

УДК 532.529:532.517.4

© 1991 г.

И. Н. ГУСЕВ, Л. И. ЗАЙЧИК

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ В ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ ГАЗОДИСПЕРСНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Для определения степени вовлечения частиц в пульсационное движение несущего турбулентного потока корреляционные моменты, содержащие пульсации скорости и концентрации твердой фазы, должны быть связаны с характеристиками газовой фазы. В большинстве работ, например [1–3], соответствующие выражения получены в рамках локально-однородного приближения: вторые моменты пульсаций характеристик твердой фазы непосредственно выражаются через рейнольдсовы напряжения или коэффициент турбулентной вязкости газа в той же самой точке пространства. Локально-однородное приближение справедливо для относительно мелких частиц (время релаксации которых меньше характерного временного масштаба турбулентности) при отсутствии в потоке больших градиентов скоростей. Однако в пристеночной области течения подход, основанный на описании пульсационных характеристик частиц в локально-однородном представлении, может приводить к существенной погрешности. Это связано с тем обстоятельством, что, с одной стороны, течение в пристеночной области характеризуется большими градиентами осредненной скорости и турбулентной энергии газовой фазы, а с другой — частицы оказываются относительно более крупными (инерционными) вследствие уменьшения к стенке значения временного масштаба турбулентности.

Достаточно последовательный учет нелокальных эффектов, обусловленных инерционностью частиц и неоднородностью несущего потока, может быть осуществлен на основе решения системы уравнений для корреляционных моментов скорости твердой фазы, аналогичной цепочке уравнений Фридмана — Келлера в теории однофазных турбулентных течений [4]. Первые попытки использования уравнений переноса вторых моментов пульсаций скорости частиц для расчета движения примеси в струе и трубе содержатся в [5, 6]. В настоящей работе для моделирования динамики частиц в пристеночной области привлекаются уравнения для вторых и третьих моментов скорости твердой фазы; цепочка уравнений для моментов получается из кинетического уравнения для плотности вероятности распределения частиц в турбулентном потоке, построенного в [7].

1. Рассматривается движение твердых сферических частиц под действием силы вязкого взаимодействия с турбулентным газовым потоком, внешней массовой силы (например, силы тяжести) и случайной силы, вызывающей броуновскую диффузию. Массовая (и тем более объемная) концентрация частиц предполагается небольшой, поэтому обратным влиянием примеси на характеристики несущего потока и взаимодействием частиц друг с другом в результате столкновений можно пренебречь. Из уравнения движения одиночной частицы типа Ланжевена в предположении о гауссовом случайном поле скоростей турбулентного несущего потока и  $\delta$ -коррелированности броуновской силы получается уравнение для плотности вероятности частиц  $P$  в фазовом пространстве координат  $x_k$  и скоростей  $v_k$  [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \left( \frac{U_k - v_k}{\tau} + F_k \right) P = \\ = g \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial v_k} + \frac{f}{\tau} \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_k} + \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v_k \partial v_k} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $U_k$  и  $u_k'$  — осредненная и пульсационная составляющие скорости газа,  $F_k$  — внешняя массовая сила,  $\tau$  — время динамической релаксации

частицы,  $D$  — коэффициент броуновской диффузии,  $\langle u_i' u_k' \rangle$  — вторые одно-точечные одновременные моменты пульсаций скорости газа.

Коэффициенты вовлечения частиц в пульсационное движение несущего потока  $f$ ,  $g$  определяются главным образом структурой энергосодержащих турбулентных вихрей и имеют вид

$$f = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} \Psi(s) \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) ds, \quad g = \frac{T}{\tau} - f$$

$$\Psi(s) = \langle u_i'(t) u_j'(t+s) \rangle / \langle u_i'(t) u_j'(t) \rangle$$

Здесь  $\Psi(s)$  — двухвременная корреляционная функция пульсаций скоростей газа вдоль траектории частицы. В случае ступенчатой аппроксимации  $\Psi(s)$  выражения для коэффициентов вовлечения принимают вид [7]

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right), \quad g = \frac{T}{\tau} - 1 + \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \quad (1.2)$$

где  $T$  — время взаимодействия частицы с энергосодержащим вихревым образованием (турбулентным молеком), принимаемое в дальнейшем равным интегральному временному масштабу турбулентности.

При отсутствии турбулентных пульсаций ( $\langle u_i' u_j' \rangle = 0$ ) уравнение (1.1) переходит в известное уравнение Фоккера — Планка для броуновских частиц в ламинарном потоке.

