

УДК 532.529:533.6.011.3

© 1991 г.

А. А. ШРАЙБЕР

**К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛИДИСПЕРСНОГО
ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ С КОАГУЛЯЦИЕЙ
И ДРОБЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ**

На базе непрерывного подхода к описанию взаимодействия частиц [1] построена модель движения полидисперсного ансамбля, учитывающая распределение частиц по скоростям. Показано, что эта модель позволяет получить более точную информацию о параметрах течения по сравнению с моделями, основанными на традиционных представлениях.

1. Пусть m — масса, δ — диаметр частицы. Под фракцией m , dm или δ , $d\delta$ будем понимать частицы, масса которых принимает значения от m до $m+dm$ или диаметр — от δ до $\delta+d\delta$. В подавляющем большинстве работ по двухфазным (газокапельным) течениям с переменным фракционным составом дискретной фазы предполагается, что все частицы данной фракции имеют одну скорость и одну температуру [1, 2]. В рамках таких моделей (в [1] они именуются гидродинамическими, здесь назовем их моделями А) двухфазная система рассматривается как многоскоростная и многотемпературная сплошная среда, представляющая собой совокупность взаимопроникающих континуумов. Это позволяет существенно упростить описание эволюции состояния системы, однако здесь возникает необходимость в принятии дополнительных гипотез о перераспределении избытка импульса и энергии новых, образовавшихся вследствие коагуляции и дробления частиц m по сравнению с другими частицами той же фракции. Наиболее естественно предположить, что избыток импульса и энергии распределяется равномерно между всеми частицами данной фракции (гипотеза I согласно [1, 2]), однако это связано с недостаточно строгой процедурой осреднения. Альтернатива состоит в предположении о том, что весь избыток импульса и энергии передается несущей среде (гипотеза II). В [1, 2] обсуждается также более общая, компромиссная гипотеза, согласно которой определенная часть избытка распределяется внутри фракции, а остаток передается газу. В этом случае при использовании непрерывного подхода и метода Лагранжа [1, 2] уравнения квазиодномерного стационарного движения газа и частиц приобретают вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{f_i}{u_i} + \frac{3\rho_g u_g}{2\rho_b} \left[\frac{1}{\delta_i^3 u_i} \int_0^{\delta_i} \Phi_{ji} K_{ji} (u_{ij}' - u_i) d\delta_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{g_i} \int_0^{\delta_k} \int_0^{\delta_k} \Omega_{jkt} (u_{ijk}' - u_i) d\delta_j d\delta_k \right], \quad \Omega_{jkt} = \frac{G_k \alpha_{jkt}}{u_k \delta_k^3} (1 - \Phi_{jk}) K_{jk} \quad (1.1)$$

$$\frac{du_g}{dx} + \frac{1}{\rho_g u_g} \frac{dp}{dx} + \int_0^{\infty} G_i \frac{f_i}{u_i} du_i - \frac{3\rho_g u_g}{2\rho_b} \int_0^{\infty} \left[\frac{G_i}{u_i \delta_i^3} \int_0^{\delta_i} \Phi_{ji} K_{ji} (u_{ij} - u_{ij}') d\delta_j + \right. \\ \left. + \int_{\delta_i}^{\infty} \int_0^{\delta_k} \Omega_{jki} (u_{ijk} - u_{ijk}') d\delta_j d\delta_k \right] d\delta_i = 0 \quad (1.2)$$

Здесь u — скорость; ρ — плотность; x — продольная координата; f — сила аэродинамического сопротивления, отнесенная к единице массы частиц; $K_{ji} = H_{ji} (\delta_i + \delta_j)^2 |u_j - u_i| G_j u_j^{-1}$ — константа взаимодействия; H — коэффициент осаждения; Φ — параметр коагуляции и дробления; $G_i = G(x, \delta_i)$ — функция распределения частиц по размерам ($d\kappa_i = G_i d\delta_i$, κ — массовая расходная концентрация); α_{jki} — функция распределения осколков i , образующихся при столкновении $j-k$; p — давление; u_{ijk} — начальная скорость осколков i , определяемая соотношением

$$u_{ijk} = u_k + \beta_{ijk} (u_j - u_k) \quad (1.3)$$

а u_{ij} — начальная скорость новой части массы частиц i , которая переходит в них из фракции j [2]. Величины с индексом g относятся к газу, с индексом b — к веществу частиц. Уравнения сохранения энергии записываются аналогично.

