**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1991**

УДК 532.51:537.84

А. В. СОРОКИН

ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В САМОСОГЛАСОВАННОМ СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Одним из распространенных режимов действия многих лабораторных и промышленных магнитогидродинамических (МГД) установок, использующих в качестве рабочей среды жидкие металлы, является режим, для которого число Альфвена A, выражающее отношение плотностей магнитной и кинетической энергии, значительно превышает единицу. Например, для типичного МГД-устройства [1] с характерным размером рабочей зоны 0,1 м, скоростью среды 1 м/с и индукцией магнитного поля 1 T (среда – расплавленный натрий при температуре 330° С) $A \simeq 900$. Для упрощения исследования процессов в таких устройствах применимо приближение сильного магнитного поля, предложенное в [2] для описания некоторых типов гидродинамических течений бездиссипативной плазмы в магнитном поле.

В настоящей работе подход к анализу самосогласованной магнитогидродинамической задачи в указанном асимптотическом приближении распространен на случай несжимаемой жидкости с конечной электропроводностью. Рассматривается редуцированная замкнутая система МГД-уравнений, получаемая из полной модели в нулевом порядке по малому параметру A^{-1}, в котором магнитное поле является бессиловым. Исследуется свободная диффузия бессилового магнитного поля с постоянным коэффициентом α пропорциональности между плотностью тока и магнитной индукцией в пространственно неограниченной жидкости и определяются кинематические свойства ее поля скорости, в котором бессиловой характер магнитного поля не нарушается в процессе затухания. Показано, что весь класс таких полей скорости представлен группой твердотельных движений жидкости.

1. Постановка задачи. Изотермическое движение невязкой несжимаемой жидкости с постоянной электропроводностью σ в магнитном поле описывается безразмерными МГД-уравнениями [1, 3]

$$\frac{1}{A}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla p\right)+\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}=0$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})+\frac{\Delta\mathbf{B}}{\mathrm{Re}_m} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$$A=\frac{B_*^2}{\mu_0\rho v_*^2},\qquad \mathrm{Re}_m=\frac{l_*v_*}{\eta},\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)$$

Здесь l_*, v_*, B_* – масштабы длины, скорости и магнитной индукции соответственно, $\eta=(\mu_0\sigma)^{-1}$ – магнитная вязкость. Предполагается, что жидкость с магнитным полем заполняет неограниченное пространство, причем величины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ на бесконечности могут быть отличными от нуля.

Магнитное поле первоначально создается протекающими в среде токами, индуцируемыми сторонними источниками, которые отключаются в момент времени $t=0$. Ставится задача исследования свободной диффузии магнитного поля и характера поля скорости движения жидкости при $t>0$ в приближении сильного магнитного поля. Начальные условия, необходимые для того, чтобы решение системы (1.1) в данном приближении было полностью определено, обсуждаются ниже (разд. 4).

Следуя [2], будем называть сильным магнитное поле, для которого $A \gg 1$, и искать решение (1.1) в форме $y = y^{(0)} + A^{-1} y^{(1)} + A^{-2} y^{(2)} + \ldots$

Ограничимся рассмотрением уравнений нулевого порядка по A^{-1}, имеющих вид

$$
\begin{gathered}
\operatorname{rot} \mathbf{B}^{(0)} = \alpha \mathbf{B}^{(0)} \\
\frac{\partial B^{(0)}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}^{(0)}) + \frac{\Delta \mathbf{B}^{(0)}}{\mathrm{Re}_m} \\
\operatorname{div} \mathbf{B}^{(0)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}^{(0)} = 0 \\
\mathbf{B}^{(0)} \left(\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} + \nabla p^{(0)} \right) = 0
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Здесь $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$ — скаляр; в дальнейшем верхний индекс опускается. Первое уравнение (1.2) означает, что в нулевом порядке по A^{-1} магнитное поле является бессиловым. Согласно третьему уравнению (1.2), $\mathbf{B} \nabla \alpha = 0$, т. е. линии бессилового поля лежат на поверхностях $\alpha = \mathrm{const}$.

Уравнения (1.2), кроме последнего, образуют замкнутую подсистему для нахождения бессиловой составляющей магнитного поля и соответствующего ей поля скорости движения среды. Первое уравнение (1.2) переопределяет эту подсистему по магнитному полю, что формально отвечает смыслу приближения $A \gg 1$. Как показано ниже, несмотря на то, что магнитное поле нулевого порядка не оказывает прямого воздействия на движение жидкости, именно его бессиловой характер обусловливает вид этого движения. Последнее уравнение (1.2), получаемое после умножения первого уравнения (1.1) скалярно на $\mathbf{B}$ [4], отделяется и служит для вычисления гидродинамического давления p; в последующем эта часть задачи не обсуждается.

