

УДК 533.6.011.8

© 1991 г.

**В. Э. ГЕРМ, Э. В. ПРОЗОРОВА**

## **ВЛИЯНИЕ РАЗРЕЖЕННОСТИ СРЕДЫ НА ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА СО СТРУЕЙ**

Целью данной работы является построение газодинамической картины обтекания сверхзвуковым спутным потоком тела, из кормовой части которого истекает сверхзвуковая струя. Рассматривается случай больших нерасчетностей струи ( $10^4 - 10^6$ ). Особенностью исследуемого режима обтекания является смешанный характер течения: часть возмущенной области занята разреженным газом, другая — плотным газом. Задача сводится к решению уравнения Больцмана для разреженного газа, системы уравнений Навье — Стокса для плотного газа струи и сшивки этих решений в переходной области. В имеющихся литературных данных отражены преимущественно результаты исследования полей течения тела без струи или струи без тела. И той и другой задаче ввиду сложности каждого из явлений посвящено много теоретических и экспериментальных работ.

Оценки характерных размеров и определяющих параметров, сделанные в данной работе, показывают, что на высотах до 250 км для описания течения при обтекании тела с плотной струей можно пользоваться уравнениями Навье — Стокса с условиями скольжения и скачка температуры на твердой поверхности. Модель сплошной среды адекватно описывает структуру течения в целом. Непосредственная окрестность обтекаемого тела при строгом решении задачи должна рассчитываться с привлечением кинетической модели среды.

В соответствии с полученными оценками в работе вначале решается полная система уравнений Навье — Стокса. Полученные решения служат первым приближением при построении полной картины обтекания. Влияние разреженности на структуру течения уточняется с помощью решения модельного уравнения Крукса, которое используется вместо уравнения Больцмана в силу чрезвычайной сложности последнего. На основе результатов численного исследования выявлены особенности физической картины течения, главной из которых является затекание части массы газа струи в область, примыкающую к боковой поверхности тела.

**1. Физическая картина обтекания тела со струей при больших нерасчетностях.** Рассмотрим истечение струи совершенного газа в спутный поток. Газы струи и потока будем считать идентичными по физическим свойствам. Определяющими параметрами при этом являются коэффициент нерасчетности  $n = \rho_0 / \rho_\infty$ , числа Маха и Рейнольдса струи ( $M_0 = u_0 / a_0$ ,  $Re_0 = \rho_0 u_0 L / \mu_0$ ), температурный фактор  $T_0 / T_\infty$ , показатель адиабаты  $\gamma = c_p / c_v$ , числа Рейнольдса и Маха набегающего потока ( $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$ ,  $M_\infty = u_\infty / a_\infty$ ), угол раскрытия сопла  $\theta_0$ , число Прандтля  $Pr = c_p \mu / \lambda$ . Здесь  $p$  — давление,  $u$  — скорость,  $T$  — температура,  $a$  — скорость звука,  $L$  — радиус выходного сечения сопла, индекс ноль относится к параметрам на срезе сопла,  $\infty$  — к параметрам набегающего потока.

Оценим размеры сверхзвуковой струи, истекающей в сверхзвуковой спутный поток, на основе модели идеального газа. Форма и размеры поверхности контактного разрыва, разделяющей спутный поток и струю, автомодельны в координатах  $x/X(x)$  и  $r/R(x)$  [1]. Здесь  $x$  — продольная координата вдоль оси,  $r$  — радиус текущей точки границы струи. Это значит, что форма струи описывается уравнением  $r/R(x) = \varphi[x/X(x)]$ , где  $\varphi$  — функция, которую можно определить из эксперимента или из численных

расчетов,  $R(x)$  и  $X(x)$  определяются через нерасчетность и параметры набегающего потока и струи.

Определим характерный поперечный размер струи  $R_y$ , как максимальный радиус первой «бочки», а характерный продольный размер  $R_x$  — как расстояние от среза сопла до сечения, в котором достигается этот максимальный радиус. Эти величины вычисляются опять по характерным параметрам задачи. Форма начального участка границы струи удовлетворительно описывается параболой [2]. Поэтому для оценок построим симметричную относительно оси параболу, проходящую через точки с координатами  $(R_x, R_y)$ ,  $(R_x, -R_y)$ ,  $(0, 0)$  в системе координат с началом в сечении среза сопла, и определим радиус параболы в передней части по формуле  $R_c = R_y^2 / 2R_x$ .