Компромиссная гипотеза позволяет сопоставить различные модели перераспределения избытка импульса и энергии. Приведем некоторые результаты применительно к двухфазному течению в типичном сопле Лаваля при $p_e = 15$ МПа, $T_{ge} = 3800$ К, $z = 0,87$, $r_* = 32,5$ мм, $\delta_e = 1,6$ мкм (T — температура, z — массовое содержание конденсата, r_* — радиус минимального сечения, $\langle \delta \rangle$ — средний размер частиц, величины с индексом e относятся к входному сечению). В расчете учитывалось 10 фракций конденсата с начальными размерами частиц $\delta_{ie} = 0,8; 1,2; 1,6; 1,8; 2; 2,4; 2,8; 3,2; 4,4; 6$ мкм. Значения u' и E' принимались равными

$$\varphi'_{ijk} = \varepsilon \varphi_i + (1 - \varepsilon) \varphi_{ijk}, \quad \varphi'_{ij} = \varepsilon \varphi_i + (1 - \varepsilon) \varphi_{ij} \quad (\varphi = u, E)$$

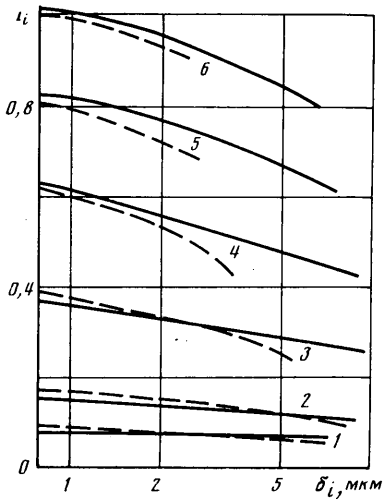
где E — удельная энергия, $E_i = c_b T_i + 0,5 u_i^2$, c — удельная теплоемкость; $0 \leq \varepsilon < 1$. При этом $\varepsilon = 0$ соответствует гипотезе I, $\varepsilon = 1$ — гипотезе II. Аналогично [2] решалась обратная задача.

На фиг. 1 приведены данные о распределении скоростей частиц в различных сечениях сопла (сплошные линии — гипотеза I, штриховые — гипотеза II; кривые 1–6 отвечают $x = 0,27; 0,77; 1,77; 2,77; 4,8; 11,8$; значения x отнесены к r_* , u_i к $\sqrt{RT_{ge}}$, R — газовая постоянная; $x = 0$ соответствует входному, а $x = 1,77$ — минимальному сечению). Видно, что гипотеза I способствует сближению скоростей частиц различного размера — это объясняется действием интегральных слагаемых в (1.1). Поэтому при полной коагуляции гипотеза I всегда предсказывает замедление роста частиц. В то же время при наличии дробления, когда размер частиц подчиняется уравнению

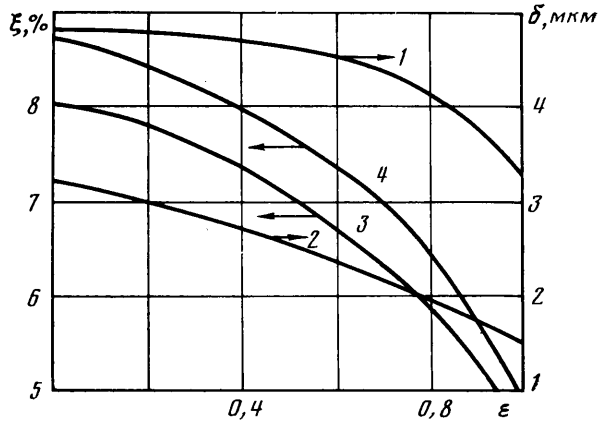
$$\frac{d\delta_i}{dx} = \frac{u_g \rho_g}{2\rho_b u_i \delta_i^2} \int_0^{\delta_i} \Phi_{ji} K_{ji} d\delta_j$$

однозначный вывод сделать нельзя. Полагая $H_{ji} \approx \text{const}$ и определяя Φ_{ji} по формуле (23) из [1], можем записать