2. О неподвижных линиях бессилового магнитного поля. Пусть в размерном виде $\alpha = \mathrm{const}$, тогда любое решение первого уравнения (1.2) автоматически удовлетворяет требованию соленоидальности. При этом можно положить $l_* = \alpha^{-1}$ и определять магнитное число Рейнольдса как $\mathrm{Re}_m = (\alpha^2 \eta t_*)^{-1}$, $t_* = l_* / v_*$.

В процессе диффузии бессилового магнитного поля с $\alpha = \mathrm{const}$ в неподвижной однородно проводящей среде происходит его экспоненциальное затухание без изменения начальной конфигурации [5]. Рассмотрим, существуют ли решения уравнений (1.2) подобного типа при стационарном течении жидкости

$$
\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \exp(\gamma t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{2.1}
$$

Применяя к первому уравнению (1.2) при $\alpha = 1$ операцию rot, находим, что $\mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}$. Учитывая это и подставляя (2.1) во второе уравнение (1.2), приводим его к выражению

$$
\varkappa \mathbf{b} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}), \quad \varkappa = \gamma + \mathrm{Re}_m^{-1} \tag{2.2}
$$

При $\mathbf{v} = 0$ имеем $\gamma = -\mathrm{Re}_m < 0$ — декремент затухания бессилового поля и неподвижной среде.

В силу равенства $\mathbf{b} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$ уравнение (2.2) после взятия rot^{-1} можно переписать в виде

$$
\mathbf{v} \times \mathbf{b} - \varkappa \mathbf{b} = \nabla \chi \tag{2.3}
$$

В обсуждаемом случае для векторного $\mathbf{F}$ и скалярного Φ электромагнитных потенциалов должны быть использованы представления, аналогичные (2.1)

$$
[\mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{x})] = [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})] \exp(\gamma t)
$$

причем по определению $\mathbf{b}=\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Как легко видеть, при $\alpha=1$ имеет место соотношение $\mathbf{b}=\mathbf{f}+\nabla\psi$, где $\psi(\mathbf{x})$ – некоторая гармоническая функция, поэтому (2.3) представляет собой с точностью до экспоненциального множителя выражение закона Ома, в котором $\chi=\varphi-\gamma\psi$. При известных $\mathbf{b}$, χ это выражение определяет поперечную к линиям магнитного поля составляющую скорости среды $\mathbf{u}_\perp=(\mathbf{b}\times\nabla\chi)/b^2$. Предельная компонента скорости может быть затем найдена с помощью предпоследнего уравнения (1.2).

Умножая (2.3) скалярно на b, получаем $\partial\chi/\partial l=-\varkappa b$, где слева стоит производная от функции χ по направлению линий магнитного поля. Отсюда следует, что если, например, на поверхности S с радиус-векторами точек $\mathbf{x}_S$, ограничивающей произвольный объем жидкости с бессиловым магнитным полем, задано распределение функции χ, то значения χ внутри объема вычисляются согласно формуле

$$\chi(\mathbf{x})=-\varkappa\int\limits_{\mathbf{x}_S}^{\mathbf{x}} b\,dl+\chi(\mathbf{x}_S) \tag{2.4}$$

в которой интегрирование производится вдоль магнитной линии.

Предположим, что область бессилового поля внутри S содержит хотя бы одну замкнутую ненулевую линию. Этот случай чрезвычайно распространен вследствие тороидальной геометрии даже простейших замкнутых магнитных поверхностей бессилового поля, среди которых можно указать «рациональные» поверхности с расположенными на них магнитными линиями, замыкающимися на себя после конечного числа обходов малой и большой осей торов [6, 7]. Из условия однозначной определенности величины χ при интегрировании в (2.4) вдоль данной замкнутой линии должно быть

$$\oint b\,dl=0$$

что невозможно, так так операция интегрирования аддитивна и в каждой точке линии $bdl>0$ (при направлении обхода линии, совпадающем с направлением поля).