Выведем из (1.1) уравнения для моментов. Интегрируя уравнение (1.1) по всему объему в пространстве скоростей, получаем уравнение баланса массы твердой фазы

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} C V_k = 0, \quad C = \int P dv, \quad V_k = \frac{1}{C} \int v_k P dv \quad (1.3)$$

Здесь  $C$  — объемная концентрация частиц,  $V_k$  — осредненная скорость твердой фазы. Умножая (1.1) на  $v_i$  и интегрируя по  $v$ , получаем уравнение баланса импульса твердой фазы

$$\frac{\partial C V_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + g \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial C}{\partial x_k} = C \left( \frac{U_i - V_i}{\tau} + F_i \right) \quad (1.4)$$

или с учетом (1.3)

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_i}{\tau} + F_i - \frac{D_{ik}}{\tau} \frac{\partial \ln C}{\partial x_k} \quad (1.5)$$

$$\langle v_i v_j \rangle = \frac{1}{C} \int v_i v_k P dv = V_i V_k + \langle v_i' v_k' \rangle, \quad D_{ik} = \tau (\langle v_i' v_k' \rangle + g \langle u_i' u_k' \rangle),$$

$$v_i' = v_i - V_i$$

Здесь  $\langle v_i' v_k' \rangle$  — тензор напряжений в твердой фазе,  $D_{ik}$  — тензор диффузии. Умножая (1.1) на  $v_i v_j$  и выполняя интегрирование по  $v$ , получаем уравнение для вторых моментов скорости

$$\frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle v_i v_j v_k \rangle}{\partial x_k} + g \left( \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial C V_j}{\partial x_k} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial C V_i}{\partial x_k} \right) =$$

$$= C \left[ \left( \frac{U_i}{\tau} + F_i \right) V_j + \left( \frac{U_j}{\tau} + F_j \right) V_i + \frac{2}{\tau} \left( f \langle u_i' u_j' \rangle + \frac{D}{\tau} \delta_{ij} - \langle v_i' v_j' \rangle \right) \right] \quad (1.6)$$

или с учетом (1.3), (1.5) уравнение для вторых моментов пульсаций скорости твердой фазы

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{D_{ik}}{\tau} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{D_{jk}}{\tau} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ & + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C \langle v_i' v_j' v_k' \rangle \right) = \frac{2}{\tau} \left( f \langle u_i' u_j' \rangle + \frac{D}{\tau} \delta_{ij} - \langle v_i' v_j' \rangle \right) \quad (1.7) \\ \langle v_i v_j v_k \rangle &= \frac{1}{C} \int v_i v_j v_k P dv, \quad \langle v_i' v_j' v_k' \rangle = \frac{1}{C} \int v_i' v_j' v_k' P dv \end{aligned}$$

Члены в левой части уравнения (1.7) описывают соответственно изменение во времени, конвективный перенос, порождение из осредненного движения и диффузию турбулентных напряжений в твердой фазе; члены в правой части (1.7) характеризуют генерацию и диссипацию пульсаций частиц в результате их взаимодействия с энергосодержащими турбулентными вихрями и за счет броуновского движения. Из уравнения (1.7) в предположении, что члены в левой его части несущественны, вытекает соотношение

$$\langle v_i' v_j' \rangle = f \langle u_i' u_j' \rangle + D \delta_{ij} / \tau \quad (1.8)$$

выражающее условие локального равновесия между генерацией пульсационной энергии частиц из турбулентной и тепловой энергии несущего потока и ее диссипации.

Тензор диффузии частиц в локально-однородном приближении с учетом (1.8) является суммой тензора турбулентной диффузии безынерционной примеси и коэффициента броуновской диффузии

