МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1991

УДК 532.526.013.4

В. В. БОГОЛЕПОВ, И. И. ЛИПАТОВ

СТРУКТУРА ВОЗМУЩЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОКОЛО ХОЛОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Структура возмущенного двумерного ламинарного пограничного слоя при умеренных или больших числах Маха набегающего потока и умеренных значениях температурного фактора исследовалась, например, в [1, 2] (там же приведена довольно обширная библиография). При больших числах Маха набегающего потока практически важными являются течения с малыми значениями температурного фактора, для которых значительно ухудшается передача возмущений вверх по потоку [3] по сравнению со случаями умеренных его значений. Асимптотическая теория отрыва таких потоков была развита в [4–6].

Ниже рассматривается ламинарный пограничный слой около холодной пластины на режиме слабого вязко-невязкого взаимодействия при стремлении числа Маха набегающего потока к бесконечности, а температурного фактора к нулю. Исследуются локальные возмущенные области течения, возникающие из-за наличия малых неровностей на поверхности пластины. Получено, что нетонкие неровности индуцируют возмущения напряжения трения и теплового потока того же порядка, что и сами эти величины в невозмущенном пограничном слое, а все тонкие неровности индуцируют только малые, линейные возмущения и, следовательно, не могут вызывать отрыв пограничного слоя; описаны различные режимы обтекания неровностей.

1. При обтекании плоской пластины равномерным потоком вязкого газа с большой сверхзвуковой скоростью (т. е. при числах Маха $M_\infty \to \infty$) и большими, но докритическими значениями числа Рейнольдса Re_∞, на режиме слабого вязко-невязкого взаимодействия за счет вытесняющего действия ламинарного пограничного слоя индуцируется малое возмущение давления [7]

$$\Delta p/p_\infty \sim O(\delta M_\infty) \sim O(\chi), \quad \chi \ll 1 \tag{1.1}$$

где δ — толщина пограничного слоя, χ — параметр взаимодействия. В дальнейшем используются только безразмерные переменные, в качестве характерных величин для линейных размеров, давления и энтальпии h принимаются l, $\rho_\infty u_\infty^2$ и u_∞^2 соответственно, остальные функции течения относятся к своим значениям в невозмущенном потоке (l — некоторое расстояние от передней кромки пластины, u_∞ и ρ_∞ — скорость набегающего потока и плотность газа в нем). Принимается еще для простоты линейная зависимость коэффициента динамической вязкости μ от температуры.

Возмущение давления (1.1) индуцирует на основной части тела малый продольный градиент давления $\sim O(\chi)$, который проявляется в уравнениях пограничного слоя лишь во втором приближении. Поэтому в основной части пограничного слоя (т. е. в области с характерными размерами $x \sim O(1)$ и $y \sim O(\delta)$, ось x направлена вдоль поверхности пластины, ось y — по нормали к ней) справедливы следующие асимптотические оценки функций течения и коэффициентов напряжения трения C_f и теплового потока C_q:

$$u \sim h \sim O(1), \quad p \sim O\left(\frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2}\right), \quad \rho \sim O\left(\frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2}\right)$$

$$\mu \sim O(\mathrm{M}_\infty^2), \quad \delta \sim O\left(\frac{\mathrm{M}_\infty^2}{\mathrm{Re}_\infty^{1/2}}\right) \tag{1.2}$$

$$C_f = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \sim O\left(\frac{\delta}{\mathrm{M}_\infty^2}\right), \quad C_q \mathrm{Pr} = \mu \frac{\partial h}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \sim O\left(\frac{\delta}{\mathrm{M}_\infty^2}\right)$$

где Pr — число Прандтля. Полагая, что C_f и C_q сохраняют свои порядки величин во всем пограничном слое, для пристеночного слоя при $y/\delta \ll 1$ можно записать

$$u \sim \left(\frac{y}{\delta} + h_w^2\right)^{1/2} - h_w, \quad h \sim \left(\frac{y}{\delta} + h_w^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

где h_w — температурный фактор.