Это означает, что задача о квазистационарной эволюции бессилового магнитного поля с $\alpha=\text{const}$ не имеет решений вида (2.1), справедливых во всей области определения уравнений (1.2). Следовательно, в стационарно движущейся проводящей жидкости бессиловая структура поля вблизи неподвижных замкнутых магнитных линий нарушается. Это свойство замкнутых линий бессилового поля в идеально проводящей среде отмечено в [8]; вместе с тем ниже показано, что в случае конечной электропроводности признак замкнутости является вторичным и причина такого нарушения имеет более общий характер.

3. Лагранжево решение для магнитного поля. Перейдем к лагранжевым переменным, в которых: траектории частиц жидкости, описывающие движение при $t\geqslant0$ в неподвижной системе координат $(X_1, X_2, X_3)=\{X_i\}$, задаются выражениями $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, причем $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0)$; все зависимые величины задачи также считаются функциями времени t и лагранжевых координат $\mathbf{x}_0=\{x_{0i}\}$; вводится тензор перехода от эйлеровых координат к лагранжевым $D_{ij}(t, \mathbf{x}_0)=\partial x_i(t, \mathbf{x}_0)/\partial x_{0j}$ (здесь и далее все индексы при переменных, обозначенные малыми латинскими буквами, пробегают значения 1, 2, 3). Временно отвлекаясь от допущения о несжимаемости жидкости, запишем компоненты второго уравнения (1.2) с привлечением первого равенства этой системы в новых переменных

$$\frac{dB_i}{dt}-\frac{\partial v_i}{\partial x_{0j}}D_{jk}^{-1}B_k=\frac{\varepsilon_{ijk}}{\mathrm{Re}_m}\frac{\partial\alpha}{\partial x_{0l}}D_{lk}^{-1}B_j-B_i\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{\mathrm{Re}_m}\right) \tag{3.1}$$

Здесь D — определитель матрицы D_{ij}, $D_{ij}^{-1}=\partial x_{0i}/\partial x_j$, все величины отнесены к произвольной жидкой частице.

Образуя векторное произведение с участием выражения (3.1) и компонент B_i вектора $\mathbf{B}$, получаем

$$\varepsilon_{ipq}\left(\frac{dB_p}{dt}-\frac{\partial v_p}{\partial x_{0j}}D_{jk}^{-1}B_k\right)B_q=\frac{B^2}{\mathrm{Re}_m}D_{li}^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial x_{0l}} \tag{3.2}$$

При $\alpha(t, \mathbf{x}_0)=\alpha(0, \mathbf{x}_0)=1$, когда правая часть уравнения (3.2) обращается в нуль, оно представляет собой необходимое и достаточное условие сохраняемости векторных линий поля $\mathbf{B}$ [9, с. 335]. Оказывается, что линии бессилового магнитного поля с $\alpha=\mathrm{const}$ «вморожены» в движущуюся сжимаемую в общем случае жидкость даже при том, что она обладает конечной электропроводностью.

С учетом этого преобразуем систему (1.2) без последнего уравнения, полагая в ней $\alpha=1$, к виду

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ijk}D_{lj}^{-1}\frac{\partial B_k}{\partial x_{0l}}-B_i=0,\qquad D(t,\mathbf{x}_0)=D(0,\mathbf{x}_0)=1\\ \frac{de_{Bi}}{dt}-\frac{\partial v_i}{\partial x_{0j}}D_{jk}^{-1}e_{Bk}=0,\qquad \frac{dB}{dt}+\frac{B}{\mathrm{Re}_m}=0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $B_i(t, \mathbf{x}_0)=B(t, \mathbf{x}_0)e_{Bi}(t, \mathbf{x}_0)$, где $B=|\mathbf{B}|$, $\mathbf{e}_B$ — единичный вектор, касательный к линиям магнитного поля, условие $\partial B_i/\partial x_i=0$ выполняется тождественно при $t\geqslant 0$.

