partial u_2'}{\partial y} - \frac{\partial v_2'}{\partial x} \right) \right) + \\ + \frac{1}{\text{Fr} \varepsilon} \frac{\partial \rho_2'}{\partial x} - \frac{1}{\text{Fr} \varepsilon} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - u_2' \right) \frac{\partial \rho_2^\circ}{\partial y}, \quad \Delta \Psi = \Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_2'}{\partial t} = \frac{1}{\text{Fr}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - u_2' \right), \quad \frac{\partial v_2'}{\partial t} = - \frac{1}{\text{Fr}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_2' \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \rho_2^\circ \frac{\partial u_2'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_2^\circ v_2') = 0 \quad (2.8)$$

$$\Omega(x, y) = \frac{\partial u_1'}{\partial y} - \frac{\partial v_1'}{\partial x}$$

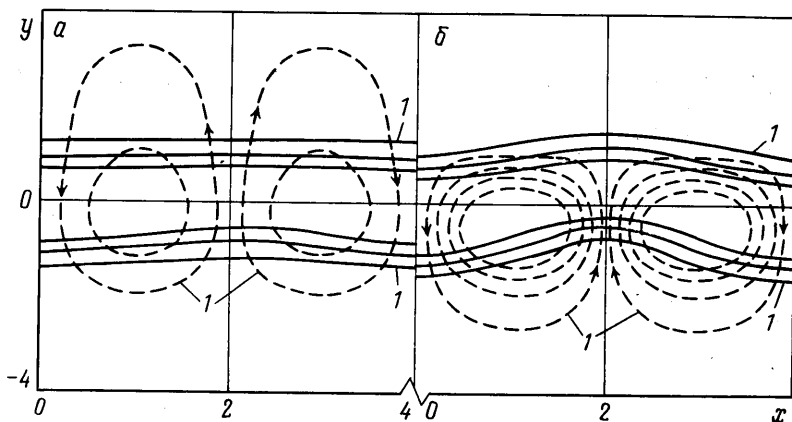
$$u_1' = \partial \Psi / \partial y, \quad v_1' = -\partial \Psi / \partial x$$

При дальнейшем изложении штрихи опускаются. В качестве характерных масштабов при введении безразмерных переменных использовались полутолщина слоя  $R$ , скорость  $v_1^\circ$ , время  $R/v_1^\circ$ , плотность частиц  $a_0$ . Решение зависит от следующих безразмерных комплексов: число Рейнольдса слоя  $\text{Re} = v_1^\circ R \rho_1 / \eta$ , число Фруда  $\text{Fr} = (v_1^\circ)^2 / (Rg) = v_1^\circ / (RC_\mu \rho_1)$  и отношения плотностей  $\varepsilon = \rho_1 / a_0$  (безразмерная стационарная плотность частиц  $\rho_2^\circ = \exp(-y^2)$ ).

3. Система уравнений (2.6)–(2.8) решалась численно методом сеток с использованием неявной схемы метода переменных направлений [13]. Для отыскания решения выделялась прямоугольная область  $\{x \in [0; \lambda]; y \in [-H/2; H/2]\}$ , горизонтальный размер которой выбирался равным длине волны возмущения. На обеих боковых границах (при  $x=0; \lambda$ ) ставились условия симметрии возмущений

$$\Omega = \Psi = 0, \quad \partial \rho_2 / \partial x = \partial v_2 / \partial x = u_2 = 0.$$

Предполагалось, что нижняя граница ( $y=-H/2$ ) находится достаточно далеко от центра слоя. Тогда можно считать, что на ней отсутствуют возмущения газа и частиц:  $\Omega = \Psi = u_2 = v_2 = \rho_2 = 0$ . Если верхняя граница



Фиг. 1

( $y=H/2$ ) также достаточно удалена от центра слоя, то на ней можно задать аналогичные условия для частиц:  $u_2=v_2=\rho_2=0$ , а для функции тока и завихренности записать [13]:  $\partial\Omega/\partial y=\partial\Psi/\partial y=0$ . В начальный момент предполагалось, что все возмущения отсутствуют, кроме возмущения плотности частиц

$$\rho_2(x, y) = \alpha \rho_2^0(y) \cos(2\pi x/\lambda) \quad (3.1)$$

которое представляет собой продольную волну с длиной  $\lambda$  и амплитудой  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ , в расчетах величина  $\alpha$  выбиралась в пределах  $\alpha=0,01-0,05$ ).

Возмущения этих величин отыскивались в виде

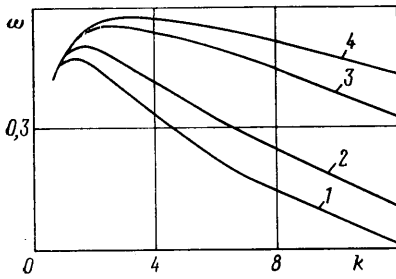
$$\{\Omega, \Psi, u_2, v_2, \rho_2\} = \exp(\omega t) \{f_1(x, y), \dots, f_5(x, y)\} \quad (3.2)$$

Скорость роста возмущений определялась по углу наклона прямолинейного участка временной зависимости функции тока в некоторой фиксированной точке слоя, построенной в логарифмическом масштабе. Для контроля проводилось сравнение со скоростью роста возмущения плотности частиц, а также вариация амплитуды возмущения плотности частиц  $\alpha$ .