Пусть на поверхности пластины на расстоянии $x \sim O(1)$ от ее передней кромки находится двумерная неровность, характерная толщина которой $a \leqslant \delta$, а ее характерная протяженность $b \geqslant a$, но не больше расстояния до передней кромки пластины. Естественно, что a и b превосходят характерную длину свободного пробега молекул газа λ [8], т. е. удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\lambda \ll a \leqslant \delta, \quad a \leqslant b \leqslant 1, \quad \lambda \sim \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\mu}{p^{1/2}\rho^{1/2}} \sim \delta^2\left(\frac{y}{\delta} + h_w^2\right)^{3/4} \tag{1.4}$$

Ниже исследуется обтекание неровностей с характерными размерами (1.4) при значениях температурного фактора $h_w \sim O(1)$ и $h_w \to O$, которые индуцируют большие локальные градиенты давления $\partial p/\partial x \gg 1$ и уже в первом приближении влияют на течение в пограничном слое.

2. Пусть сначала $h_w \sim O(1)$. Тогда в основной части пограничного слоя справедливы оценки (1.2), а для его пристеночной части при $y/\delta \ll h_w \sim O(1)$ из (1.3), (1.4) получаются следующие распределения и оценки для функций течения:

$$u \sim \frac{y}{\delta}, \quad h \sim h_w + \frac{y}{\delta}, \quad \rho \sim O\left(\frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2 h_w}\right), \quad \mu \sim O(\mathrm{M}_\infty^2 h_w), \quad \lambda \sim O(\delta^2) \tag{2.1}$$

Если малая неровность с характерными размерами (1.4) взаимодействует только с пристеночной частью пограничного слоя (2.1), то она индуцирует возмущения функций течения

$$u \sim \Delta u \sim O(a/\delta), \ \Delta p \sim \rho u^2 \sim O(a^2/\delta^2 \mathrm{M}_\infty^2) \tag{2.2}$$

В случае взаимодействия неровности с равномерным набегающим потоком будет индуцироваться возмущение давления [7]

$$\Delta p \sim O(a/b\mathrm{M}_\infty) \tag{2.3}$$

При взаимодействии неровности со всем течением около плоской пластины справедливы обе оценки (2.2) и (2.3) и тогда $ab \sim O(\mathrm{M}_\infty \delta^2)$.

Соотношения (2.1) позволяют получить еще, что в локальных возмущенных областях около неровностей вязкость существенна в слое с характерной толщиной $\delta_1 \sim O(\delta b^{1/3})$. Это означает, что когда неровность индуцирует нелинейные возмущения ($u \sim \Delta u \sim (\Delta p/\rho)^{1/2}$), в слое с характерной толщиной δ_1, C_f и C_q изменяются в своих основных порядках (1.2) ($C_f \sim \Delta C_f$ и $C_q \sim \Delta C_q$). Более толстые неровности индуцируют невязкие нелинейные возмущения, и тогда в вязком подслое, например $C_f \sim \Delta C_f \gg \delta/\mathrm{M}_\infty^2$.

Менее толстые неровности индуцируют вязкие линейные возмущения: $\Delta C_f \ll C_f$.

Оценки (2.1)–(2.3) показывают, что при $M_\infty \to \infty$, $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$, $\chi \to 0$ и $h_w \sim O(1)$ около малых неровностей с характерными размерами (1.4) реализуются те же режимы течения, что и при $(M_\infty^2-1) \sim O(1)$ [2].

3. В предельном случае обтекания холодной поверхности при $h_w \ll \ll (y/\delta)^{1/2} \leqslant 1$ из соотношений (1.3) и (1.4) получаются следующие распределения функций течения:

$$u \sim h \sim \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2}, \quad \rho \sim \frac{\delta^{1/2}}{M_\infty^2 y^{1/2}}, \quad \mu \sim M_\infty^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2}, \quad \lambda \sim y^{3/4} \delta^{5/4} \tag{3.1}$$

которые, очевидно, справедливы как в пристеночной ($y/\delta \ll 1$), так и в основной ($y/\delta \sim O(1)$) частях пограничного слоя. Соотношения (3.1) показывают, что так как $\min(a, b) \gg \lambda$, то $\min(a, b) \gg \delta^5$, и в локальных возмущенных областях течения около неровностей вязкость существенна в слое с характерной толщиной $\delta_1 \sim O(\delta b^{4/3})$.

