

УДК 532.526.2

© 1991 г.

В. И. ВАСИЛЬЕВ

**РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В КАНАЛЕ С РАЗДЕЛИТЕЛЕМ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

На отношение потоков массы газов, поступающих в камеру смешения, влияет конфигурация разделителя, расположенного перед общим участком тракта. В ряде устройств (в частности, в двухконтурном турбореактивном двигателе) разделитель может иметь изменяемую геометрию и использоваться в этом случае для регулирования расходов. В инженерных приложениях соотношение расходов находится обычно с помощью расчетов по одномерной теории (см., например, [1]). Одна из целей данной работы — найти влияние двумерности течения и вязкости среды на расходные характеристики канала с разделителем, у которого хвостовая часть представляет собой отклоняемую створку.

Для определения указанных эффектов рассматривалось плоское течение несжимаемой жидкости в канале с параллельными стенками и малым углом отклонения створки. Для оценки влияния вязкости полагалось, что поперечные размеры областей, в которых она существенна, много меньше ширины канала, а отрывные зоны (если они возникают) — тонкие, т. е. поперечный размер их сопоставим с толщиной пограничного слоя. В этих условиях для расчета можно пользоваться уравнениями пограничного слоя, рассматривая для них обратную задачу и сращивая решение с внешним потенциальным потоком. Такой подход, начиная с [2], широко применяется для расчета обтекания поверхностей. В [3] он использован для расчета течения у задней кромки пластины под нулевым углом атаки, при этом результаты вычислений сопоставлены с асимптотической теорией. В [4] с помощью обратной задачи пограничного слоя рассчитано течение у задней кромки профиля под углом атаки. Особенность же ситуации, рассматриваемой ниже, в том, что это течение в канале и у потоков, обтекающих разделитель, разные постоянные Бернуlli. Поэтому вторая задача состояла в обобщении метода расчета, основанного на теории взаимодействующего пограничного слоя, на указанный случай. По результатам численных расчетов определена расходная характеристика канала при наличии отрыва от поверхности разделителя. Кроме того, найдены поправки к расходной характеристике, получаемой по одномерной теории, в условиях обтекания разделителя потоками идеальной жидкости и ламинарного безотрывного обтекания потоками вязкой жидкости с одинаковыми полными давлениями.

1. На фиг. 1 представлена схема течения. Плоский канал имеет постоянную ширину H . Поверхность разделителя на входе в канал параллельна его стенкам, а хвостовая часть разделителя отклонена на угол α , который считается малым параметром ($\alpha \ll 1$). Длина проекции хвостовой части на ось канала равна L . Входной и хвостовой участки разделителя сопряжены дугой окружности (в рассматриваемом далее случае радиус этой окружности равен L). Контур разделителя описывается уравнением $y=h(x)$, где x , y — декартовы координаты. Начало координат расположено в точке пересечения прямой, продолжающей входной участок разделителя, и прямой, проходящей через заднюю кромку. Полагается также, что поперечные размеры входных участков каналов под разделителем (h_1) и над разделителем (h_2) сопоставимы: $h_2/h_1=O(1)$, $h_1+h_2=H$.

Параметры потоков под и над разделителем обозначаются индексами 1 и 2. Потоки на входах в каналы 1 и 2 невозмущенные, а скорости их u_1 и u_2 — сопоставимые величины: $u_2/u_1=m=O(1)$. От точки x_0 , расположенной на расстоянии порядка L слева от задней кромки, на поверхности

сти разделителя развиваются ламинарные пограничные слои. Считается, что число Рейнольдса $Re=u_1 L/v$ велико (v — динамическая вязкость, одинаковая в потоках 1 и 2), а характерный размер неоднородности обтекаемой поверхности — порядка толщины пограничных слоев и следа за кромкой $\alpha L \sim O(\delta)$, где δ — толщина вытеснения. В этих условиях отрывные зоны также будут тонкими. Кроме того, полагается, что поперечные размеры пограничных слоев на разделителе и стенках канала много меньше его ширины: $\delta \ll h_1$.