Оценки размеров струи проведем при следующих предположениях:  $L = 0,5$  м,  $\gamma = 1,4$ ,  $M_0 = 4,7$ ,  $M_\infty = 7,8$ ,  $p_0 = 87 \cdot 10^2$  Н/м<sup>2</sup>. Из оценок следует, что размеры струи растут с увеличением высоты полета и, начиная с высоты  $H = 60$  км, радиус кривизны передней части струи становится больше размеров обтекаемого тела. Это значит, что в качестве характерного размера, входящего в определение чисел Рейнольдса и Кнудсена, по которым классифицируются режимы течения, необходимо использовать радиус кривизны струи в ее передней части  $R_c$ .

С учетом этого обстоятельства проведем классификацию режимов течения подобно тому, как это сделано в [3] для случая обтекания тел сверхзвуковым потоком: 1) режим сплошной среды ( $H < 105$  км), здесь ударная волна рассматривается как поверхность разрыва; 2) режим сомкнувшегося вязкого слоя ( $105 < H < 290$  км), где необходимо совместно учитывать вязкостные эффекты в утолщенной ударной волне и в пограничном слое; 3) переходный режим ( $H > 290$  км). Адекватное описание достигается на основе уравнения Больцмана. Размеры расширяющейся струи оказываются весьма велики в масштабе длины свободного пробега даже на значительных высотах (до 290 км). По этой причине свободномолекулярный режим течения здесь не реализуется. Однако локальные числа Кнудсена в непосредственной окрестности обтекаемого тела могут быть велики.

**2. Численное моделирование задачи на основе уравнений Навье — Стокса.** В качестве математической модели для построения общей картины течения используется полная система уравнений Навье — Стокса для совершенного газа, записанная в цилиндрической системе координат в безразмерной форме [3]. Течение во всей области предполагается ламинарным и симметричным относительно оси. Все величины приведены к соответствующим значениям в набегающем потоке. Коэффициенты вязкости и теплопроводности  $\mu$ ,  $\lambda$  считаются известными степенными функциями температуры  $\sim T^{1/2}$  (модель гладких упругих шаров). В качестве обтекаемого тела рассматривается комбинация цилиндра и конуса с углом полураствора  $45^\circ$ . Длина образующей цилиндра равна радиусу выходного сечения сопла  $L$ .

Для численного решения использовался метод конечных разностей в сочетании с методом установления по времени. Аппроксимация нестационарного оператора проводилась двумя методами: методом Пикара [4] и методом дробных шагов на постоянной и наравномерной сетках [5], сгущающихся в зонах резкого изменения газодинамических переменных. Результаты расчетов разными методами и на разных сетках анализировались и сравнивались. Из сравнения сделаны выводы об идентичности газодинамических картин течения, полученных всеми методами.

Выяснено, что по затратам машинного времени метод Пикара уступает для стационарной задачи методу «дробных» шагов. Вывод закономерный и ожидаемый, поскольку метод разрабатывался для решения задач с быстро изменяющимися и зависящими от функции и ее производных коэффициентами переноса и сильной нестационарностью течения с целью преодоления трудностей, связанных с постановкой граничных условий на дробных шагах, имеющих в схемах расщепления для

нелинейных задач с нелинейными граничными условиями. Нестационарные задачи решались только методом Пикара.

Три уравнения системы, выражающие собой законы сохранения массы и импульса, записывались в дивергентной форме, а уравнение энергии — в недивергентной. Необходимость такой записи диктуется следующими соображениями. В течениях с большими числами Маха вклад кинетической энергии в полную энергию намного превышает вклад тепловой энергии. При аппроксимации уравнения энергии в консервативной форме малые относительные ошибки при определении полной энергии могут привести на грубой сетке к большим ошибкам в определении температуры. Поэтому используется закон сохранения внутренней энергии.