В пристеночной части пограничного слоя около нетонкой неровности с характерными размерами $\delta^5 \ll a \sim b \leqslant \delta$ (согласно принятым в отечественной литературе обозначениям, это область 3) вводятся новые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$x = bx_3, \quad \psi = \frac{b}{M_\infty^2}\psi_3, \quad y = by_3 + \ldots$$

$$u = \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}} u_3 + \ldots, \quad v = \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}} v_3 + \ldots, \quad p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2} M_\infty^2} p_3 + \ldots \tag{3.2}$$

$$\rho = \frac{\delta^{1/2}}{M_\infty^2 b^{1/2}} \rho_3 + \ldots, \quad \mu = M_\infty^2 \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}} \mu_3 + \ldots, \quad h = \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}} h_3 + \ldots$$

где ψ и γ — функция тока и показатель адиабаты соответственно. Подстановка разложений (3.2) в уравнения Навье — Стокса, записанные в переменных Мизеса (x, ψ), и совершение предельного перехода при $M_\infty \to \to \infty$, $\delta \to 0$, $\chi \to 0$ показывают, что в наиболее общем случае при $a \sim b \sim \delta_1 \sim \sim O(\delta^3)$ течение в области 3 в первом приближении описывается полными уравнениями Навье — Стокса для сжимаемого газа; на поверхности неровности $y_3 = f(x_3)$ при $\psi_3 = 0$ должны выполняться обычные условия непротекания и прилипания, вдали от неровности решение должно сращиваться с невозмущенным течением в пограничном слое (3.1). Если $\delta^5 \ll a \sim b \ll \delta^3$, то в области 3 в первом приближении будут справедливы уравнения Стокса. Разложения (3.2) показывают, что при $\delta^5 \ll a \sim b \leqslant \delta^3$ коэффициенты C_f и C_q изменяются в своих основных порядках (1.2).

При $\delta^3 \ll a \sim b \leqslant \delta$ течение в области 3 будет описываться уравнениями Эйлера, которые могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\rho_3 \frac{u_3^2 + v_3^2}{2} + p_3 = \frac{\rho_3 u_0^2}{2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial \psi_3} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \frac{v_3}{u_3} \quad \frac{\partial y_3}{\partial \psi_3} = \frac{1}{\rho_3 u_3}, \quad h_3 = h_0(\psi_3), \quad \rho_3 = \frac{1}{(\gamma-1) h_0(\psi_3)}$$

где $u_0(\psi_3)$ и $h_0(\psi_3)$ — профили продольной скорости и энтальпии в невозмущенном пограничном слое в точке, где находится неровность. Так как, согласно (3.1), при $\delta^3 \ll a \sim b \ll \delta$ или при $a \sim b \sim O(\delta)$ и $\psi_3 \to 0$

$$u_0(\psi_3) \to C\psi_3^{1/2}, \quad h_0(\psi_3) \to D\psi_3^{1/2}, \quad C_f \operatorname{Re}_\infty^{1/2} = \frac{C^2}{2(\gamma-1)},$$
$$C_q \operatorname{Re}_\infty^{1/2} \Pr = \frac{CD}{2(\gamma-1)}$$

то первое уравнение из (3.3) можно переписать как

$$^1/_2(u_3^2+v_3^2)+D(\gamma-1)p_3\psi_3^{1/2} = {^1/_2}C^2\psi_3 \quad (\psi_3 \to 0)$$

Из условия $df/dx_3 \sim O(1)$ сразу следует $u_3 \sim v_3 \sim p_3 \sim \psi_3^{1/2}$ при $\psi_3 \to 0$.

Это означает, что вблизи поверхности неровности, даже когда индуцируются невязкие нелинейные возмущения ($\Delta p \sim \rho u^2$), функции течения изменяются так же, как в пристеночной части пограничного слоя вблизи холодной поверхности (3.1)

$$u \sim h \sim \frac{M_\infty}{\delta^{1/2}}\psi^{1/2}, \quad \rho \sim \frac{\delta^{1/2}}{M_\infty^3}\psi^{-1/2}, \quad y \sim M_\infty^2\psi \quad (\psi \to 0)$$

а в вязком подслое с характерной толщиной $\delta_1 \sim O(\delta b^{2/3})$ коэффициенты C_f и C_q изменяются в своих основных порядках (1.2).

Т. е. для $h_w \ll (b/\delta)^{1/2}$ при $\delta^5 \ll b \leqslant \delta^3$ или для $h_w \ll b^{1/3}$ при $\delta^3 \leqslant b \leqslant \delta$ любые нетонкие неровности $a \sim b$ индуцируют только конечные возмущения ΔC_f и ΔC_q (по порядку величины равные самим значениям коэффициентов C_f и C_q в невозмущенном слое (1.2)). Следовательно, любые тонкие неровности ($a < b$) могут индуцировать только малые возмущения ΔC_f и ΔC_q (т. е. они не могут, например, инициировать отрыв пограничного слоя).