$$D_{ij} = T \langle u_i' u_j' \rangle + D \delta_{ij}$$

Учет нелокальных эффектов за счет конвективного и диффузионного механизмов переноса, оказывающих существенное влияние на тензоры напряжений и диффузии частиц в пристеночной области, может быть выполнен на основе решения уравнения (1.6) или (1.7). Уравнение для третьих моментов скорости твердой фазы, определяющих диффузионный перенос в уравнении для вторых моментов, получается из (1.1) и имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C \langle v_i v_j v_k \rangle}{\partial t} + \frac{\partial C \langle v_i v_j v_k v_n \rangle}{\partial x_n} + g \left( \langle u_k' u_n' \rangle \frac{\partial C \langle v_i v_j \rangle}{\partial x_n} + \langle u_i' u_n' \rangle \frac{\partial C \langle v_j v_k \rangle}{\partial x_n} + \right. \\ & \left. + \langle u_j' u_n' \rangle \frac{\partial C \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_n} \right) = C \left[ \left( \frac{U_k}{\tau} + F_k \right) \langle v_i v_j \rangle + \left( \frac{U_j}{\tau} + F_j \right) \langle v_i v_k \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{3}{\tau} \langle v_i v_j v_k \rangle \right] + \frac{2C}{\tau} \left[ V_i \left( f \langle u_j' u_k' \rangle + \frac{D}{\tau} \delta_{jk} \right) + V_j \left( f \langle u_i' u_k' \rangle + \frac{D}{\tau} \delta_{ik} \right) + \right. \\ & \left. + V_k \left( f \langle u_i' u_j' \rangle + \frac{D}{\tau} \delta_{ij} \right) \right] \quad (1.9) \\ \langle v_i v_j v_k v_n \rangle &= \frac{1}{C} \int v_i v_j v_k v_n P dv \end{aligned}$$

2. В пристеночной области вследствие близкого к одномерному характеру течения (характеристики потока изменяются главным образом в перпендикулярном к поверхности направлении  $y$ ) представленная система уравнений значительно упрощается, в результате чего могут быть получены относительно простые решения. Из уравнений (1.3), (1.4), (1.6), (1.8) в стационарном случае для баланса массы и корреляций нормаль-

ных к стенке компонент следует

$$\frac{dCV_v}{dy} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{dC\langle v_v^2 \rangle}{dy} + g\langle u_v'^2 \rangle \frac{dC}{dy} = \frac{C}{\tau} (U_v - V_v + \tau F_v) \quad (2.2)$$

$$\frac{dC\langle v_v^3 \rangle}{dy} = \frac{2C}{\tau} \left[ (U_v + \tau F_v) V_v + f\langle u_v'^2 \rangle + \frac{D}{\tau} - \langle v_v^2 \rangle \right] \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC\langle v_v^4 \rangle}{dy} + 3g\langle u_v'^2 \rangle \frac{dC\langle v_v^2 \rangle}{dy} = \frac{3C}{\tau} \left[ (U_v + \tau F_v) \langle v_v^2 \rangle + \right. \\ \left. + 2V_v \left( f\langle u_v'^2 \rangle + \frac{D}{\tau} \right) - \langle v_v^3 \rangle \right] \quad (2.4) \end{aligned}$$

Такая постановка задачи предполагает наличие постоянного внешнего потока  $J_w$ , компенсирующего убыль частиц за счет осаждения на стенке ( $J_w = -C_w V_{yw}$ ). Уравнение (2.1) имеет интеграл  $CV_v = -J_w$ , с учетом которого уравнение (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} D_p \frac{dC}{dy} + \tau C \frac{d\langle v_v^2 \rangle}{dy} - C(U_v + \tau F_v) = J_w \quad (2.5) \\ D_p = \tau (\langle v_v^2 \rangle + g\langle u_v'^2 \rangle) \end{aligned}$$

Из (2.5) видно, что поток частиц обусловлен диффузией в результате градиента концентрации, миграцией вследствие неоднородности энергии частиц, движением газа и действием внешней силы.

Для замыкания уравнения (2.4) определим четвертый момент в соответствии с квазинормальной гипотезой Миллионщикова  $\langle v_v^4 \rangle = 3\langle v_v^2 \rangle^2$ . В этом случае из (2.4) с учетом (2.2) получается следующее выражение для третьего момента:

$$\langle v_v^3 \rangle = -D_p \frac{d\langle v_v^2 \rangle}{dy} + V_v \left[ \langle v_v^2 \rangle + 2 \left( f\langle u_v'^2 \rangle + \frac{D}{\tau} \right) \right] \quad (2.6)$$

Первое слагаемое в правой части (2.6) описывает диффузионный механизм переноса, вызванный градиентом энергии частиц, а второе обусловлено конвективным механизмом переноса. С учетом (2.6) из (2.3) получается замкнутое уравнение для второго момента

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left( D_p C \frac{d\langle v_v^2 \rangle}{dy} \right) + \frac{2C}{\tau} \left[ f\langle u_v'^2 \rangle + \frac{D}{\tau} - \langle v_v^2 \rangle \right] = \\ = \frac{2J_w}{\tau} (U_v + \tau F_v) - J_w \frac{d}{dy} \left[ \langle v_v^2 \rangle + 2 \left( f\langle u_v'^2 \rangle + \frac{D}{\tau} \right) \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