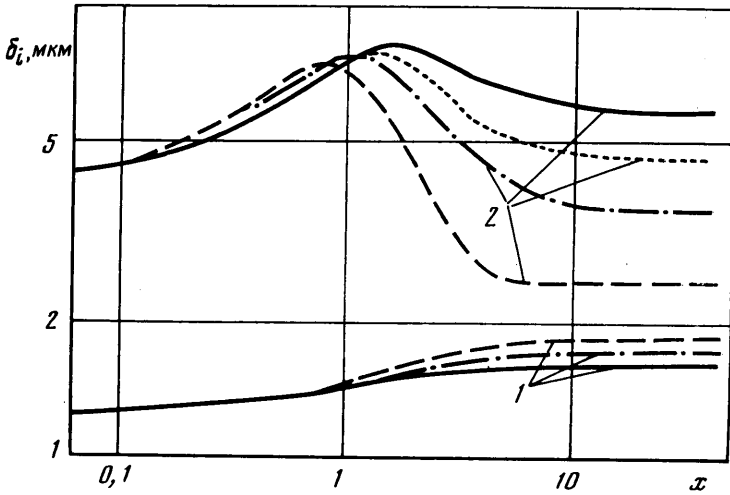
$$\frac{\partial \Phi_{ji} K_{ji}}{\partial |u_j - u_i|} \approx \frac{H_{ji} (\delta_i + \delta_j)^2 G_j}{u_j} (1,407 \Phi_{ji} - 0,407) \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Таким образом, при $\Phi > 0,29$ с увеличением межфракционного скольжения рост частиц ускоряется, а при $\Phi < 0,29$ замедляется, так как здесь интенсивность дробления нарастает быстрее, чем частота ударов. Этим объясняется характер кривых на фиг. 2, которая иллюстрирует изменение размера частиц по длине потока (кривые 1 и 2 отвечают $\delta_{ie} = 1,2$ и $4,4$ мкм; сплошные линии — гипотезе I, штриховые — II, пунктирная и штрихпунктирная — $\epsilon = 0,6$ и $0,8$ соответственно). Для мелких частиц и на восходящей ветви кривых 2 эффективные значения Φ велики и частицы укрупняются тем быстрее, чем больше ϵ . В транс- и сверхзвуковой области для крупных частиц $\Phi < 0$, и величина δ_i уменьшается с ростом ϵ . Следует также отметить, что для дозвукового течения увеличение $|u_j - u_i|$ приводит к возрастанию K_{ji} и уменьшению Φ_{ji} , а для сверхзвукового — к одновременному увеличению K_{ji} и $|\Phi_{ji}|$. Поэтому расхождение между кривыми 2 мало при $x < 1$ и велико при $x \gg 3$.

В табл. 1 приводятся данные о размере (верхние цифры каждой двойной строки, мкм) и массовой расходной концентрации (нижние цифры) частиц в выходном сечении сопла. При больших ϵ наблюдается энергич-

Таблица 1

i	Модель А						Модель В
	$\varepsilon=0$	0,4	0,6	0,8	0,9	1	
1	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
	0,99	1,31	1,57	2,01	2,3	2,66	0,74
2	1,56	1,58	1,62	1,68	1,74	1,82	1,56
	0,98	1,22	1,41	1,71	1,86	2,12	0,88
3	2,36	2,38	2,4	2,4	2,38	2,24	2,39
	0,73	0,83	0,9	0,96	0,93	0,27	0,78
4	2,8	2,8	2,8	2,74	2,64	2,26	2,83
	0,46	0,48	0,49	0,47	0,41	0,12	0,52
5	3,26	3,22	3,14	2,98	2,8	2,28	3,31
	0,57	0,55	0,52	0,43	0,33	0,11	0,76
6	4,04	3,86	3,66	3,26	2,92	2,3	4,04
	0,74	0,64	0,56	0,4	0,27	0,17	0,95
7	4,78	4,44	4,08	3,46	2,92	2,32	4,71
	0,96	0,74	0,57	0,35	0,03	0,71	0,73
8	5,28	4,8	4,34	3,56	2,94	2,36	5,2
	1,08	0,80	0,59	0,32	0,11	0,14	0,94
9	5,92	5,18	4,56	3,6	2,96	2,4	6,16
	0,18	0,12	0,08	0,04	0,26	0,24	0,39
10	6,5	5,46	4,68	3,62	2,98	2,44	6,85
	0,008	0,005	0,003	0,008	0,19	0,15	0,002

ное дробление частиц крупных фракций (ср. фиг. 2), так что в результате их размер на выходе становится существенно меньше, чем во входном сечении. С увеличением ε происходит значительное перераспределение вещества между фракциями, причем концентрация мелких частиц возрастает. Это объясняет представленную на фиг. 3 зависимость среднего размера частиц в минимальном (1) и в выходном (2) сечениях, а также потерь пустотного ζ_0 (3) и расчетного ζ_0 (4) удельного импульса из-за запаздывания конденсата от параметра ε . Следует подчеркнуть, что для данного варианта переход от гипотезы I к гипотезе II приводит к уменьшению $\langle \delta \rangle$ на выходе более чем вдвое, а потеря — почти в 1,8 раза. Вместе с тем из (1.4) ясно, что эта зависимость может быть и иной: так, в [2] приведен пример небольшого увеличения $\langle \delta \rangle$ и ζ с ростом ε .