4. Теперь рассматривается обтекание тонких ($a<b$) неровностей при $h_w \ll (y/\delta)^{1/2} \leqslant 1$.

Пусть сначала $a < b \leqslant \delta$. Тогда, согласно (3.1), в области *3* с характерными размерами $x \sim O(b)$ и $y \sim O(a)$ неровность индуцирует возмущение давления $\Delta p \sim \rho u \Delta u \sim \Delta u / M_\infty^2$, которое должно затухать в области *2* с характерными размерами $x \sim y \sim O(b)$. Для этого толщина неровности a должна компенсироваться изменением толщины области *2* Δy

$$u \sim h \sim O\left(\frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}}\right), \quad \rho \sim \frac{1}{M_\infty^2 h}, \quad \psi \sim O\left(\frac{b}{M_\infty^2}\right), \quad v \sim \frac{\Delta p x}{\psi} \sim M_\infty^2 \Delta p$$
$$\Delta y \sim \frac{vx}{u} \sim M_\infty^2 b^{1/2}\delta^{1/2}\Delta p \sim O(a), \quad \Delta p \sim O\left(\frac{a}{M_\infty^2 b^{1/2}\delta^{1/2}}\right) \tag{4.1}$$

Следовательно, в области 3 $\Delta u \sim M_\infty^2 \Delta p \sim O(a/b^{1/2}\delta^{1/2}) \ll u \sim O(a^{1/2}/\delta^{1/2})$, т. е. индуцируются только малые, линейные возмущения функций течения. В наиболее общем случае область 3 является вязкой, тогда

$$a \sim O(\delta b^{2/3}), \; h_w \ll b^{1/3}, \; \delta^3 \ll b \leqslant \delta \tag{4.2}$$

Оценки (3.1), (4.1) и (4.2) позволяют ввести в областях *3* и *2* соответственно независимые переменные и асимптотические разложения функций течения следующего вида:

$$x = bx_3, \quad \psi = \frac{\delta b^{2/3}}{M_\infty^2}\psi_3, \quad y = \delta b^{2/3} y_3 + \ldots \tag{4.3}$$

$$u = b^{1/3}C\psi_3^{1/2} + \delta^{1/2}b^{1/6}u_3 + \ldots, \; v = \delta v_3 + \ldots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{\delta^{1/2}b^{1/6}}{M_\infty^2}p_3 + \ldots, \quad \rho = \frac{1}{M_\infty^2 b^{1/3}}\frac{1}{(\gamma-1)D\psi_3^{1/2}} + \frac{\delta^{1/2}}{M_\infty^2 b^{1/6}}\rho_3 + \ldots$$

$$\mu = M_\infty^2 b^{1/3} D\psi_3^{1/2} + \ldots, \quad h = b^{1/3} D\psi_3^{1/2} + \delta^{1/2} b^{1/2} h_3 + \ldots$$

$$x = bx_2, \qquad \psi = \frac{b}{M_\infty^2}\psi_2, \qquad y = by_0(\psi_2) + \delta b^{2/3} y_2 + \ldots$$

$$u = \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}} u_0(\psi_2) + \delta^{1/2} b^{1/6} u_2 + \ldots, \qquad v = \delta^{1/2} b^{1/6} v_2 + \ldots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{\delta^{1/2} b^{1/6}}{M_\infty^2} p_2 + \ldots, \qquad \rho = \frac{\delta^{1/2}}{M_\infty^2 b^{1/2}} \rho_0(\psi_2) + \frac{\delta}{M_\infty^2 b^{1/3}} \rho_2 + \ldots \tag{4.4}$$

$$h = \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}} h_0(\psi_2) + b^{2/3} h_2 + \ldots$$