3. Рассмотрим постановку граничных условий на стенке. В предположении, что вероятность отскока частицы и последующего возвращения в поток  $\chi$  не зависит от скорости и что не происходит потери импульса частицы в нормальном направлении, плотность распределения на стенке подчинена следующему условию:

$$P_w(v_v) = \chi P_w(-v_v), \quad v_v > 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1$$

Такая форма граничного условия описывает только абсорбционные свойства поверхности и не позволяет непосредственно получить условия для моментов распределения. В [7, 8] предполагалось, что на стенке и

в ее окрестности распределение частиц по  $v_y$  близко к нормальному и соответствующие поправки находят из рядов теории возмущения. Аналогичный подход позволил определить граничное условие для броуновских частиц [9]. Другой путь связан с введением модельной функции распределения [10] и последующим определением необходимых коэффициентов либо из моментных уравнений, либо непосредственно из уравнения для  $P$ .

Воспользуемся гипотезой о бинормальном распределении

$$P_w(v_y) = A \exp\left(-\frac{v_y^2}{2\langle v_y^2 \rangle_w}\right), \quad A=n, \quad v_y < 0, \quad A=\chi n, \quad v_y > 0 \quad (3.1)$$

Такой вид распределения близок к полученному при численном решении одномерного уравнения Фоккера – Планка [11] и является частным случаем квазинормального. Заметим, что дисперсия распределения определяется не пульсациями несущей среды, а есть собственная характеристика частиц. Из следующей нормировки имеем

$$C_w = \int P_w dv_y, \quad n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\chi} \frac{C_w}{\sqrt{\langle v_y^2 \rangle_w}} \quad (3.2)$$

Моменты нормальной компоненты скорости, согласно (3.1), (3.2), определяются выражениями

$$v_{yw} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \langle v_y^2 \rangle_w^{1/2} \quad (3.3)$$

$$\langle v_y^3 \rangle_w = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \langle v_y^2 \rangle_w^{3/2} \quad (3.4)$$

Согласно (3.3), скорость осаждения зависит только от коэффициента отражения  $\chi$  и от энергии частиц на стенке  $\langle v_y^2 \rangle_w$ . Выражение (3.3) может рассматриваться как граничное условие для уравнения (2.5). С учетом (3.3), (3.4) из (2.6) получается граничное условие для уравнения (2.7)

$$D_{yw} \frac{d\langle v_y^2 \rangle}{dy} \Big|_w = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \langle v_y^2 \rangle_w^{1/2} \left[ \langle v_y^2 \rangle_w - 2 \left( f \langle u_y'^2 \rangle_w + \frac{D}{\tau} \right) \right] \quad (3.5)$$

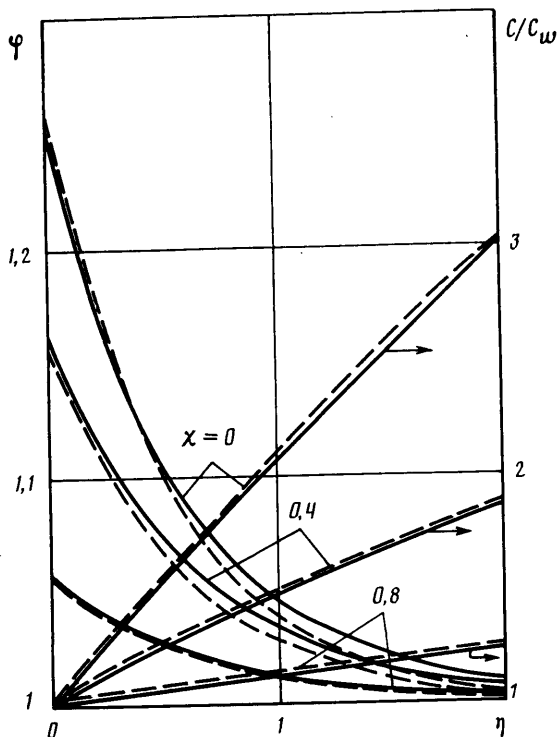
4. С целью выделения характерных эффектов динамики инерционных частиц в поперечном направлении рассмотрим решение уравнений (2.5), (2.7) с граничными условиями (3.3), (3.5) при  $U_y = F_y = 0$  в отдельных зонах пристеночной области течения.