Задание начальных условий для двух последних уравнений (3.3) определяет поле $\mathbf{B}_0$ в частице жидкости при $t=0$. При этом бездивергентное поле $\mathbf{B}(t, \mathbf{x}_0)$, составленное из решений (см., например, [10]) этих уравнений, имеет выражение

$$B_i(t,\mathbf{x}_0)=D_{ij}(t,\mathbf{x}_0)B_{0j}(0,\mathbf{x}_0)\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{Re}_m}\right) \tag{3.4}$$

Вычисление потока Ψ магнитного поля (3.4) через произвольную жидкую поверхность S, элемент которой при $D=1$ равен $dS_i(t, \mathbf{x}_0)=D_{ji}^{-1}(t, \mathbf{x}_0)\,dS_{0j}(0, \mathbf{x}_0)$, дает

$$\Psi(t)=\Psi_0\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{Re}_m}\right),\qquad \Psi_0=\int\limits_{S_0}B_{0i}\,dS_{0i}$$

Данная формула указывает на неполную вмороженность бессилового магнитного поля с $\alpha=\mathrm{const}$ в среду с конечной электропроводностью по сравнению с поведением произвольного магнитного поля в идеально проводящей жидкости. Однако, как и в последнем случае, магнитные линии такого бессилового поля неподвижны относительно жидкости. С одной стороны, это, согласно доказанной в [11] теореме, исключает возможность зависимости $\alpha=\alpha(t)$, при которой из (3.2) также формально получается условие сохраняемости магнитных линий, с другой — служит обоснованием того, что постоянная времени убывания потока $\tau=\mathrm{Re}_m t_*=(\alpha^2\eta)^{-1}$ совпадает с величиной, обратной декременту затухания поля в покоящейся среде.

Этот результат объясняет установленную выше особенность неподвижных замкнутых линий бессилового поля в неидеальной среде: поскольку каждая магнитная линия в любой момент времени состоит из одних и тех же движущихся жидких частиц, то в произвольном (не обязательно стационарном) потоке поле вообще не имеет неподвижных линий.

Обсудим вопрос о начальных условиях для уравнений (3.3). В решении (3.4) для магнитного поля информация о движении жидкости входит через тензор D_{ij}, причем по определению всегда $D_{ij}(0, \mathbf{x}_0)=\delta_{ij}$ независимо от вида поля скорости течения. Это означает, что начальные условия для скорости (или, при лагранжевом подходе, для траекторий жидких частиц) задаются произвольно относительно решения задачи по магнитному полю и, в частности, не зависят от выбора его начального распределения $\mathbf{B}_0$. Магнитное поле же при $t=0$ должно удовлетворять первому уравнению (3.3) с $D_{li}^{-1}=\delta_{li}$, в принципе не содержащему производных по времени, поэтому в качестве $\mathbf{B}_0$ может быть взято любое стационарное решение первого уравнения (1.2) при $\alpha=1$.

4. Кинематическое соотношение для тензора D_{ij}. Первое уравнение (3.3), выражающее равенство векторов плотности тока и магнитной индукции в каждой жидкой частице в любой момент времени $t>0$, при известном решении (3.4) представляет условие, накладываемое на движение среды и необходимое для того, чтобы при движении бессиловой характер магнитного поля сохранялся. Подставим (3.4) в это уравнение и умножим его слева на D_{pi}^{-1}. Используя следующие тензорные тождества [10], приведем полученное при этом равенство к виду (4.1)

$$\varepsilon_{kij}D_{pi}^{-1}D_{lj}^{-1}=\varepsilon_{plq}D_{kq}, \quad D_{pi}^{-1}D_{ij}=\delta_{pj}$$

$$\varepsilon_{plq}D_{kq}\frac{\partial}{\partial x_{0l}}D_{kn}B_{0n}-B_{0p}=0 \tag{4.1}$$

При $t=0$ имеем $B_{0p}=\varepsilon_{plq}\partial B_{0q}/\partial x_{0l}$, поэтому вместо (4.1) получим

$$\varepsilon_{plq}\frac{\partial}{\partial x_{0l}}(C_q-B_{0q})-\varepsilon_{plq}\frac{\partial D_{kq}}{\partial x_{0l}}D_{kn}B_{0n}=0 \tag{4.2}$$

$$C_q=D_{kn}D_{kq}B_{0n}$$

Тензор $\partial D_{kq}/\partial x_{0l}$ симметричен по индексам l, q и его свертка с тензором ε_{plq} дает нуль. Из равенства (4.2) без второго слагаемого в левой части следует

$$C_q-B_{0q}=\frac{\partial h}{\partial x_{0q}}$$

где h — произвольная скалярная функция.