Таким образом, поток в канале с разделителем можно разбить на несколько зон: две зоны невязкого потенциального течения сверху и снизу от разделителя, область пограничных слоев на разделителе и следа за ним, пограничные слои на верхней и нижней стенах канала. В данном случае исследовалось обтекание разделителя, а пограничные слои на стенах канала не учитывались. Построив решение для таких условий, можно было затем оценить состояние пограничных слоев на стенке (предполагалось, что они также развиваются от точки x_0). Оценки показали, что в рассматривавшихся ситуациях отрыв от стенок канала не происходит, т. е. обратное влияние на течение в окрестности разделителя действительно невелико. Рассмотрим теперь по отдельности методы расчета потока в невязкой и вязкой зонах и процедуру их сращивания.

2. Зоны потенциального течения разделены областью, в которой существенна вязкость. Поэтому вначале следует рассмотреть потенциальное течение в отдельном канале, у которого одна стена расположена при $y=-h_1$, а контур другой задается уравнением $y=h(x)$, причем контур этот слабо деформирован; кроме того, $h(x)=0$ при $x < x_1$, $h \rightarrow h_\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, $h_\infty/L \ll 1$. Тогда можно воспользоваться линейным приближением. Если представить функцию тока потенциального течения в виде

$$\Psi = [\eta + \psi(x, \eta)] u_1 h_1, \quad \eta = (y + h_1) / [h(x) + h_1] \quad (2.1)$$

то ψ определяется из решения задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \eta \frac{d^2 h}{dx^2}, \quad \psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, \quad \psi(\pm\infty, \eta) = 0 \quad (2.2)$$

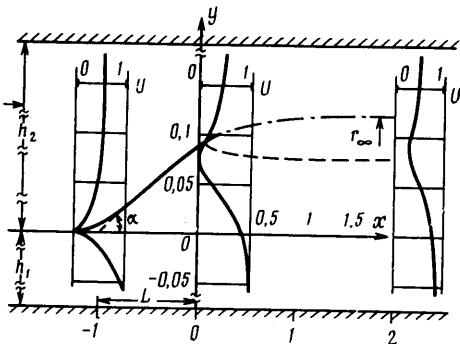
Ее решение находится с помощью преобразования Фурье. Для дальнейшего основной интерес представляет величина продольной скорости $u = \partial \Psi / \partial y$ на деформированной поверхности, которую можно выразить в виде

$$u = u_1 [h_1 + h(x)]^{-1} \left[h_1 - \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\infty} \frac{dh}{d\xi} k \left(\frac{x-\xi}{h_1} \right) d\xi \right] \quad (2.3)$$

$$k(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi |x|}{2} \right) - 1 \right]$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, а нижний предел выбирается так, чтобы при $x < x_1$ было $dh/dx = 0$.

При расчете невязкого течения в канале с разделителем положение следа заранее не известно и находится при сращивании путем итераций.



Фиг. 1

В качестве начального приближения в этом случае можно взять положение тангенциального разрыва, реализующегося при обтекании разделителя потоками идеальной жидкости. Тангенциальный разрыв описывается функцией $y=r(x)$.

Для того чтобы найти $r(x)$, следует учесть, что на тангенциальном разрыве наряду с условием непротекания должно выполняться условие непрерывности давления. Линеаризуя уравнения Бернулли для потоков 1 и 2 и пользуясь соотношениями вида (2.3), получим интегральное уравнение для $r(x)$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dr}{d\xi} K(x, \xi) d\xi = [r(x) - r(0)] \left(1 + m^2 \frac{h_1}{h_2} \right) - \varphi(x) \quad (2.4)$$

$$K(x, \xi) = \left[k \left(\frac{x-\xi}{h_1} \right) + k \left(\frac{\xi}{h_1} \right) \right] + m^2 \frac{h_1}{h_2} \left[k \left(\frac{x-\xi}{h_2} \right) + k \left(\frac{\xi}{h_2} \right) \right]$$

$$\varphi(x) = \int_{x_1}^0 \frac{dh}{d\xi} K(x, \xi) d\xi, \quad m = \frac{u_2}{u_1}$$

Кроме того, в невязком потоке на задней кромке должно выполняться условие Жуковского — Чаплыгина, что обеспечивается, если $r(0)=h(0)$ и $dr/dx=dh/dx$ при $x=0$.