*Броуновское движение в ламинарном диффузионном подслое.* Система уравнений (2.5), (2.7) при  $\langle u_y'^2 \rangle = 0$  в безразмерных переменных сводится к решению задачи

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{2J_0}{\varphi_w + J_0\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{2}{\varphi}(1-\varphi) = 0 \quad (4.1)$$

$$\varphi^{1/2} \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_w = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} (\varphi_w - 2), \quad \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

$$C = \frac{C_w}{\varphi} (\varphi_w + J_0\eta) \quad (4.2)$$



Фиг. 1

$$J_0 = \sqrt{\frac{\tau}{D}} \frac{J_w}{C_w} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \varphi_w^{1/2}, \quad \varphi = \frac{\tau \langle v_v^2 \rangle}{D}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\tau D}}$$

Для построения аналитического решения линеаризуем уравнение (4.1), положив в знаменателе последнего члена  $\varphi = \varphi_w$ . Тогда решением задачи будет

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 + \frac{\varphi_w(\varphi_w - 1)}{\varphi_w + J_0 \eta} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\varphi_w}} \eta\right) \\ \varphi_w &= \left(1 + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

На фиг. 1 показано сравнение решения (4.2), (4.3) (сплошные линии) с результатами численного решения уравнения (4.1) (штриховые линии): видно хорошее совпадение приближенного аналитического и точного численного решений.

На больших расстояниях от стенки концентрация броуновских частиц может быть определена из решения обычного уравнения диффузии  $d^2C/dy^2 = 0$  с граничным условием третьего рода  $(dC/dy)_w = C_w/\Lambda$ , эффективным образом учитывающим пристеночные эффекты. Экстраполяционная длина Милна  $\Lambda = a\sqrt{\tau D}$  может быть получена в результате срачивания при  $y \rightarrow \infty$  с решением (4.2), откуда  $a = \varphi_w/J_0$ . Для полностью поглощающей стенки ( $\chi = 0$ )

$$a = \sqrt{\frac{\pi(1+3/\sqrt{\pi})}{2(1+2/\sqrt{\pi})}} = 1,40$$

что достаточно близко к значению  $a=1,46$ , полученному путем прямого численного интегрирования уравнения Фоккера — Планка [11].

*Логарифмический слой турбулентного потока.* В этой зоне пристеночного турбулентного течения (области действия «логарифмического закона стенки» [4]) броуновским движением можно пренебречь, интенсивность турбулентных пульсаций газа постоянна  $\langle u_v'^2 \rangle = \beta u_*^2$ , а временной масштаб турбулентности пропорционален расстоянию от стенки  $T = \kappa y / u_*$ , где  $u_*$  — динамическая скорость;  $\beta \approx 1,1$ ;  $\kappa \approx 0,4$  — постоянная Прандтля — Кармана. Соотношение для  $T$  следует из выражения для коэффициента турбулентной диффузии безынерционной примеси в логарифмическом слое

$$D_t = \frac{v_t}{Sc_t} = \lim_{\tau/T \rightarrow 0} D_p = T \langle u_v'^2 \rangle = \frac{\kappa u_* y}{Sc_t}$$

где  $v_t = \kappa u_* y$  — коэффициент турбулентной вязкости,  $Sc_t = 1/\beta \approx 0,9$  — турбулентное число Шмидта.

С учетом этих соотношений и формул (1.2), (2.5), (2.7) с граничными условиями (3.3), (3.5) в безразмерных переменных принимают вид

$$\varepsilon \frac{d}{d\eta} \left\{ C_0 [\varphi + \eta - 1 + \exp(-\eta)] \frac{d\varphi}{d\eta} \right\} + \varepsilon \varphi_w' \frac{d}{d\eta} \{ \varphi + 2[1 - \exp(-\eta)] \} + 2C_0 [1 - \exp(-\eta) - \varphi] = 0 \quad (4.4)$$

$$[\varphi + \eta - 1 + \exp(-\eta)] \frac{dC_0}{d\eta} + C_0 \frac{d\varphi}{d\eta} = \varphi_w' \quad (4.5)$$

$$\eta=0: \quad \varepsilon^{1/2} \varphi_w' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \varphi_w^{1/2}, \quad C_0=1$$

$$\eta=\infty: \quad \varphi'=0$$

$$\varphi = \frac{\langle v_v'^2 \rangle}{\beta u_*^2}, \quad C_0 = \frac{C}{C_w}, \quad \eta = \frac{\kappa y}{\tau u_*}, \quad \varepsilon = \beta \kappa^2$$