Так как потенциальная составляющая поля не вносит вклада в формирование токового распределения бессиловой конфигурации, то ее можно опустить и полагать $C_q=B_{0q}$, откуда $D_{ki}D_{kj}=\delta_{ij}$. По определению тензора D_{ij}^{-1}, обратного D_{ij}, имеем также $D_{ik}^{-1}D_{kj}=\delta_{ij}$. Вычитая это равенство из предыдущего, с учетом дистрибутивности скалярного произведения тензоров запишем $(D_{ki}-D_{ik}^{-1})D_{kj}=0$. Поскольку, согласно второму выражению (3.3), $D\neq0$, последнее соотношение показывает, что $D_{ki}=D_{ik}^{-1}$. Но обратный тензор коммутирует с прямым в произведении, дающем единичный тензор δ_{ij}; следовательно, получаем

$$D_{ik}(t, \mathbf{x}_0)D_{jk}(t, \mathbf{x}_0)=\delta_{ij} \tag{4.3}$$

5. Описание движения среды. Введем в окрестности любой точки жидкости локальную систему координат $\{\xi_i\}$ с началом O в этой точке, оси которой при $t=0$ совпадают по направлению с осями глобальной системы $\{X_i\}$; при $t>0$ точка O перемещается вместе с находящейся в ней жидкой частицей. Изменение выделенного в окрестности точки O бесконечно малого объема среды в процессе его движения можно описать с помощью такого локального непрерывного преобразования пространства, в результате которого вектор $\mathrm{d}\mathbf{x}$ расстояния между двумя бесконечно близкими частицами в подвижной системе $\{\xi_i\}$ сохраняется: $\mathrm{d}\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)=$

$=\mathrm{d}\mathbf{x}_0$. Это вытекает из формулы

$$\mathrm{d}x_i(t,\ \mathbf{x}_0)=D_{ij}(t,\ \mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}x_{0j} \tag{5.1}$$

которая в такой интерпретации выражает преобразование компонент вектора $\mathrm{d}\mathbf{x}$ из подвижной системы координат в неподвижную с тензором перехода D_{ij}.

То, что тензор D_{ij} с $D>0$ удовлетворяет кинематическому условию (4.3), означает, что в рассматриваемом случае локальное преобразование пространства сводится к жесткому повороту подвижных систем координат [9, с. 317], вследствие чего ориентация осей $\{\xi_i\}$ относительно $\{X_i\}$ в течение всего времени движения жидкости может быть определена лишь тремя независимыми углами поворота. Это соответствует вращению каждого элементарного объема жидкости как целого (без деформации) вокруг точки O; при этом угловые скорости вращения всех элементарных объемов должны быть одинаковыми, в противном случае при таком движении сплошность среды неизбежно нарушается.

Из сказанного следует, что компоненты тензора D_{ij} не зависят от лагранжевых координат x_{0i}, тогда уравнения траекторий частиц жидкости находятся интегрированием выражения (5.1) в виде

$$x_i(t,\ \mathbf{x}_0)=D_{ij}(t)\,x_{0j}+R_i(t) \tag{5.2}$$

$$R_i(t)=\int\limits_0^t V_i\,d\zeta$$

Формула (5.2) описывает твердотельное движение в неподвижной системе координат $\{X_i\}$, $\mathbf{V}(t)$ — поступательная скорость переноса жидкости как целого.

Скорость отдельных жидких частиц, движущихся как точки твердого тела следующая:

$$v_i(t,\ \mathbf{x}_0)=\Omega_{ij}(t)\,x_{0j}+V_i(t) \tag{5.3}$$

$$\Omega_{ij}(t)=\varepsilon_{ikm}\omega_k(t)\,D_{mj}(t)$$

где ω_i — компоненты угловой скорости вращения жидкости в системе $\{X_i\}$. Если эта скорость задана, то величины находятся из уравнения $\mathrm{d}D_{ij}/\mathrm{d}t=$ $=\Omega_{ij}$, которое имеет решение [9]

$$D_{ij}(t)=\delta_{ij}+\frac{\sin I}{I}\,\varepsilon_{ikj}I_k+\frac{1-\cos I}{I^2}\,\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnj}I_lI_n$$

$$I_i(t)=\int\limits_0^t \omega_i\,d\zeta,\qquad I=\Bigl(\sum_i I_i^2\Bigr)^{1/2}$$

Приведем в размерном виде выражение для бессилового магнитного поля с $\alpha=\mathrm{const}$ в жидкости, движущейся по закону (5.2), полученное из (3.4) после перехода к эйлеровым переменным

$$B_i(t,\mathbf{x})=D_{ij}(t)\,B_{0j}\Bigl(\Bigl\{D_{kl}(t)\Bigl[x_k-\int\limits_0^t V_k\,d\zeta\Bigr]\Bigr\}\Bigr)\exp(-\alpha^2\eta t)$$

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{Z})$, $\mathbf{Z}=\{\ldots\}$ — любое решение первого уравнения (3.3) при $t=0$.