Для решения вопроса о выборе перераспределительной гипотезы, которая в наибольшей мере соответствует реальному процессу, следовало бы поставить прецизионный эксперимент, разрешающей способности которого было бы достаточно для идентификации исследуемых эффектов. В настоящее время это выходит за рамки технических возможностей. Другой, более реальный путь — разработка статистической теории двухфазного течения, учитывающей распределение частиц каждой фракции по скоростям и энергиям. Подобные модели (будем называть их моделями В) рассматриваются в [3–9]. В [3] исходное уравнение записано в общей форме, не конкретизирован вид столкновительного интеграла, а численные результаты практически отсутствуют. В [4, 5] рассматривается одномерная задача о коагуляции свободно падающих снежинок; при этом вводится функция $P(\delta, u_0/m)$ распределения частиц m по размеру и скорости витания. На примере простых функций P (прямоугольной в [4], гауссовой в [5]) показано, что учет распределения частиц по скоростям увеличивает темп коагуляционного роста частиц. В [6] используется излишне упрощенная и далекая от реальности схема массопереноса при взаимодействии капель. В [7, 8] получено наиболее строгое и корректное уравнение относительно функции распределения частиц по скоростям и температурам, однако метод численной реализации построенной модели (введение осредненных $\langle u \rangle$ и пульсационных u' скоростей, вычисление моментов типа $\langle u'u' \rangle$ и тому подобные приемы, заимствованные из теории турбулентных течений) не вполне обоснован и не позволяет получить детальную информацию об изучаемом процессе. В [9] предложен метод решения одномерного статистического уравнения для случая полной коагу-

ляции. Общим недостатком работ [3–9] является использование кинетического подхода к описанию взаимодействия частиц [1], что приводит к необходимости рассмотрения слишком большого количества фракций. Ниже приводятся результаты решения аналогичной задачи на базе непрерывного подхода, значительно более экономичного и удобного в реализации.

2. Примем все условия, перечисленные в [9], и ограничимся квазиодномерной постановкой задачи, поскольку решение двумерных статистических уравнений, вероятно, выходит за пределы возможностей современных ЭВМ. В случае полной коагуляции непрерывный подход в строгом смысле, разработанный в [1, 2] для гидродинамических теорий, не может быть использован для построения статистической модели. Действительно, в соответствии с традиционными представлениями непрерывного подхода все частицы i одинаковым образом взаимодействуют (коагулируют) с меньшими частицами j ; следовательно, не только массы, но и скорости и температуры различных частиц i должны изменяться по длине потока одинаково. При наличии дробления ситуация становится иной: здесь необходимо различать старые частицы i , существовавшие во входном сечении, и новые частицы этой фракции — осколки, образующиеся в результате столкновений $j-k$ ($\delta_k > \delta_i$, $\delta_j < \delta_k$), так что параметры тех и других в общем случае могут быть различны. Однако при анализе взаимодействия $j-i$ ($\delta_j < \delta_i$) всем частицам i по-прежнему следует приписывать одинаковое поведение. Поэтому для построения статистической модели необходимо разработать новый вариант данного подхода. Будем называть квазинепрерывным (гибридным) подходом такое описание взаимодействия фракций, при котором изменение массы частиц определяется на базе традиционных представлений, но изменение их скорости и температуры — таким же образом, как в кинетических моделях. Иначе говоря, положим, что частица в результате столкновения $j-i$ не утрачивает свою индивидуальность, т. е. продолжает принадлежать к той же фракции i , но покидает свою группу (i, u, T), поскольку ее скорость и температура изменяются.

При течении в соплах запаздывание частиц по скорости оказывает значительно большее влияние на интегральные параметры процесса, чем запаздывание по температуре [7, 8]. Поэтому для упрощения будем рассматривать распределение частиц только по скоростям и в первом приближении примем, что распределение температур ему подобно, т. е. максимальной скорости будет соответствовать минимальная температура, и т. д. Введем функцию $g(x, \delta_i, u) = g(u)$ так, что $dx = g_i(u) d\delta_i du$. Как и в (1.1), (1.2), используем метод Лагранжа. Расход частиц группы (δ_i, u) в сечениях x и $x+dx$ по определению равен

$$dM_x = M_g(x, \delta_i, u) d\delta_i du, \quad dM_{x+dx} = M_g(x+dx, \delta_i, u) d\delta_i^* du^* \quad (2.1)$$