Здесь опять индексом 0 отмечены распределения функций течения в невозмущенном пограничном слое в точке, где находится неровность. Подстановка разложений (4.3) и (4.4) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $M_\infty \to \infty$, $\delta \to 0$, $\chi \to 0$ и $\delta^3 \ll b \leqslant \delta$ показывают, что в первом приближении течение в области 3 описывается линеаризованными уравнениями пограничного слоя Прандтля, а в области *2* — линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\frac{C}{(\gamma-1)D}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{dp_3}{dx_3} = \frac{C^2}{(\gamma-1)^2 D}\frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\psi_3^{1/2}\frac{\partial u_3}{\partial \psi_3}\right), \qquad \frac{\partial p_3}{\partial \psi_3} = 0$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \frac{v_3}{C\psi_3^{1/2}}, \qquad \frac{\partial y_3}{\partial \psi_3} = \frac{(\gamma-1)D}{C}, \qquad \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{\partial h_3}{\partial x_3} - \psi_3^{1/2}\frac{dp_3}{dx_3} =$$

$$= \frac{C}{\Pr(\gamma-1)^2 D}\frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\psi_3^{1/2}\frac{\partial h_3}{\partial \psi_3}\right) \tag{4.5}$$

$$h_3 = \gamma D\psi_3^{1/2} p_3 - (\gamma-1)D^2\psi_3\rho_3$$

$$\rho_0 u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{v_2}{u_0} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial \psi_2} = \frac{1}{\rho_0 u_0}, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial \psi_2} = -\frac{1}{\rho_0 u_0}\left(\frac{u_2}{u_0} + \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}}\frac{\rho_2}{\rho_0}\right), \qquad \rho_0\frac{\partial h_2}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0$$

$$(\gamma-1)\rho_0 h_0 = 1, \quad (\gamma-1)\rho_0 h_2 = \gamma p_2 - \rho_2/\rho_0$$

Решение уравнений (4.5) должно затухать при $x_3 \to -\infty$ и удовлетворять обычным внутренним краевым условиям при $\psi_3 = 0$

$$u_3, v_3, p_3, \rho_3, h_3, y_3 \to 0 \quad (x_3 \to -\infty) \tag{4.7}$$

$$u_3 = v_3 = h_3 = 0, \quad y_3 = f(x_3) \quad (\psi_3 = 0)$$

Тогда из (4.5) с учетом (4.7) можно легко получить

$$y_3 = f(x_3) + \frac{(\gamma-1)D}{C}\psi_3, \qquad v_3 = C\psi_3^{1/2}\frac{df}{dx_3} \tag{4.8}$$

Решение системы (4.6) должно затухать при $x_2 \to \pm\infty$ или $\psi_2 \to \infty$

$$u_2, v_2, p_2, \rho_2, h_2, y_2 \to 0 \quad (x_2 \to \pm\infty \text{ или } \psi_2 \to \infty) \tag{4.9}$$

Поэтому эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\rho_0 u_0 u_2 + p_2 = 0, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{v_2}{u_0}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial \psi_2} = \frac{1}{\rho_0 u_0}, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial \psi_2} = p_2\left(\frac{1}{\rho_0^2 u_0^3} - \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}}\frac{1}{\rho_0 u_0}\right), \qquad \rho_0 h_2 - p_2 = 0 \tag{4.10}$$

$$(\gamma-1)\rho_0 h_0 = 1, \qquad \rho_2 = \rho_0 p_2$$

Недостающие краевые условия для решений в области *3* при $\psi_3 \to \infty$ и в области *2* при $\psi_2 \to 0$ получаются из сращивания асимптотических разложений (4.3), (4.4) при использовании (4.8) и (4.10)

$$x_3 = x_2,\ p_3(x_3) = p_2(x_2, 0),\ y_2(x_2, 0) = f(x_3) \tag{4.11}$$

$$u_3 \to -\frac{p_2}{\rho_0 u_0}\Bigg|_{\psi_2\to 0} = -p_3\frac{(\gamma-1)D}{C},$$

$$h_3 \to \frac{b^{1/6}}{\delta^{1/2}}\frac{p_2}{\rho_0}\Bigg|_{\psi_2\to 0} = p_3(\gamma-1)D\psi_3^{1/2} \quad (\psi_3 \to \infty)$$

Легко проверить, что внешнее краевое условие (4.11) для h_3 удовлетворяет уравнению (4.5) и краевым условиям (4.7), т. е. является решением для области *3*. Поэтому здесь необходимо определить функцию $u_3(x_3, \psi_3)$ из уравнения параболического типа (4.5) и краевых условий (4.7) и (4.11). В этой краевой задаче неизвестно распределение давления $p_3(x_3)$, которое следует найти из решения в области 2 уравнения эллиптического типа

$$u_0\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0, \qquad p_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \psi_2}\left(\frac{1}{\rho_0^2 u_0^3} - \frac{b^{1/2}}{\delta^{1/2}}\frac{1}{\rho_0 u_0}\right)^{-1} \tag{4.12}$$