Если ширина входных участков каналов 1 и 2 одинакова ($h_1=h_2$), то из (2.4) видно, что $r(x)$ не зависит от m . В более общем случае эта зависимость оказывается довольно слабой.

Уравнение (2.4) решалось численно, для этого интегралы записывались по формуле трапеций. В результате получалась система линейных алгебраических уравнений для значений r в узлах сетки. Решение этой системы находилось методом исключения Гаусса.

Расчеты показали, что при положительных углах отклонения створки (фиг. 1) $r(x)$ — монотонно возрастающая функция, причем $r \rightarrow r_\infty > r(0)$ при $x \rightarrow \infty$. Например, $r_\infty - r(0) \approx 0,39\alpha$ при $h_1=h_2$. Характерный вид функции $r(x)$ для $\alpha=5^\circ$ представлен на фиг. 1 (штрихпунктирная кривая). Здесь и далее за характерный размер выбирается величина L , а скорости в дальнейшем нормируются на величину u_1 .

3. Уравнения для пограничных слоев сверху и снизу от разделителя записываются в обычной форме

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \beta + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.1)$$

Здесь $Y=h(x)-y$, $V=-V^\circ+Udh/dx$ в потоке 1 и $Y=y-h(x)$, $V=V^\circ-Udh/dx$ в потоке 2; U и V° — составляющие вектора скорости в декартовой системе координат x , y . Удобно за кромкой разделителя ввести разделительную линию тока $y=r(x)$, положение которой заранее не известно; тогда след также будет описываться соотношениями вида (3.1). Для пограничного слоя на поверхности разделителя и на разделительной линии тока граничные условия записываются в виде

$$x \leq 0, \quad Y=0: \quad U_i=V_i=0; \quad Y \rightarrow \infty: \quad \partial U_i / \partial Y \rightarrow 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.2)$$

$$x>0, \quad Y=0: \quad V_1=V_2=0, \quad U_1=U_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial Y} = - \frac{\partial U_2}{\partial Y};$$

$$Y \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial U_i}{\partial Y} \rightarrow 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.3)$$

Пограничные слои развиваются от точки $x_0 < -1$.

Решение прямой задачи для уравнений (3.1) имеет особенность в точке нулевого трения, поэтому для описания течения с отрывными зонами следует рассматривать обратную задачу. Здесь толщина вытеснения задается, а градиент давления β находится. Поскольку $\beta = U_e dU_e / dx$, то в результате определяется скорость вне пограничного слоя $U_e(x) = U(x, Y)$ при $Y \rightarrow \infty$. В рассматриваемой ситуации для определения β_1 и β_2 в потоках до кромки задаются распределения толщин вытеснения $\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$, т. е. уравнения (3.1) дополняются замыкающими соотношениями

$$x \leq 0: \quad \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{U}{U_{ei}} \right) dY = \delta_i(x) \quad (i=1, 2) \quad (3.4)$$

В следе давление принимается постоянным по сечению, а для нахождения β задается $\delta_w(x)$, где по определению

$$\delta_w = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{U}{U_{e1}} \right) dy - (1-m)y \right]$$

т. е. замыкающее соотношение имеет вид

$$x > 0: \quad \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{U}{U_{e1}} \right) dY + m \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{U}{U_{e2}} \right) dY = \delta_w(x) \quad (3.5)$$

Для численного решения задачи (3.1) – (3.5) уравнения (3.1) аппроксимировались неявной конечно-разностной схемой первого порядка по шагу Δx и второго порядка по шагу ΔY . При аппроксимации нелинейных членов в (3.1) использовалась полностью неявная схема. При решении проводилась их линеаризация с последующим уточнением решения с помощью локальных итераций. Интегралы в (3.4), (3.5) аппроксимировались по формуле трапеций. В результате в каждом сечении x получалась система алгебраических линейных уравнений для значений U в узлах сетки и параметра β . У матрицы системы заполнены три диагонали и одна строка; решалась эта система модифицированным методом прогонки.