Обозначим через D_i скорость коагуляционного роста частиц i , т. е. $D_i = d\delta_i/dx$. Тогда

$$\begin{aligned} d\delta_i^* du^* &= \frac{\partial(\delta_i + D_i dx, u + f_i u^{-1} dx)}{\partial(\delta_i, u)} d\delta_i du = \\ &= 1 + \frac{\partial D_i}{\partial \delta_i} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_i}{u} \right) d\delta_i du \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть I — скорость изменения концентрации частиц в группе (i, u) за счет межчастичного взаимодействия. Из (2.1), (2.2) следует

$$\frac{\partial g_i}{\partial x} + g_i \frac{\partial D_i}{\partial \delta_i} + g_i \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_i}{u} \right) = I \quad (2.3)$$

Правая часть (2.3) подобно [2] может быть представлена в виде $I = I_1 + I_2 + I_3$, где первый член учитывает поступление в группу (i, u) неких частиц (i, u^0) в результате взаимодействия $j-i$, второй — гибель частиц (i, u) за счет столкновений с другими частицами, третий — рождение осколков (i, u) при всевозможных взаимодействиях. Обозначим через $U_i(x)$ «детерминированную» скорость фракции i , т. е. ту скорость, которую имела бы частица i в сечении x , если бы на участке x_0-x она двигалась без соударений. Очевидно, в ускоряющемся потоке функция $U_i(\delta_i)$ в каждом сечении монотонно убывающая. При этом нетрудно убедиться, что носителем функции $g_i(u)$ является интервал (U_∞, U_0) . С одной стороны, осколок i может родиться при взаимодействии двух «медленных» крупных частиц, с другой — частица i может испытывать достаточно частые удары мельчайших частиц, движущихся с высокой скоростью.

Пусть произошло столкновение частиц $(j, v) - (k, u^*)$ ($\delta_k > \delta_i, \delta_j < \delta_k$), в результате которого образовались осколки фракции i , движущиеся со скоростью u . Величины u, u^* и v связаны формулой типа (1.3), где в соответствии с опытными данными [2] положим $\beta \approx \text{const}$. Тогда

$$u^* = (uv\beta)/(1-\beta) \quad (2.4)$$

Поскольку v и u^* должны принимать значения в диапазоне (U_∞, U_0) , то из (2.4) следует

$$\begin{aligned} v' \leq v \leq v'', \quad v' &= \max\{U_\infty, u\beta^{-1} - (\beta^{-1}-1)U_0\} \\ v'' &= \min\{U_0, u\beta^{-1} - (\beta^{-1}-1)U_\infty\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

На фиг. 4, а изображена область образования частиц (i, u) — пятигранник $ABCDEF$. Его сечения плоскостями $\beta \approx \text{const}$ представляют собой параллелограммы с основанием $(1-\beta)U'$ и высотой U' , где $U' = U_0 - U_\infty$.

Рассмотрим теперь взаимодействие $(j, v) - (i, u^0)$ ($\delta_j < \delta_i$), причем частица i после удара приобретает скорость u . Тогда

$$m_j v + m_i u^0 = (m_i + \Phi_{ji}^0 m_j) u + (1 - \Phi_{ji}^0) m_j [u^0 + \beta(v - u^0)]$$

откуда

$$u^0 = \lambda_{ji} u - (\lambda_{ji} - 1)v, \quad \lambda_{ji} = \frac{1 + \Phi_{ji}^0 m_j m_i^{-1}}{1 - (1-\beta)(1 - \Phi_{ji}^0) m_j m_i^{-1}} \quad (2.6)$$

Здесь Φ_{ji}^0 вычисляется применительно к взаимодействию частиц со скоростями v и u^0 . Подобно (2.5) в данном случае $v_1 \leq v \leq v_2$ и

$$v_1 = \max\left\{U_\infty, \frac{\lambda}{\lambda-1}u - \frac{U_0}{\lambda-1}\right\}, \quad v_2 = \min\left\{U_0, \frac{\lambda}{\lambda-1}u - \frac{1}{\lambda-1}U_\infty\right\} \quad (2.7)$$

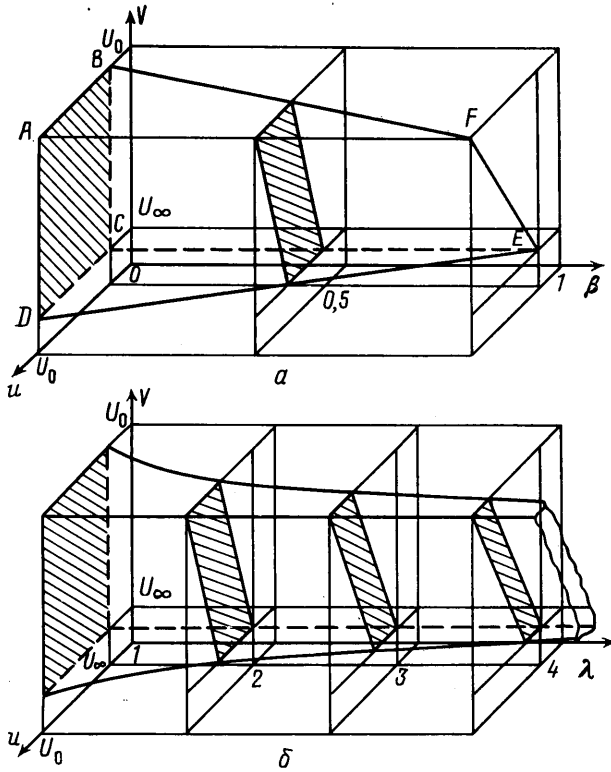
Область допустимых значений v показана на фиг. 4, б.