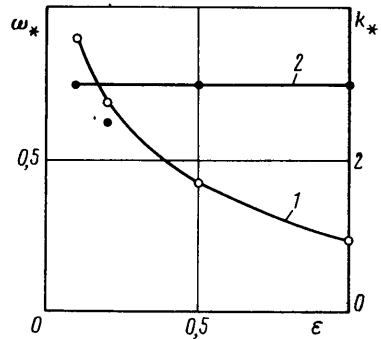
Значения безразмерных параметров выбирались в следующих диапазонах:  $Re=5-60$ ,  $Fr=0,1-3$ ,  $\varepsilon=0,1-10$ . Расчеты проводились на сетке  $21 \times 31$ , время расчета 10 временных слоев на ЭВМ ЕС 1055 — 2 мин.

4. На фиг. 1 представлена типичная картина развития возмущений в слое при  $Re=30$ ,  $Fr=1$ ,  $\varepsilon=0,2$ . В моменты  $t=1,975$  (а) и  $3,949$  (б) сплошными линиями нанесены линии равных плотностей частиц  $\rho_2^0 + \rho_2$ , штриховыми — линии равных значений функции тока газа. Шаг изолиний плотности  $\Delta\rho=0,2$ , значение плотности на изолинии, помеченной цифрой 1,  $\rho_2(1)=0,2$ ; для функции тока  $\Delta\Psi=0,05$ ,  $\Psi(1)=0,025$ .

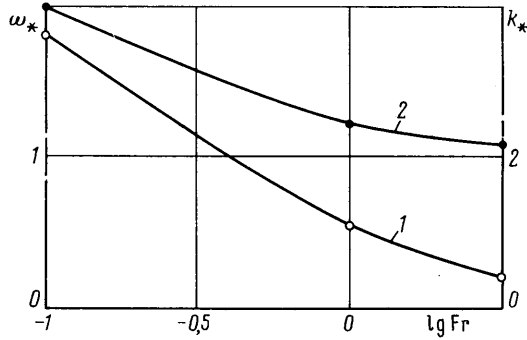
Процесс развития неустойчивости можно представить следующим образом. Внесенное в начальный момент возмущение плотности частиц отвечает сгущению частиц (см. (3.1)) вблизи боковых краев области и уменьшению их концентрации в средней части, поэтому изолинии на фиг. 1, а сгущаются на краях слоя. Неоднородное распределение плотности вызывает появление вихревого возмущения в газе (направление вращения указано стрелками). В системе координат, связанной с центром слоя, скорость газа возрастает в средней части области, где плотность частиц уменьшилась и, следовательно, упало гидродинамическое сопротивление песущему потоку, и снижается там, где плотность увеличилась. Возникшее вихревое течение иллюстрируется на фиг. 1 замкнутыми концентрическими штриховыми линиями тока. В дальнейшем (фиг. 1, б) происходит разгон газа, на что указывает появление новых изолиний функции тока, и рост возмущения плотности частиц. К моменту  $t=3,949$



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

изолинии плотности заметно искривляются. Таким образом, неустойчивость, возникающая в оседающем слое, аналогична циркуляционной неустойчивости [7], возникающей в ожизненном слое.

В результате численных расчетов были получены дисперсионные соотношения — связь скорости роста возмущений  $\omega$  с волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$  для различных значений определяющих безразмерных параметров  $Re$ ,  $Fr$ ,  $\varepsilon$  при фиксированном гауссовом распределении невозмущенной плотности частиц. Неустойчивость в слое развивается, если величина  $\omega$  больше нуля. При всех значениях безразмерных параметров из диапазона их изменения слой неустойчив.

На фиг. 2 для фиксированных  $Fr=1$ ,  $\varepsilon=0,2$  представлены зависимости  $\omega(k)$  при  $Re=5$ ; 10; 30; 60 (кривые 1—4). Поведение кривых хорошо согласуется с физическими соображениями о ходе процесса. Коротковолновые возмущения (большие  $k$ ) гасятся из-за действия вязкости газа, причем с уменьшением числа  $Re$  (увеличением вязкости) малые длины волн подавляются сильнее. Рост длинноволновых возмущений также затруднен (при  $k \rightarrow 0$   $\omega$  убывает), поскольку для их развития в движение должны быть вовлечены большие массы газа. Механизм, препятствующий росту длинных волн, носит инерционный характер и не связан с вязкостью газа, поэтому при малых значениях  $k$  ход зависимости  $\omega(k)$  на рисунке слабо различается для разных чисел  $Re$ . Следовательно, для каждого значения числа Рейнольдса должно существовать значение волнового числа  $k_*$ , при котором достигается максимум функции  $\omega(k)$ . При увеличении  $Re$  из-за уменьшения вязкости этот максимум сдвигается в сторону больших  $k$ .