Так как уравнение (4.4) содержит малый параметр при старшей производной, то задача может быть решена методом сращения асимптотических разложений. Внешним решением уравнения (4.4), получаемым при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и справедливым вдали от стенки, будет

$$\varphi_e = 1 - \exp(-\eta) \quad (4.6)$$

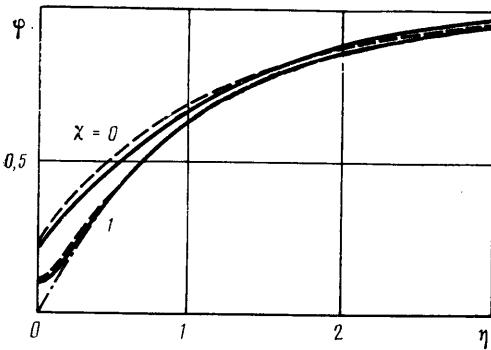
Физический смысл формулы (4.6) заключается в том, что она в локально-однородном приближении выражает энергию частиц через интенсивность пульсаций газа  $\langle v_v'^2 \rangle = f \langle u_v'^2 \rangle$ . Для построения внутреннего решения вблизи стенки  $\varphi_i$  перейдем к новым переменным  $\vartheta = \varphi_i / \varepsilon$ ,  $\xi = \eta / \varepsilon$ , в которых задача примет вид

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\xi^2} + \frac{2\vartheta_w'}{\vartheta_w' \xi + \vartheta_w} \left( \frac{d\vartheta}{d\xi} + 1 \right) + \frac{2}{\vartheta} (\xi - \vartheta) = 0 \quad (4.7)$$

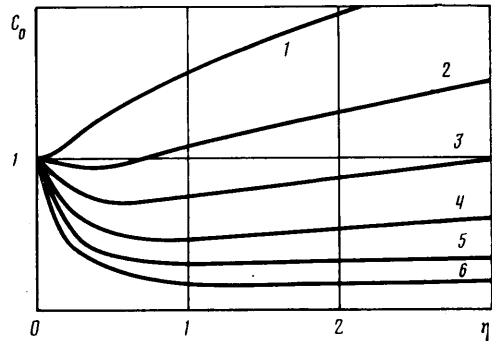
$$\vartheta_w' = \left. \frac{d\vartheta}{d\xi} \right|_w = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \vartheta_w^{1/2}, \quad \vartheta|_{\xi \rightarrow \infty} = \xi$$

$$C_0 = \frac{(\vartheta_w' \xi + \vartheta_w)}{\vartheta}$$

Граничное условие при  $\xi \rightarrow \infty$  получается из сращения с внешним решением (4.6). Для нахождения аналитического решения линеаризуем уравнение (4.7), положив в знаменателе последнего члена  $\vartheta = \vartheta_w$ ; в этом



Фиг. 2



Фиг. 3

случае

$$\vartheta = \xi + \frac{2\vartheta_w' \vartheta_w}{\vartheta_w' \xi + \vartheta_w} + \frac{\vartheta_w (\vartheta_w - 2\vartheta_w')}{\vartheta_w' \xi + \vartheta_w} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon \vartheta_w}} \xi\right) \quad (4.8)$$

$$\vartheta_w = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi}\right)^{-2}$$

Составное решение, объединяющее внешнее (4.6) и внутреннее (4.8) решения, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\eta} [1 - \exp(-\eta)] \left\{ \eta + \varepsilon \left[ \left( \frac{2\varphi_w' \varphi_w}{\varphi_w' \eta + \varphi_w} + \frac{\varphi_w (\varphi_w / \varepsilon - 2\varphi_w')}{\varphi_w' \eta + \varphi_w} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon \varphi_w}} \eta\right) \right] \right\} \quad (4.9)$$

$$\varphi_w = \varepsilon \vartheta_w, \quad \varphi_w' = \vartheta_w'$$

На фиг. 2 сопоставляется распределение (4.9) (сплошные линии) с результатами численного решения уравнений (4.4), (4.5) (штриховые линии) при  $\varepsilon = 0,18$ ; приближенное аналитическое и точное численное решения достаточно хорошо согласуются. С ростом расстояния от стенки параметр  $\tau/T = 1/\eta$ , характеризующий относительную инерционность частиц, уменьшается, т. е. частицы становятся менее инерционными, и поэтому их энергия стремится к значениям, определяемым локально-однородным решением (4.6) (штрихпунктирная линия). С приближением к стенке относительная инерционность частиц, напротив, увеличивается и поэтому наблюдаются значительные отклонения энергии частиц от решения (4.6). Ненулевые значения энергии частиц на стенке объясняются действием диффузионного и конвективного механизмов переноса пульсаций, существенных для инерционных частиц.