На участке dx массовый расход частиц (i, u^0) , перетерпевших столкновения с частицами (j, v) и, следовательно, переходящих в группу (i, u) , составит

$$dM_i' = l_{ij}^{-1} M_{g_i}(u^0) d\delta_i du^0 dx$$

где длина свободного пробега l_{ij} вычисляется подобно [2]

$$l_{ij} = \frac{2\rho_b v \delta_i^3 u^0}{3(\delta_i + \delta_j)^2 |v - u^0| \rho_g u_g g_j(v) d\delta_j dv}$$



Фиг. 4

После интегрирования и простых преобразований находим

$$I_1' = -\frac{3\rho_g u_g}{2\rho_b} \int_0^{\delta_t} \int_{v_1}^{v_2} K_{ji}^\circ \frac{g_i(u^\circ)}{u^\circ \delta_j^3} \lambda_{ji} dv d\delta_j \quad (2.8)$$

где K° вычисляется так же, как и в (1.1), (1.2). Следует отметить, что в (2.8) учитывается только переход массы частиц (i, u°) (но не (j, v)) в группу (i, u) . Определяя таким же образом расход вещества мелкой фракции и учитывая образование осколков, окончательно получаем

$$I_1 = \frac{3\rho_g u_g}{2\rho_b} \int_0^{\delta_t} \int_{v_1}^{v_2} \lambda_{ji} K_{ji}^\circ \frac{g_i(u^\circ)}{u^\circ} \left(\frac{1}{\delta_j^3} + \frac{\Phi_{ji}^\circ}{\delta_i^3} \right) dv d\delta_j \quad (2.9)$$

Значения I_2 и I_3 вычисляются аналогично (2.8) и (2.9)

$$I_2 = -\frac{3\rho_g u_g}{2\rho_b} \frac{g_i(u)}{u} \int_0^{\infty} \int_{U_\infty}^{U_0} \frac{K_{ji}}{\delta_j^3} dv d\delta_j \quad (2.10)$$

$$I_3 = \frac{3\rho_g u_g}{2\rho_b} \int_{\delta_t}^{\infty} \int_{v'}^{\infty} \int_{v''}^{\infty} \frac{g_k(u^*) K_{jk}^*}{\delta_k^3 u} (1 - \Phi_{jk}^*) \alpha_{jki} \frac{1}{1-\beta} dv d\delta_j d\delta_k$$

где K^* и Φ^* соответствуют взаимодействию $v-u^*$. Заметим, что в отличие от гидродинамических моделей [1, 2] в I_2 интегрирование проводится по

всему спектру размеров частиц j , так как любой акт взаимодействия $j-i$ приводит к уходу частицы i из своей группы. Уравнения сохранения импульса и энергии для двухфазной смеси имеют вид

$$\frac{du_g}{dx} + \frac{1}{\rho_g u_g} \frac{dp}{dx} + \int_0^{u_0} \int_{u_\infty} g_i(u) \frac{f_i}{u} du d\delta_i = 0 \quad (2.11)$$

$$c_p \frac{dT_g}{dx} + u_g \frac{du_g}{dx} + \int_0^{u_0} \int_{u_\infty} g_i(u) \left(f_i + \frac{q_i}{u} \right) du d\delta_i = 0 \quad (2.12)$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость газа при $p = \text{const}$, а q — тепловой поток от газа к частицам, отнесенный к единице их массы. Естественно, в (2.11), (2.12) коагуляционные поправки не требуются (ср. (1.2)). Таким образом, полученные уравнения (2.3)–(2.7), (2.9)–(2.12) совместно с уравнениями неразрывности и состояния газа образуют замкнутую систему.