при краевых условиях (4.9), (4.11). Распределения C_f и C_q будут задаваться тогда формулами

$$C_f\,\mathrm{Re}_\infty^{1/2} = \frac{C^2}{2(\gamma-1)}\left(1 + \frac{\delta^{1/2}}{b^{1/6}}\frac{2}{C}\psi_3^{1/2}\frac{\partial u_3}{\partial \psi_3}\right)$$

$$C_q\,\mathrm{Re}_\infty^{1/2}\,\mathrm{Pr} = \frac{CD}{2(\gamma-1)}[1+\delta^{1/2}b^{1/6}(\gamma-1)p_3(x_3)] \tag{4.13}$$

5. Пусть теперь $a \leqslant \delta \ll b \leqslant 1$, т. е. рассматривается обтекание неровностей, характерная протяженность которых b больше толщины пограничного слоя δ. Для таких неровностей может возникнуть уже необходимость рассмотрения возмущенной части равномерного набегающего потока с характерными размерами $x \sim y \sim O(b)$ (область *1*).

Согласно [1], малое возмущение давления Δp вызывает в основной части пограничного слоя (область *2*, $x \sim O(b)$ $y \sim O(\delta)$) малые возмущения функций течения

$$\Delta u \sim v \sim \Delta h \sim \mathrm{M}_\infty^2 \Delta p,\ \Delta\rho \sim \Delta p,\ \Delta y \sim \delta \mathrm{M}_\infty^2 \Delta p \tag{5.1}$$

Если неровность не взаимодействует с внешним равномерным потоком, то изменение толщины области *2* должно компенсироваться толщиной самой неровности, и тогда из (5.1) следует

$$\Delta y \sim \delta \mathrm{M}_\infty^2 \Delta p \sim O(a),\ \Delta p \sim O(a/\delta \mathrm{M}_\infty^2) \tag{5.2}$$

В случае взаимодействия неровности с равномерным набегающим потоком будет индуцироваться возмущение давления (2.3). В переходном режиме справедливы обе оценки (2.3) и (5.2), и тогда $b \sim O(\delta \mathrm{M}_\infty)$.

Поэтому при $\delta \ll b \leqslant \delta \mathrm{M}_\infty$, полагая, что в общем случае в области 3 неровность индуцирует вязкие возмущения и, следовательно, $a \sim O(\delta b^{2/3})$, $h_w \ll b^{1/3}$, оценки (3.1), (5.1) и (5.2) позволяют ввести в областях *3* и *2* соответственно независимые переменные и асимптотические разложения функций течения вида

$$x=bx_3, \quad \psi=\frac{\delta b^{2/3}}{M_\infty^2}\psi_3, \quad y=\delta b^{2/3}y_3+\ldots$$

$$u=b^{1/3}C\psi_3^{1/2}+b^{2/3}u_3+\ldots, \quad v=\delta v_3+\ldots \tag{5.3}$$

$$p=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}+\frac{b^{2/3}}{M_\infty^2}p_3+\ldots, \quad \rho=\frac{1}{M_\infty^2 b^{1/3}}\frac{1}{(\gamma-1)D\psi_3^{1/2}}+\frac{b^{1/3}}{M_\infty^2}\rho_3+\ldots$$

$$\mu=M_\infty^2 b^{1/3}D\psi_3^{1/2}+\ldots, \quad h=b^{1/3}D\psi_3^{1/2}+bh_3+\ldots$$

$$x=bx_2, \quad \psi=\frac{\delta}{M_\infty^2}\psi_2, \quad y=\delta y_0(\psi_2)+\delta b^{2/3}y_2+\ldots$$

$$u=u_0(\psi_2)+b^{2/3}u_2+\ldots, \quad v=\frac{\delta}{b^{1/3}}v_2+\ldots \tag{5.4}$$

$$p=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}+\frac{b^{2/3}}{M_\infty^2}p_2+\ldots, \quad \rho=\frac{\rho_0(\psi_2)}{M_\infty^2}+\frac{b^{2/3}}{M_\infty^2}\rho_2+\ldots$$