Решение системы уравнений ищется в области, включающей в себя невозмущенный набегающий поток, скачок уплотнения в спутном потоке, обтекаемое тело и начальный участок расширяющейся струи. В качестве крайних условий использовалось условие невозмущенности потока на бесконечности, на срезе сопла задавались значения газодинамических величин. На теле для учета влияния разреженности газа использовались асимптотические условия скольжения и скачка температуры при условии полной термической аккомодации и полностью диффузном распределении отраженных молекул.

Данная постановка задачи с граничными условиями на бесконечности в практических расчетах заменялась постановкой аналогичных граничных условий на границах конечной области. Для проверки ошибки аппроксимации бесконечной области конечной применялся прием внутренней сходимости, т. е. решение искалось сначала в одной области, а потом в более широкой, включающей в себя первую. В случае совпадения решения с заданной точностью считалось, что расчетная область выбрана верно.

Граничные условия на выходных границах моделируют вытекание газа из расчетной области. В расчетах использовались «мягкие» граничные условия вида  $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$ ,  $f = (\rho, U, V, T)$ . Проверка их влияния осуществлялась приемом «внутренней сходимости». Для аппроксимации конвективных членов системы использовалась схема «донорных ячеек» [6].

В качестве начальных условий задавались параметры однородного невозмущенного потока газа. Решение искалось на сетке, состоящей из 1600 узлов ( $40 \times 40$ ). Контрольные расчеты проводились также на сетке из 6400 узлов ( $80 \times 80$ ). Временной шаг выбирался переменным, малым в начальный момент времени и постепенно увеличивающимся. Максимальное значение шага определялось из условий устойчивости явной схемы.

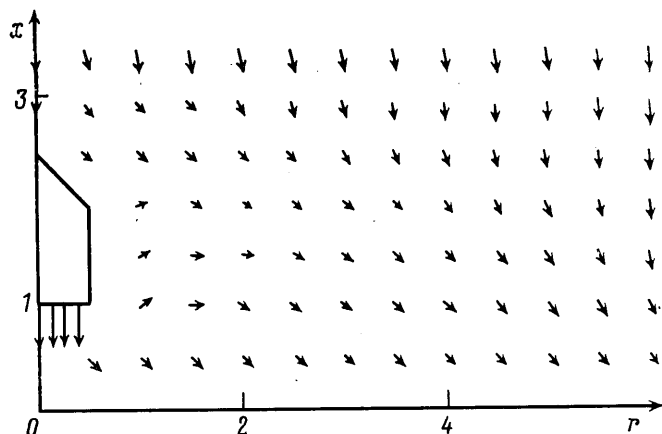
Как уже отмечалось, изучаемое течение резко неоднородное и включает в себя зоны больших градиентов газодинамических функций. Неоднородность решения задачи в расчетной области привела к необходимости проверки полученных результатов на сгущающихся сетках. Сгущение сетки проводилось в одном координатном направлении  $r$  из требований минимизации функционала по методике, развитой в [5]. В новых координатах сетка равномерная. В физической плоскости строится обратное преобразование.

Для стационарного течения системы решается двумя методами: методом дробных шагов и по схеме Пикара.

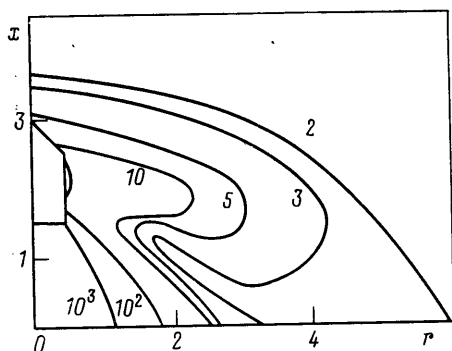
Параметрические исследования стационарного случая, проведенные при разных числах Рейнольдса и разных степенях нерасчетности ( $1,5 \leq \text{Re}_\infty \leq 1000$ ,  $10^3 \leq n \leq 5 \cdot 10^5$ ), позволили сделать следующие выводы.