6. Заключение. Основной вывод работы состоит в том, что единственным видом движений несжимаемой проводящей жидкости, сохраняющих бессиловой характер магнитного поля с $\alpha=\mathrm{const}$, является твердотельное движение. Такое бессиловое поле оказывается принципиально недеформируемым, в движущейся среде невозможна непрерывная перестройка поля с переходом от одной бессиловой конфигурации к другой (см. также вывод о «неэволюционности» бессилового поля в идеальной плазме [8]). Следовательно, если поле скорости несжимаемого движения жидкости с конечной электропроводностью в сильном магнитном поле, порождаемом протекающими в жидкости токами, отличается от (5.3), то основная бессиловая составляющая поля при $t>0$ характеризуется пространственно неоднородным распределением α.

Необходимо иметь в виду, что в условиях свободной диффузии магнитного поля временно́й диапазон, в котором выполняется приближение сильного магнитного поля, определяется временем затухания его основной составляющей, т. е. постоянной τ. При $\mathrm{Re}_m\gtrsim 1$ это приближение справедливо в течение всего времени рассматриваемого процесса; при $\mathrm{Re}_m<1$ условие его применимости нарушается раньше и в интервале $\tau<t\leqslant t_*$ магнитное поле не обязательно остается бессиловым даже в том случае, если движение жидкости по-прежнему описывается выражениями (5.2).

Уравнения (1.2) сами по себе позволяют определить лишь кинетические свойства движения жидкости в нулевом порядке по малому параметру A^{-1}, оставляя за рамками рассмотрения вопрос об источниках движения с такими свойствами. На среду воздействуют силы Лоренца, появляющиеся в первом порядке по A^{-1}, когда уравнение движения жидкости имеет вид

$$\mathbf{B}^{(0)}\times(\operatorname{rot}\mathbf{B}^{(1)}-\alpha\mathbf{B}^{(1)})=\frac{dv^{(0)}}{dt}+\nabla p^{(0)}$$

т. е. поле $\mathbf{B}$ уже не является чисто бессиловым. Пусть при $t=0$ условие $A\gg 1$ выполняется, при этом могут быть заданы ненулевые начальные значения $\mathbf{V}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0$ или жидкость в начальный момент времени может покоиться; тогда при $t>0$ электродинамические силы первого порядка должны либо поддерживать в течение времени $t\leqslant\tau$ движение с необходимым полем скорости, компенсируя, например, слабую диссипацию вследствие вязкого трения, либо быть причиной такого движения. Однако в обоих случаях вследствие малости ускорения жидкости продолжает оставаться справедливым условие $A\gg 1$, т. е. задача в первом порядке приближения сильного магнитного поля оказывается динамически самосогласованной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брановер Г. Г., Цинобер А. Б.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 379 с.
2. *Сомов Б. В., Сыроватский С. И.* Гидродинамические течения плазмы в сильном магнитном поле // Тр. Физ. ин-та. АН СССР. 1974. Т. 74. С. 14–72.
3. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
4. *Горбачев В. С., Кельнер С. Р.* Движение плазмы в нестационарном сильном магнитном поле // Физика солнечной плазмы. М.: Наука, 1989. С. 87–99.
5. *Chandrasekhar S., Kendall P. C.* On force-free magnetic fields // Astrophys. Journal. 1957. V. 126. № 2. P. 457–460.
6. *Ferraro V. C. A., Plumpton C.* An introduction to magnetofluid mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1966. 254 p.
7. *Захаров Л. Е., Шафранов В. Д.* Равновесие плазмы с током в тороидальных системах // Вопросы теории плазмы. Вып. 11. М.: Энергоиздат. 1982. С. 118–235.
8. *Syrovatskii S. I.* Time evolution of force-free fields // Sol. Phys. 1978. V. 58. № 1. P. 89–94.
9. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 427 с.
10. *Вайнштейн С. И.* Магнитные поля в космосе. М.: Наука, 1983. 237 с.
11. *Jette A. D.* Force-free magnetic fields in resistive magnetohydrostatics // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 29. № 1. P. 109–122.

Киев

Поступила в редакцию
5.XII.1989