3. Пусть ψ — признак частицы. Среднее значение Ψ признака ψ по фракции i определим как

$$\Psi_i = G_i^{-1} \int_{u_\infty}^{u_0} g_i(u) \psi du, \quad G_i = \int_{u_\infty}^{u_0} g_i(u) du$$

где G_i — то же, что и в (1.1), (1.2). Умножим (2.3) на ψ и проинтегрируем по u . В результате получим

$$\begin{aligned} A_i &= \int_{u_\infty}^{u_0} \left[\frac{\partial \psi g_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \delta_i} (\psi g_i D_i) + \psi g_i \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_i}{u} \right) \right] du = \\ &= \int_{u_\infty}^{u_0} \left[g_i \frac{\partial \psi}{\partial x} + D_i \frac{\partial}{\partial \delta_i} (\psi g_i) + \psi I \right] du \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что при использовании метода Лагранжа для произвольной функции χ справедливо равенство

$$\frac{d}{dx} \int_{u_\infty}^{u_0} \chi du = \int_{u_\infty}^{u_0} \left[\frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_i}{u} \right) \right] du$$

Положим, что скорость коагуляционного роста частиц i не зависит от u , т. е. осредним D_i по фракции i , что вполне соответствует подходу. Тогда левую часть (3.1) можно привести к виду

$$A_i = \frac{\partial (G_i \Psi_i)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \delta_i} (G_i \Psi_i D_i) \quad (3.2)$$

Если в уравнение переноса признаков (3.1), (3.2) подставить $\psi = 1$ и $\psi = u$, то получаются уравнения неразрывности и движения частиц

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial x} + G_i \frac{\partial D_i}{\partial \delta_i} &= \int_{u_\infty}^{u_0} I du \\ \frac{dV_i}{dx} &= \frac{1}{G_i} \int_{u_\infty}^{u_0} \left[g_i(u) \frac{f_i}{u} + I(u - V_i) \right] du \end{aligned} \quad (3.3)$$

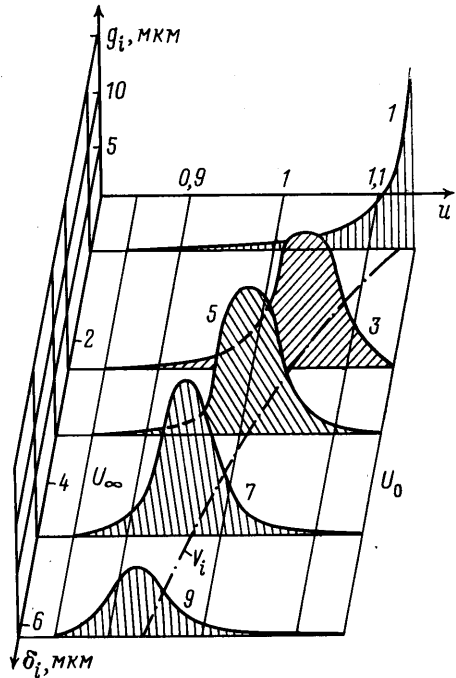
где V_i — средняя скорость фракции i . Как показано в [8], для очень малых частиц функция g_i отлична от нуля в небольшой окрестности точки V_i . Если в (3.3) положить $g_i(u) = G_i \delta(u - V_i)$ (δ — дельта-функция), то получаются уравнения гидродинамической модели с использованием перераспределительной гипотезы I. В частности, второе из соотношений (3.3) сводится к (1.1), где $u_{ijk} = u_{ijk}$, $u_{ij}' = u_{ij}$. Таким образом, данную модель можно рассматривать как некий предельный вариант статистической модели, что является дополнительным аргументом в пользу гипотезы I. Следует отметить, что в монографии [8] гидродинамические модели для различных схем дробления частиц при столкновениях выводятся подобным образом и, естественно, также соответствуют гипотезе I, причем возможность применения других гипотез в [8] не обсуждается. В этом смысле применяемый в [2] метод вывода гидродинамических уравнений непосредственно из законов сохранения имеет важное преимущество, так как позволяет рассмотреть различные перераспределительные гипотезы.

4. Численное интегрирование системы (2.3)–(2.7), (2.9)–(2.12) проводилось для тех же условий, что и «гидродинамические» расчеты (см. фиг. 1–3). Использовалась схема Эйлера с пересчетом при автоматическом выборе шага по числу итераций, необходимых для достижения заданной точности вычисления локальных параметров течения. Во входном сечении функция $g_{ie}(u)$ для каждой фракции аппроксимировалась прямоугольным распределением

$$g_{ie}(u) = \begin{cases} \kappa_i (U_{0e} - U_{\infty e})^{-1}, & U_{\infty e} < u < U_{0e} \\ 0, & u < U_{\infty e} \text{ или } u > U_{0e} \end{cases} \quad (4.1)$$

где $U_{0e} = 0,999u_{ge}$, $U_{\infty e} = 0,997u_{ge}$. Оказалось, что частицы достаточно быстро «забывают» начальное условие (4.1) и для всех фракций устанавливается «квазистационарный» характер функций g_i .