Толщины вытеснения находились из условий сращивания параметров в пограничных слоях с параметрами во внешних потенциальных потоках. Сращивание обеспечивается, если выполняются требования

$$U_{ei}(x) = u_{ei}(x) \quad (i=1, 2) \quad (3.6)$$

Здесь u_{ei} – скорость потенциального течения на контуре с учетом толщины вытеснения, т. е. при $y = h - \delta_1$ и $h + \delta_2$. В следе условия сращивания имеют тот же вид, если наряду с δ_w определить δ_1 и δ_2 по отношению к разделительной линии тока. Два соотношения (3.6) при $x \leq 0$ позволяют однозначно определить $\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$. В следе параметры δ_1 и δ_2 связаны: $\delta_1 + m\delta_2 = \delta_w$, поэтому здесь условия (3.6) позволяют определить $\delta_w(x)$ и $r(x)$.

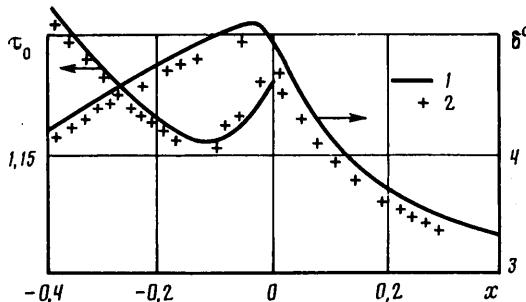
Параметры U_e и u_e – функционалы от δ_1 , δ_2 , δ_w и r , явный вид которых не известен. Поэтому находить распределения толщин вытеснения и положение следа приходится с помощью итерационного алгоритма. Итерационный процесс аналогичен предложенному в [2] и строится следующим образом: по заданным распределениям δ_1 , δ_2 , δ_w и r численно находится решение обратной задачи пограничного слоя (3.1) – (3.5); затем по формулам типа (2.3) рассчитываются скорости потенциальных потоков u_e , а по разнице $\Delta u = (U_e - u_e)/U_e$ определяются поправки к толщи-

нам вытеснения и r . Итерационные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x \leq 0: \quad \delta_i^{s+1} / \delta_i^s &= 1 + \omega_0 \Delta u_i^s \quad (i=1, 2) \\ x > 0: \quad \delta_w^{s+1} / \delta_w^s &= 1 + \omega_1 \Delta u_1^s + \omega_2 \Delta u_2^s \\ (r^{s+1} + h_1) / (r^s + h_1) &= 1 + \omega_3 \Delta u_1^s + \omega_4 \Delta u_2^s \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь s — номер итерации, ω_i — итерационные параметры. Во всех проходившихся расчетах формулы (3.7) обеспечивали сходимость по крайней мере при $0 < \omega_0, \omega_1, \omega_2 \leq 1$; $0 \leq \omega_3, \omega_4 \leq 0,03$. Решение считалось уставновившимся, если $|\Delta u| < 10^{-4}$.

Расчетная область слева ограничена сечением x_l ($x_0 < x_l < -1$), а справа x_r ($x_r > 0$). В расчетах положение этих сечений выбиралось таким об-



Фиг. 2

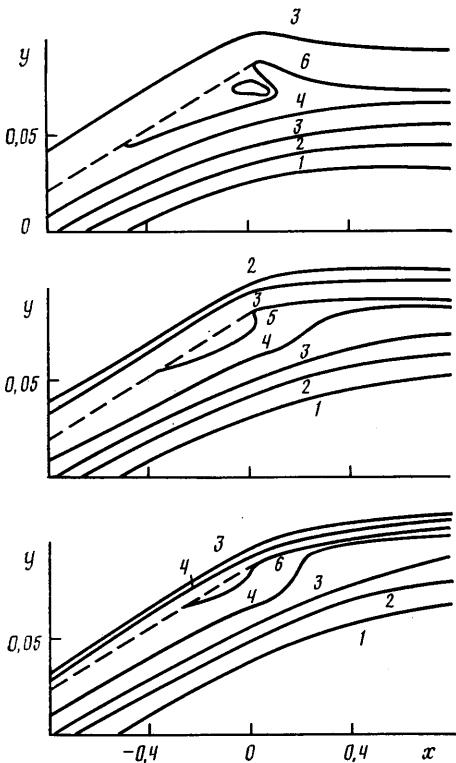
разом, чтобы решение в области хвостовой части разделителя не зависело от x_l, x_r . В сечении $x=x_l$ задавалось распределение скорости такое же, как в пограничном слое на пластине, развивающемся от точки x_0 .