$$h=h_0(\psi_2)+b^{2/3}h_2+\ldots$$

Подстановка разложений (5.3) и (5.4) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $M_\infty\to\infty$, $\delta\to 0$, $\chi\to 0$, $\delta\ll b\leqslant\delta M_\infty$ показывают, что в первом приближении течение в области *3* описывается линеаризованными уравнениями пограничного слоя Прандтля (4.5), а в области *2* — линеаризованными уравнениями Эйлера, которые при условии затухания возмущений вверх по потоку при $x_2\to-\infty$ могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\rho_0u_0u_2+p_2=0, \quad p_2=p_2(x_2), \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=\frac{v_2}{u_0}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial\psi_2}=\frac{1}{\rho_0u_0} \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial\psi_2}=p_2\left(\frac{1}{M_0^2}-1\right), \quad \rho_0h_2=p_2, \quad (\gamma-1)\rho_0h_0=1, \quad \rho_2=\rho_0p_2$$

где $M_0(\psi_2)$ — профиль числа Маха в невозмущенном пограничном слое. Интегрирование уравнения для изменения толщины области *2* из (5.5) дает

$$y_2(x_2,\psi_2)-y_2(x_2,0)=p_2(x_2)\int\limits_0^{y_0}\left(\frac{1}{M_0^2}-1\right)dy_0 \tag{5.6}$$

Сращивание разложений (5.3) и (5.4) показывает, что опять справедливы условия (4.11), и так как в рассматриваемом случае при $\delta\ll b\ll\delta M_\infty$ толщина неровности должна компенсироваться изменением толщины области *2*, то условие $y_2(x_2,\psi_2)\to 0$ $(\psi_2\to\infty)$ позволяет из (5.6) получить распределение давления $p_3(x_3)$

$$p_3(x_3)=-\frac{f(x_3)}{L}, \quad L=\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{M^2}-1\right)dy_0 \tag{5.7}$$

где L — интеграл Пирсона [9], показывающий, до- ($L>0$) или сверхзвуковым ($L<0$) является в среднем невозмущенный пограничный слой. Так как для пограничного слоя около плоской пластины при $M_\infty\to\infty$, $\chi\to 0$ и $h_w\to 0$ интеграл Пирсона $L<0$ [10], то выпуклость $f(x_3)>0$ будет индуцировать положительное возмущение давления $p_3(x_3)>0$, как в сверхзвуковом потоке.

Для распределений коэффициентов напряжения трения и теплового потока будут справедливы формулы, аналогичные (4.13)

$$C_f \operatorname{Re}_\infty^{1/2} = \frac{C^2}{2(\gamma-1)}\left(1+b^{1/3}\frac{2}{C}\psi_3^{1/2}\frac{\partial u_3}{\partial \psi_3}\right),$$

$$C_q \operatorname{Re}_\infty^{1/2} \operatorname{Pr} = \frac{CD}{2(\gamma-1)}[1+b^{2/3}(\gamma-1)p_3(x_3)]$$

где $u_3(x_3, \psi_3)$ — решение соответствующего уравнения Прандтля (4.5) при заданном распределении давления (5.7).

6. Если характерная протяженность неровности $b \sim O(\delta \mathrm{M}_\infty)$, то справедливы все результаты разд. 5, только, согласно (2.3) и (5.2), толщина неровности уже не компенсируется изменением толщины основной части пограничного слоя — области *2* — и внешняя граница пограничного слоя смещается на величину, по порядку равную толщине неровности или толщине вязкого пристеночного слоя $\sim O(\delta b^{2/3})$.

Поэтому для возмущенной части равномерного набегающего потока (область *1*) вводятся новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$\begin{gathered} x=bx_1, \quad \psi=\frac{b}{\mathrm{M}_\infty}\psi_1, \quad y=\frac{b}{\mathrm{M}_\infty}\psi_1+\delta b^{2/3}y_1+\ldots \\ u=1+\frac{b^{2/3}}{\mathrm{M}_\infty^2}u_1+\ldots, \quad v=\frac{b^{2/3}}{\mathrm{M}_\infty}v_1+\ldots \\ p=\frac{1}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2}+\frac{b^{2/3}}{\mathrm{M}_\infty^2}p_1+\ldots, \quad \rho=1+b^{2/3}\rho_1+\ldots, \\ h=\frac{1}{(\gamma-1)\mathrm{M}_\infty^2}+\frac{b^{2/3}}{\mathrm{M}_\infty^2}h_1+\ldots \end{gathered} \tag{6.1}$$