На фиг. 3 приведены распределения концентрации частиц, соответствующие значениям коэффициента отражения  $\chi = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$  (кривые 1-6), полученные численным решением уравнений (4.4), (4.5). Немонотонный характер распределения и повышенные значения концентрации частиц вблизи стенки для случаев неполного отражения вызван наличием двух конкурирующих механизмов переноса частиц: турбулентной диффузии и миграции (второй член в левой части уравнения (4.5)), приводящей к скоплению частиц в областях с низким уровнем турбулентных пульсаций.

*Пристеночная область, включающая вязкий подслой.* В качестве аппроксимации пульсационной структуры несущего потока примем про-



стейшую двухзонную модель, состоящую из вязкого подслоя с нулевой интенсивностью пульсаций и турбулентной области с постоянной интенсивностью пульсаций, т. е.

$$\langle u_v'^2 \rangle = \beta u_*^2 H(y - \delta)$$

где  $\delta$  — толщина вязкого подслоя,  $H(y)$  — функция Хевисайда. Временной масштаб турбулентности на расстоянии от стенки порядка  $\delta$  может быть принят постоянным  $T = \alpha \delta / u_*$ ,  $\alpha \sim 1$ . В этом случае задача расчета распределений характеристик частиц в поперечном направлении без учета броуновского движения примет вид

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ C_0 (\varphi + gH(\eta-1)) \frac{d\varphi}{d\eta} \right\} + \varphi_w' \frac{d}{d\eta} [\varphi + 2fH(\eta-1)] + \frac{2C_0}{\tau_0^2} [fH(\eta-1) - \varphi] = 0 \quad (4.10)$$

$$[\varphi + gH(\eta-1)] \frac{dC_0}{d\eta} + C_0 \frac{d\varphi}{d\eta} = \varphi_w' \quad (4.11)$$

$$\eta=0: \quad \varphi_w' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\chi}{1+\chi} \frac{\varphi_w^{1/2}}{\tau_0}, \quad C_0=1$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \varphi' = 0$$

$$\varphi = \frac{\langle v_v'^2 \rangle}{\beta u_*^2}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \tau_0 = \frac{\tau u_* \beta^{1/2}}{\delta}, \quad f = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha \beta^{1/2}}{\tau_0}\right)$$

$$g = \frac{\alpha \beta^{1/2}}{\tau_0} - f, \quad C_0 = \frac{C}{C_w}$$

Ограничимся решением уравнений (4.10), (4.11) для случая отражающей частицы стенки ( $\chi=1$ ). В области  $0 < \eta < 1$  уравнение (4.10) принимает вид

$$\varphi \left( \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \frac{2}{\tau_0^2} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) с учетом граничного условия  $\varphi_w' = 0$  имеет два решения

$$\varphi = 0, \quad 0 < \eta < \eta_*, \quad \varphi = (\eta - \eta_*)^2 \tau_0^{-2}, \quad \eta_* < \eta < 1 \quad (4.13)$$

$$\varphi = \varphi_w + \eta^2 / \tau_0^2 \quad (4.14)$$

В области  $1 < \eta < \infty$  задача (4.10), (4.11) сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \frac{2(f-\varphi)}{\tau_0^2(\varphi+g)} = 0 \quad (4.15)$$

Полагая в знаменателе второго члена (4.15)  $\varphi = \varphi_1$  (где  $\varphi_1$  — значение  $\varphi$  при  $\eta=1$ ), получим приближенное решение в виде

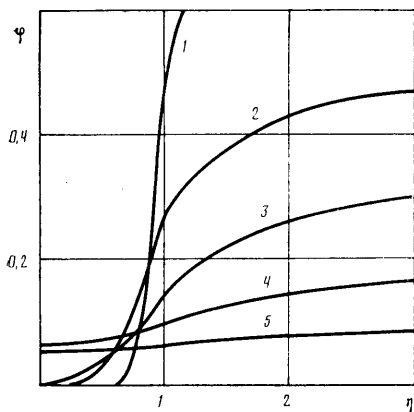
$$\varphi = (\varphi_1 - f) \exp\left[-\sqrt{\frac{2}{\tau_0^2(\varphi_1 + g)}}(\eta - 1)\right] + f \quad (4.16)$$