Если в сечении x возникает зона обратных токов, то здесь конвективный член $U \partial U / \partial x$ аппроксимировался разностями против потока, при этом значения скорости в сечении $x+\Delta x$ брались с предыдущей глобальной итерации. На первом шаге итерационного процесса использовалась аппроксимация Флюгге — Лотц ($U \partial U / \partial x = 0$ при $U < 0$).

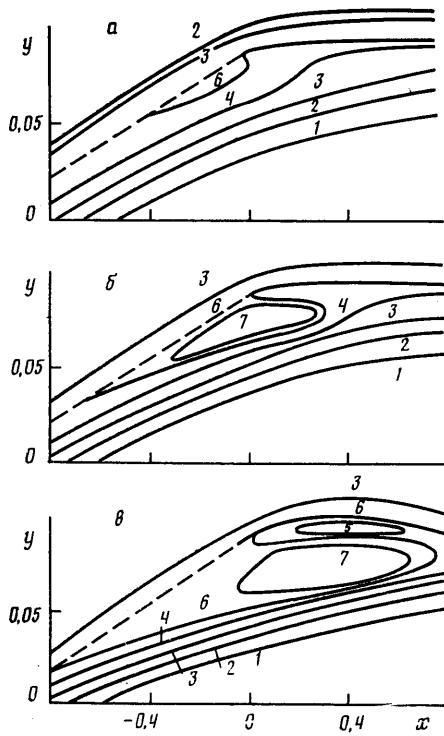
Для проверки численного метода рассматривалось течение у задней кромки разделителя с $\alpha=0^\circ$ при $Re=10^5$, $m=1$, $x_0=1$ ($-x_l=x_r=0,5$). Как показали методические расчеты, влияние стенок на течение в окрестности задней кромки при $h_1=h_2 \geq 2$ не существенно и результаты можно сопоставить с расчетом [3]. На фиг. 2 с расчетом [3] (данные 2) сравниваются распределения толщины вытеснения ($\delta^0 = \delta \cdot 10^3$) и трения по поверхности разделителя ($\tau^0 = 10^3 \nu u_1 - 2 \partial U / \partial Y$) (данные 1). Видно, что соответствие результатов хорошее.

4. Расчеты течений за разделителем, изображенным на фиг. 1, проводились в диапазоне углов $0^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$, отношений скоростей $0,5 \leq m \leq 2$, чисел Рейнольдса $10^4 \leq Re \leq 4 \cdot 10^4$, при $x_0=-3$, $h_1=h_2=1$. На фиг. 1 для случая $\alpha=5^\circ$, $Re=10^4$, $m=0,5$ показаны профили скорости в различных сечениях по x и разделительная линия тока (штриховая линия). На входном участке ($x < -1$) профили имеют типичный для пограничного слоя вид; за кромкой ($x=0,05$) формируется профиль, типичный для сленда, в котором наблюдаются и отрицательные скорости, поскольку до кромки происходит отрыв. В дальнейшем дефект скорости уменьшается и профиль приближается к виду, типичному для слоя смешения ($x=2$).

Сравнение формы разделительной линии тока с формой тангенциального разрыва (штрихпунктир) дает представление о роли сильного взаимодействия у кромки. Видно, что при отрывном обтекании положение



Фиг. 3



Фиг. 4

следа изменяется весьма значительно, а разделительная линия смещается в сторону оторвавшегося потока.

Более наглядное представление о структуре отрывного течения дают картины линий тока, приведенные на фиг. 3 и 4: штриховая линия — контур разделителя, цифрами 1—7 отмечены значения $\psi \cdot 10^3 = 2; 1; 0,5; 0,4; 0,05; 0$ и $-0,1$. На фиг. 3 показаны линии тока в течении с $Re=10^4$, $\alpha=5^\circ$; случаи $a-e$ отвечают $m=0,5; 1$ и 2 . С увеличением отношения скоростей размер отрывной зоны на подветренной стороне разделителя уменьшается. Таким образом, происходит управление отрывом в канале под разделителем за счет изменения условий на входе в канал над разделителем. На фиг. 4 показано, как изменяется структура отрывной зоны с увеличением числа Рейнольдса. Здесь $\alpha=5^\circ$, $m=1$, случаи $a-e$ отвечают $Re=10^4; 2 \cdot 10^4$ и $3,3 \cdot 10^4$. С ростом Re точка отрыва смещается вверх по потоку и, кроме того, растет протяженность зоны рециркуляционного течения в области $x>0$. Когда основная зона рециркуляционного движения выходит за пределы разделителя, образуется вторая область рециркуляции. Аналогичное изменение структуры течения наблюдается при постоянном числе Рейнольдса с ростом α .