На фиг. 5 приведены значения функции распределения частиц по размерам и скоростям в выходном сечении сопла (номера кривых соответствуют приведенным в разд. 1 значениям δ_{ie} ; u отнесены к $\sqrt{RT_{ge}}$, g — к $(RT_{ge})^{-0,5}$, штрихпунктирная линия указывает средние скорости фракций). Видно, что абсцисса максимума $g_i(u)$ является монотонно убывающей функцией размера частиц и практически совпадает с V_i , за исключением наиболее мелкой фракции, для которой g_i имеет максимум в точке U_0 . Фракционный состав частиц в выходном сечении представлен в табл. 1 (правый столбец). Сравнение данных табл. 1 показывает, что, строго говоря, ни одна из гидродинамических моделей не позволяет правильно предсказать эволюцию фракционного состава конденсата. Вместе с тем необходимо отметить, что наиболее близкое к реальному распределение частиц по размерам получается при использовании гипотезы I, т. е. при $\epsilon = 0$.



Фиг. 5

Статистическая модель дает следующие значения интегральных параметров течения на выходе: $\langle \delta \rangle = 3,34$ мкм, $\zeta_c = 11,5\%$, $\zeta_v = 10,4\%$. Подобно [4, 5, 7–9] здесь наблюдается некоторое увеличение интенсивности коагуляции, связанное с учетом распределения частиц по скоростям. Так, гипотеза I дает $\langle \delta \rangle = 3,22$ мкм (см. фиг. 3). Однако столь небольшое укрупнение частиц не может объяснить заметного возрастания энергетических потерь по сравнению с гидродинамическими моделями. Причина этого неожиданного на первый взгляд эффекта состоит в том, что в соответствии со статистической моделью значительная часть мелких частиц, для которых сила аэродинамического сопротивления f_i очень велика, движется с достаточно низкими скоростями. Если учесть, что сила f_i нелинейно зависит от скорости скольжения [2], то для этих фракций

$$\int_{u_{\infty}}^{u_0} g_i(u) f_i(u) d \ln u > \frac{G_i f_i(V_i)}{V_i} \quad (4.2)$$

Конечно, для крупных частиц знак неравенства (4.2) меняется на противоположный, но для них значения f_i невелики. Поэтому статистическая модель предсказывает более сильное обратное влияние частиц на газ (см. (2.11), (1.2)) и при прочих равных условиях он разгоняется меньше, что и приводит к увеличению потерь импульса. В табл. 2 представлены значе-

Таблица 2

Модель	$x=2,27$	2,77	4,8	11,8	26,8	41,8
А	0,599	0,751	0,893	1,064	1,19	1,234
Б	0,595	0,732	0,862	1,032	1,17	1,214

ния скорости газа для ряда сечений, рассчитанные на базе гидродинамической (с использованием гипотезы I) и статистической моделей.

При уменьшении концентрации данный эффект не столь значителен: так, при $z=0,7$ потери расчетного импульса равны 4,13 и 4,8% соответственно для гидродинамической и статистической моделей.

В заключение заметим, что при расчете по методу [7, 8] увеличение обратного влияния частиц не обнаруживается.

Автор признателен Ф. Г. Дериглазовой за помощь в проведении расчетов на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шрайбер А. А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техники. Комплексн. и спец. разделы механики. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1988. С. 3–80.
2. Стернин Л. Е., Маслов Б. Н., Шрайбер А. А., Подвысоцкий А. М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980.
3. Williams F. A. Progress in spray-combustion analysis // 8 Sympos. (Int.) on Combustion (Pasadena, Aug. 1960). Baltimore: Williams & Wilkins, 1962. P. 50–69.
4. Passarelli R. E., Srivastava R. C. A new aspect of snowflake aggregation theory // J. Atmos. Sci. 1979. V. 36. № 3. P. 484–493.
5. Sasyo Y., Matsuo T. Effects of the variations of falling velocities of snowflakes on their aggregation // J. Meteor. Soc. Jap. 1985. V. 63. № 2. P. 249–261.
6. Филиппов Г. А., Даскал Ю. И. О процессах взаимодействия частиц в двухфазных потоках // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1978. № 3. С. 144–152.
7. Бугов В. Г., Васенин И. М., Дьяченко Н. Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующих частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 33–39.
8. Васенин И. М., Архипов В. А., Бугов В. Г. и др. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
9. Шрайбер А. А. Статистическая модель движения ансамбля коагулирующих частиц // Пром. теплотехника. 1987. Т. 9. № 6. С. 19–26.