Из выражений (4.13), (4.16), дополненных следующими условиями сшивки, определяем

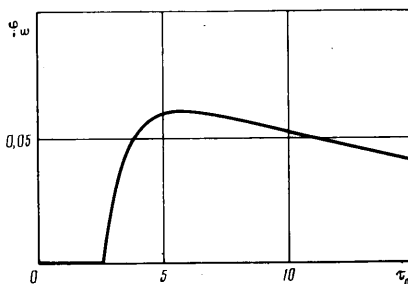
$$\varphi|_{1+0} = \varphi|_{1-0} = \varphi_1$$

$$(\varphi_1 + g) \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{1+0} = \varphi_1 \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{1-0} \quad (4.17)$$

$$\sqrt{(\varphi_1 + g)(f + \varphi_1)} = \sqrt{2\varphi_1^3}, \quad 1 - \eta_* = \sqrt{\varphi_1} \tau_0 \quad (4.18)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Аналогично для случая ненулевых пульсаций по стенке из (4.14), (4.16) совместно с условиями (4.17) получаем

$$\sqrt{\overline{(\varphi_1 + g)}} (f - \varphi_1) = \frac{2^{1/2}}{\tau_0} \varphi_1, \quad \varphi_w = \varphi_1 - \frac{1}{\tau_0^2} \quad (4.19)$$

На фиг. 4 представлены распределения интенсивности пульсаций скорости частиц в соответствии с решениями (4.13), (4.16), (4.18) и (4.14), (4.16), (4.19) при  $\alpha\beta^{1/2} = 1$  (кривые 1–5 соответствуют  $\tau_0 = 0,5; 1,5; 2,62; 5; 10$ ). Зависимость интенсивности пульсаций на стенке  $\varphi_w$  от параметра инерционности частиц  $\tau_0$  приведена на фиг. 5. Значение  $\tau_0 = 2,62$  является точкой перехода от одного типа решения к другому:  $\tau_0 < 2,62$  в области  $0 < \eta < 1$  имеет место решение (4.13), а при  $\tau_0 > 2,62$  — решение (4.14).

Таким образом, пульсационная энергия мелких частиц в вязком подслое равна нулю, а интенсивность пульсаций инерционных частиц в вязком подслое и на самой стенке отлична от нуля. Эффект наличия пульсаций скорости твердой фазы в вязком подслое мог быть получен только на основе нелокальной теории и объясняется диффузионным механизмом переноса пульсаций из турбулентной области потока, обусловленным инерционностью частиц.

В заключение отметим, что в реальных условиях в зависимости от размера частиц на первый план выступает одна из трех рассмотренных подобластей. Крупные частицы, для которых структура течения вблизи стенки несущественна, подчиняются закономерностям, отмеченным выше. Частицы меньших размеров, двигаясь по направлению к границе, не сохраняют информацию о ядре потока и их поведение определяется характером изменения пульсаций несущей фазы в пристеночной области. Наконец, при описании наиболее мелких частиц в рассмотрение должны быть включены эффекты, обусловленные броуновской диффузией.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.
2. Chen C. P., Wood P. E. Turbulence closure modeling of the dilute gas-particle axisymmetric jet // AIChE Journal. 1986. V. 32. № 1. P. 163–166.
3. Mostafa A. A., Mongia H. C. On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1987. V. 30. № 12. P. 2583–2593.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.

5. Милоевич Д., Солоненко О. П., Крылов Г. М. Сравнительный анализ некоторых моделей турбулентного переноса инерционных частиц // Процессы переноса в одно- и двухфазных средах. Новосибирск.: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1986. С. 70–80.
6. Кондратьев Л. В. Структура турбулентного течения газозвеси в пристеночной области трубы // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 55. № 6. С. 1029–1030.
7. Деревич И. В., Зайчик Л. И. Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
8. Деревич И. В., Зайчик Л. И. Граничное условие для уравнения диффузии частиц в неоднородном потоке // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 55. № 5. С. 735–739.
9. Menon S. V. G., Shani D. C. Derivation of the diffusion equation and radiation boundary condition from the Fokker – Planck equation // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. № 6. P. 3832–3834.
10. Harris S. Steady, one-dimensional Brownian motion with an absorbing boundary // J. Chem. Phys. 1981. V. 75. № 6. P. 3103–3106.
11. Menon S. V. G., Kumar V., Sahni D. C. Green's function approach to the solution of the time dependent Fokker – Planck equation with an absorbing boundary // Physica. 1986. V. 135A. № 1. P. 63–79.

Москва

Поступила в редакцию  
18.I.1990