5. Остановимся теперь на вопросе определения расходных характеристик канала. Если не учитывать пограничные слои на стенках канала и считать, что пограничные слои на разделителе могут развиваться только от точки x_0 ($x_0 < -1$), то задачу определения расходных характеристик можно сформулировать следующим образом: найти расходы (или скорости невозмущенных потоков u_1, u_2) по заданным значениям полных давлений P_1, P_2 в невозмущенных потоках при $x \rightarrow -\infty$ и статическому давлению p_∞ при $x \rightarrow +\infty$.

Предположим вначале, что влиянием вязкости вообще можно пренебречь, тогда при $x > 0$ потоки разделены тангенциальным разрывом и при $x \rightarrow +\infty$ разрыв занимает положение $y = r_\infty$. Параметры однородных потоков при $x \rightarrow \pm\infty$ и можно связать четырьмя соотношениями сохранения массы и энергии:

$$\begin{aligned} u_1 h_1 &= u_{1\infty} (r_\infty + h_1), \quad u_2 h_2 = u_{2\infty} (h_2 - r_\infty) \\ P_1 &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho u_{1\infty}^2, \quad P_2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho u_{2\infty}^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $u_{1\infty}$, $u_{2\infty}$ — скорости однородных потоков при $x \rightarrow +\infty$, а ρ — плотность. Всего здесь пять неизвестных и, чтобы решить систему, необходимо еще одно условие. Когда используется одномерный подход, в качестве такого условия берется равенство давлений в сечении $x=0$ [1], причем давления рассчитываются по соотношениям вида (5.1) и тогда получается, что $r_\infty = h(0)$.

Как было показано выше, с учетом двумерности должно быть $r_\infty > h(0)$. Например, для случая $h_1 = h_2 = 1$ имеем $r_\infty - h(0) \approx 0,39\alpha$. Единственное решение двумерной задачи для идеальной жидкости выделяется с помощью постулата Жуковского — Чаплыгина. Определим теперь параметр Γ как

$$\Gamma = (P_1 - P_2) / (\rho u_1^2) \quad (5.2)$$

Тогда с помощью (5.1) находим

$$\Gamma(m) = m^2 [h_2/(h_2 - r_\infty)]^2 - [h_1/(h_1 + r_\infty)]^2 \quad (5.3)$$

Если найти решение двумерной задачи и определить r_∞ , то с помощью (5.3) можно получить зависимость $\Gamma(m)$. С другой стороны, если известна функция $\Gamma(m)$ (независимо от того, каким способом она найдена), то соотношение (5.2) можно рассматривать как замыкающее условие к системе (5.1), т. е. соотношения (5.1), (5.2) позволяют решить задачу определения расходных характеристик.

Если рассмотреть теперь течение вязкой жидкости, то здесь при $x \rightarrow +\infty$ произойдет полное перемешивание потоков. Пользуясь уравнениями сохранения импульсов и расходов, получим следующую связь параметров в невозмущенных потоках:

$$\begin{aligned} h_1 P_1 + h_2 P_2 - H p_\infty &= Q + F_x - (\rho u_1^2 h_1 + \rho u_2^2 h_2)/2 \\ Q &= \rho (u_1 h_1 + u_2 h_2)^2 / H, \quad F_x = \rho u_1^2 d_1 + \rho u_2^2 d_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь Q — суммарный скоростной напор в выходном сечении, F_x — сила сопротивления разделителя, d — толщина потери импульса у задней кромки. Соотношение (5.4) справедливо с точностью до членов порядка $O(\alpha^2, \delta^2)$, поэтому, в частности, не учитываются силы давления на разделитель и в этом же приближении записано выражение для F_x . Наряду с (5.4) имеется также связь вида (5.2), где, однако, $\Gamma = \Gamma(m, Re)$; эти два соотношения решают задачу определения расходной характеристики с учетом смешения потоков. Влияние вязкости, связанное с сопротивлением, изменяет u_1 и u_2 , а их отношение, как и в невязком случае, зависит от величины Γ .