На фиг. 3 представлены зависимости  $\omega_* = \omega(k_*)$  (кривая 1) и  $k_*$  от числа Фруда  $Fr$  ( $Re=30$ ,  $\varepsilon=1$ ), которое можно интерпретировать как отношение времени выравнивания скоростей частиц и газа  $\tau_r \sim 1/(\rho_1 C_u)$  к характерному времени пребывания газовой частицы в слое  $\sim R/v_1^*$ . Если  $Fr \rightarrow \infty$ , т. е. время  $\tau$  велико, частицы практически не увлекаются газом

и в выбранной системе координат не могут двигаться; неустойчивость циркуляционного типа в этом случае развиваться не может. Поэтому кривая 1 на фиг. 3 при увеличении  $Fr$  стремится к нулю.

О слабом проявлении неустойчивости в слое с большими числами  $Fr$  свидетельствует и поведение кривой 2 на фиг. 3. Стремление  $k_*$  к нулю (при  $Fr \rightarrow \infty$ ), а значит, неограниченное возрастание  $\lambda_*$ , указывает на то, что такой слой будет распадаться на ячейки с бесконечным горизонтальным размером или, другими словами, слой вообще не будет распадаться.

При увеличении отношения плотностей  $\epsilon = \rho_1/a_0$  инкремент нарастания возмущений убывает — кривая 1 на фиг. 4 ( $Re=30$ ,  $Fr=1$ ), поскольку с уменьшением плотности частиц исчезает причина, порождающая неустойчивость. Зависимость критического волнового числа  $k_*$  от  $\epsilon$  практически отсутствует (фиг. 4, кривая 2).

Проведенное численное исследование линейной устойчивости оседания плоского слоя частиц позволяет сделать вывод, что в достаточно широком диапазоне определяющих параметров процесс стационарного оседания бесконечного слоя мелкодисперсных частиц неустойчив, а развивающаяся в слое неустойчивость может быть отнесена к циркуляционному типу [7]. Наиболее быстро растут возмущения с длинами волн  $\lambda_* = 2\pi/k_* \approx 1,5-4$ , которые хотя и изменяются для различных определяющих параметров, но тем не менее остаются близкими по порядку величины к характерной толщине слоя, равной в безразмерных переменных двум. Характерное время развития возмущений меняется в пределах  $t_* = 1/\omega_* = 1,2-5$ . Можно ожидать, что проявившая себя на линейной стадии наиболее «опасная» мода за время порядка  $t_*$  приведет к распаду слоя на отдельные конвективные ячейки с характерным размером, близким к  $\lambda_*$ .

Возвращаясь к вопросу об осаждении облаков, имеющих вытянутую форму, с вертикальным размером, существенно меньшим горизонтальных, можно сделать вывод, что процесс их осаждения неустойчив; в средней первоначально однородной части облака возникает ячеистая структура описанного типа. Это существенно изменяет закономерности осаждения вытянутого облака и приводит к необходимости при описании процесса осаждения применять такой подход, который бы позволил разрешить достаточно тонкую структуру — порядка толщины облака.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Струминский В. В., Гуськов О. Б., Кульбицкий Ю. Н. Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 1. С. 65-68.
2. Дорфман А. Л. Численное моделирование двухфазных течений с вязкой несущей фазой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 49-54.
3. Махвиладзе Г. М., Мелихов О. И. Осаждение облака газозвеси на горизонтальную поверхность // ПМТФ. 1987. № 2. С. 97-101.
4. Махвиладзе Г. М., Мелихов О. И. О движении совокупности частиц под действием силы тяжести и ее осаждении на плоскую горизонтальную поверхность // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 64-73.
5. Jackson R. The mechanics of fluidized beds. Pt I. The stability of the state of uniform fluidization // Trans. Inst. Chem. Engrs. 1963. V. 41. № 1. P. 13-21.
6. Anderson T. B., Jackson R. A fluid mechanical description of fluidized beds // Ind. Engng. Chem. Fundam. 1967. V. 6. № 4. P. 527-539.
7. Medlin J., Wong H.-W., Jackson R. Fluid mechanical description of fluidized beds. Convective instabilities in bounded beds // Ind. Engng Chem. Fundam. 1974. V. 13. № 3. P. 247-259.
8. Batchelor G. K. A new theory of the instability of a uniform fluidized bed // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 75-110.
9. Лихт М. К., Штейнберг В. А. Об устойчивости слоя жидкости при барботаже // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 4. С. 47-53.
10. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Конвективная неустойчивость однородного взвешенного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 4. С. 39-46.
11. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
12. Фукс П. А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР. 1955. 351 с.
13. Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.II.1990