Подстановка разложений (6.1) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\mathrm{M}_\infty\to\infty$, $\delta\to 0$, $\chi\to 0$ и $b\sim O(\delta \mathrm{M}_\infty)$ показывают, что в первом приближении течение в области *1* описывается линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_1}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_1}{\partial \psi_1}=0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=v_1 \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \psi_1}=-\rho_1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_1}-\frac{\partial p_1}{\partial x_1}=0, \quad (\gamma-1)h_1+\rho_1=\gamma p_1$$

которые при условии затухания всех возмущений вверх по потоку при $x_1\to-\infty$ могут быть сведены к одному уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 y_1}{\partial \psi_1^2}, \quad y_1\to 0 \quad (x_1\to-\infty) \tag{6.3}$$

Краевое условие при $\psi=0$ получается из сращивания разложений (5.4) и (6.1) в областях *2* и *1* и соотношения (5.6)

$$y_1(x_1, 0)=f(x_1)+p_1(x_1, 0)L \tag{6.4}$$

Для краевой задачи (6.3), (6.4) известно решение Даламбера при условии распространения возмущений слева направо: $y_1=\varphi(x_1-\psi_1)$.

Тогда из (6.4) при учете (6.2) получается выражение для распределения возмущения давления

$$L\frac{d\varphi}{dx_1}-\varphi=-f,\quad \varphi\to 0\quad (x_1\to-\infty),\quad p_1(x_1,0)=\frac{d\varphi}{dx_1}$$

$$p_3(x_3)=p_2(x_2)=p_1(x_1,0)=-\frac{e^{x_1/L}}{L^2}\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x_1)e^{-x_1/L}\,dx_1-\frac{f(x_1)}{L}$$

которое замыкает решение задачи об обтекании неровностей при $a\sim$ $\sim O(\delta^{5/3}M_\infty^{2/3})$ и $b\sim O(\delta M_\infty)$.

7. Для неровностей с характерной протяженностью $b\gg\delta M_\infty$ возмущение давления определяется соотношением (2.3), а изменение толщины основной части пограничного слоя — области 2 — будет (см. (5.1))

$$\Delta y\sim\delta M_\infty{}^2\Delta p\sim O\left(a\cdot\frac{\delta M_\infty}{b}\right)\ll a \tag{7.1}$$

т. е. внешняя граница пограничного слоя должна смещаться на характерную толщину неровности a. В наиболее общем случае изменение толщины области *2* по порядку величины равно толщине вязкого пристеночного слоя *3*: $\Delta y\sim O(\delta b^{2/3})$, и тогда

$$a\sim O(b^{5/3}/M_\infty),\quad \Delta p\sim O(b^{2/3}/M_\infty{}^2) \tag{7.2}$$

Поэтому в рассматриваемом случае достаточно исследовать только область *1*, для которой на основании оценок (7.1) и (7.2) справедливы независимые переменные и асимптотические разложения функций течения (6.1), в которых необходимо заменить величину δ на b/M_∞. Тогда при $\delta M_\infty\ll b\leqslant(\delta/M_\infty)^{3/5}$ в области *1* будет опять справедливо решение Даламбера $y_1=\varphi(x_1-\psi_1)$, которое должно удовлетворять очевидному краевому условию $y_1=f(x_1)$ $(\psi_1=0)$ и, следовательно, $p_3(x_3)=p_2(x_2)=p_1(x_1,0)=$ $=df/dx_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 124 с.
2. *Боголепов В. В., Нейланд В. Я.* Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений // Аэромеханика. М.: Наука, 1976. С. 104–118.
3. *Crocco L.* Considerations of the shock-boundary layer interaction // Proc. Conf. on high-speed aeronautics. Brooklyn, 1955. P. 75–112.
4. *Нейланд В. Я.* Особенности отрыва пограничного слоя на охлажденном теле и его взаимодействие с гиперзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 99–109.
5. *Нейланд В. Я.* К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 70–79.
6. *Нейланд В. Я.* Особенности взаимодействия и отрыва транскритического пограничного слоя // Уч. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 30–45.
7. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
9. *Pearson H., Holliday J. B., Smith S. F.* A theory of the cylindrical ejector supersonic propelling nozzle // J. Roy. Aeronaut. Soc. 1958. V. 62. № 574. P. 746–751.
10. *Липатов И. И.* Обтекание локальных пространственных неровностей на дне ламинарного пограничного слоя в режиме слабого гиперзвукового взаимодействия // Тр. ЦАГИ. 1980. Вып. 2079. С. 3–19.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1989