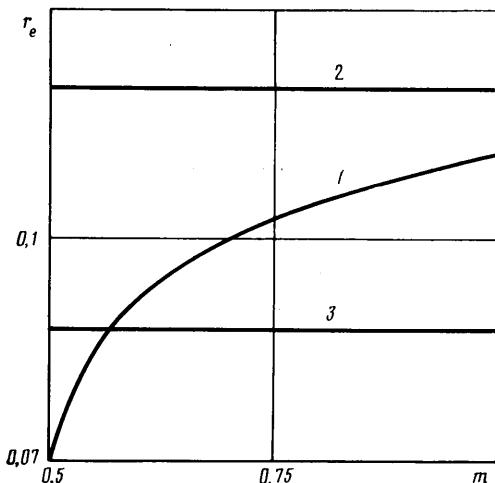
Итак, если используется одномерный подход, то (независимо от того, учитывается или нет смешение за кромкой) Γ имеет вид

$$\Gamma(m) = m^2 h_2^2 / [h_2 - h(0)]^2 - h_1^2 / [h_1 + h(0)]^2$$

а для двумерного течения идеальной жидкости имеем соотношение (5.3). Удобно и для случая вязкого обтекания представить Γ в виде (5.3), где вместо r_∞ стоит теперь некий параметр r_e . Тогда влияние двумерности и вязкости на расходные характеристики можно оценить путем сопоставле-

ния r_∞ и r_e с $h(0)$. Параметр типа h_1+r_e можно назвать эффективной шириной канала 1, а h_2-r_e — соответственно канала 2.

В данном случае величина r_e определялась для параметров, указанных в разд. 4. Характерный вид зависимости r_e от m для случая $\alpha=5^\circ$ и $Re=10^4$ показан на фиг. 5 (кривая 1). Здесь же нанесены значения r_∞ и $h(0)$ (прямые 2 и 3). Разность $r_\infty-h(0)$ характеризует влияние двумерности, которое довольно значительно. С учетом двумерности при заданных P_1 , P_2 и p_∞ отношение расходов получается больше. При достаточно боль-



Фиг. 5

ших m дополнительные поправки, связанные с вязкостью, сравнительно невелики, причем с ростом m разность $r_\infty-r_e$ уменьшается, что объясняется уменьшением интенсивности отрыва (см. фиг. 3). При наличии относительно больших отрывных зон (при $m < 1$) влияние вязкости на r_e является определяющим, причем здесь может оказаться, что $r_e < h(0)$. В последнем случае отношение расходов меньше, чем полученное по одномерной теории. Таким образом, вязкие эффекты несколько ограничивают возможности регулирования соотношения расходов с помощью разделителя в канале.

Наконец, полезно рассмотреть один частный случай, когда можно найти явное выражение для r_e . Этот случай соответствует одинаковым полным давлениям, т. е. корню уравнения $\Gamma(m, Re)=0$, и равной ширине входных участков каналов ($h_1=h_2$). Такая задача аналогична задаче об обтекании задней кромки тонкого профиля под углом атаки [5].

Поскольку корень уравнения $\Gamma=0$ определяется вязко-невязким взаимодействием у задней кромки, то при определении здесь внешнего потенциального течения можно взять решение для разделителя с угловой точкой (штриховая линия на фиг. 1); это оправданно в силу малого размера области взаимодействия, равного по порядку величины $O(Re^{-3/8})$ при $Re \rightarrow \infty$, по сравнению с длиной створки. Конформное отображение такой области течения в плоскости $z=x+iy$ на верхнюю полуплоскость переменной ξ находится с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца

$$z-z_c = \frac{2h_1}{\pi} \int_c^{\xi} \left(\frac{\xi-b}{\xi-a} \right)^{\alpha/\pi} \left(\frac{\xi-c}{\xi^2-1} \right) d\xi \quad (5.5)$$

Здесь $z_c = ih(0)$ и все переменные далее снова нормированы. Параметры преобразования a , b , c можно разложить в ряд по α и при этом глав-

ные члены разложения имеют вид

$$b = -a = \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{h_1}\right)}, \quad c = -\frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) \quad (5.6)$$

Комплексный потенциал течения в плоскости ξ является потенциалом течения от двух источников

$$\chi(\xi) = (h_1/\pi) [\ln(\xi-1) + m \ln(\xi+1)] \quad (5.7)$$

Используя (5.5)–(5.7), можно определить скорость вблизи задней кромки, разложение которой по малому параметру $t = (z - z_c) e^{-ia}$ имеет вид

$$\frac{u - iv}{u_0} = e^{-ia} \left[1 + \frac{2\alpha i}{b\sqrt{\pi h_1}} \sqrt{t} - \frac{i\kappa}{\sqrt{t}} + O(|t|) \right] \quad (5.8)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{h_1}{\pi}} \left[-\frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) + \frac{1-m}{1+m} \right], \quad u_0 = \frac{1+m}{2}$$

где v — составляющая скорости в проекции на ось y .

Если потребовать выполнение постулата Жуковского — Чаплыгина, то $\kappa = 0$ и отсюда находится значение m , а с помощью (5.3) — r_∞ .

Как указано в [5], в случае, когда скорость внешнего потенциального течения вблизи задней кромки имеет представление

$$u - iv = e^{-ia} (1 + ik\sqrt{t}) \quad (5.9)$$

за счет вязко-невязкого взаимодействия индуцируется течение вида

$$u - iv = e^{-ia} (1 + ik\sqrt{t} + ik\gamma/\sqrt{t} + \dots), \quad |t| \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

Для рассматриваемой ситуации $\gamma = 3,95|x_0|^{5/8} \operatorname{Re}^{-3/8} \gamma^\circ(\alpha^\circ)$ и $\alpha^\circ = 3,45k \operatorname{Re}^{1/16} |x_0|^{9/16}$. В асимптотическом разложении (5.10) учтены только главные члены по Re . Зависимость $\gamma^\circ(\alpha^\circ)$ ($\gamma^\circ = O(1) > 0$), найденная путем численного решения задачи взаимодействия, приведена в [5]. Сопоставляя (5.10) и (5.8), определим значение k в (5.10), а затем κ в (5.8), откуда получим выражение для m . Подставив найденное значение m в (5.3) (при этом $\Gamma = 0$), можно определить r_e

$$r_e = \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) \left[1 - \gamma^\circ(\alpha^\circ) 3,95 \sqrt{\frac{\pi}{h_1}} |x_0|^{5/8} \operatorname{Re}^{-3/8} \right] \quad (5.11)$$

Подобно тому как для профиля взаимодействие у задней кромки уменьшает величину подъемной силы, так в канале с разделителем оно приводит к уменьшению эффективной ширины $h_1 + r_e$ по сравнению с $h_1 + r_\infty$. В силу асимптотического характера выражения (5.11) ($\operatorname{Re} \rightarrow \infty$) эта поправка мала, а решение (5.11) справедливо лишь для безотрывного обтекания кромки. Для этого должно выполняться условие $\alpha^\circ \leq 0,47$ (см. [5]). В общем случае r_e может быть найдено численно.

Автор выражает благодарность С. Ю. Крапщенинникову за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория двухконтурных турбореактивных двигателей/Под ред. С. М. Шляхтенко, В. А. Сосунова М.: Машиностроение, 1979. 431 с.
2. Carter J. E. Solutions for laminar boundary-layers with separation and reattachment // AIAA Pap. 1974. № 583. 11 p.
3. Veldman A. E. P. New quasi-simultaneous method to calculate interacting boundary layers // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 1. P. 79–85.
4. Vatsa V. N., Verdon J. M. Viscid/Inviscid interaction analysis of separated trailing-edge flows // AIAA Journal. 1985. V. 23. № 4. P. 481–489.
5. Асимптотическая теория отрывных течений/Под ред. В. В. Сычева М.: Наука, 1987. 255 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.III.1989