При небольших значениях степени нерасчетности ( $n \sim 10^3$ ) струя расширяется незначительно и наблюдается известная картина обтекания, характерная для малых  $n$ . С ростом нерасчетности область, занятая расширяющейся струей, увеличивается и при  $n \sim 10^4$  часть массы газа струи разворачивается и движется в направлении внешнего потока. При дальнейшем росте  $n$  наблюдается качественное изменение картины течения: движущаяся в направлении набегающего потока часть струи создает в окрестности обтекаемого тела область высокой плотности. При этом тело обтекается в основном не внешним потоком, а газом, истекающим из сопла. Спутный поток обтекает не обособленное тело, а тело с прилегающей к нему зоной высокой плотности. При больших нерасчетностях эта конфигурация имеет значительно большие размеры, чем размеры самого тела.

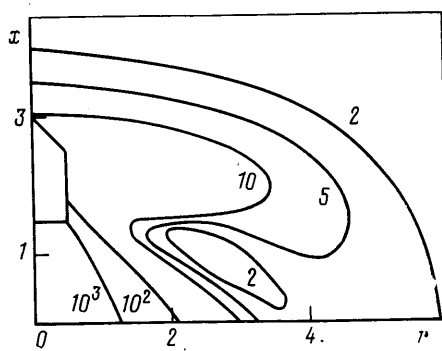
При уменьшении числа  $\text{Re}_\infty$  увеличивается толщина головного скачка уплотнения, пограничного слоя на теле и слоя смешения, разделяющего собственно струю и обтекающий ее поток. Происходит их смыкание, и разделение этих областей может быть только условным.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

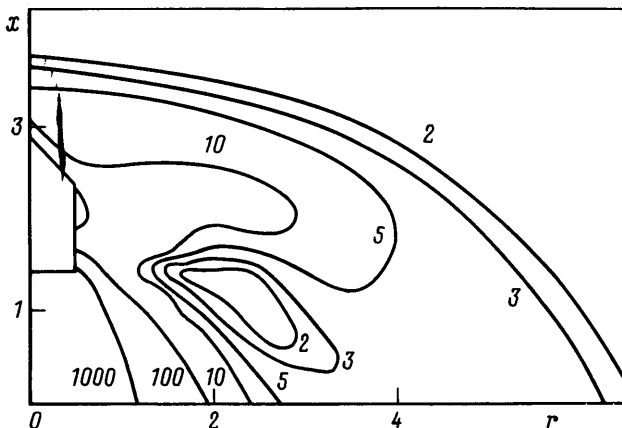
Найденные распределения газодинамических полей подтверждают предварительные выводы, сделанные на основе приближенного расчета: присутствие плотной струи приводит к повышению плотности газа во всей прилегающей к телу зоне. Только непосредственно вблизи «носика» локальное число Кнудсена приближается к единице и необходимо исследование этой области на основе кинетической теории.

На фиг. 1 представлено поле скоростей для  $n=4,1 \cdot 10^5$ ,  $Re_\infty=15$ ,  $\gamma=1,4$ , здесь и далее масштаб по  $r$  и  $x$  указан в длинах образующей цилиндра  $L$ .

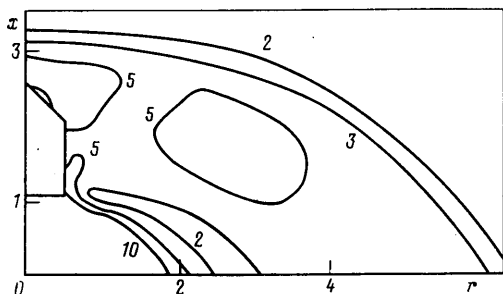
**3. Решение задачи обтекания тела со струей потоком разреженного газа на основе модельного уравнения Крука.** Адекватное описание течения в области конечных значений чисел Кнудсена достигается на основе решения уравнения Больцмана. Поскольку решение этого уравнения весьма трудоемко, было выбрано уравнение Крука, являющееся модельным для разреженного газа.

Уравнение Крука решается в тех же координатах, что и уравнения Навье — Стокса. Граничные условия для молекул, движущихся внутрь области возмущения, задаются в виде максвелловского распределения с параметрами, соответствующими параметрам набегающего потока. Отражение молекул от поверхности обтекаемого тела считается диффузным с полной термической аккомодацией, причем температура поверхности и температура газа струи считаются одинаковыми и равными  $T_0$ . Плотность отраженных частиц определяется из условия непротекания.

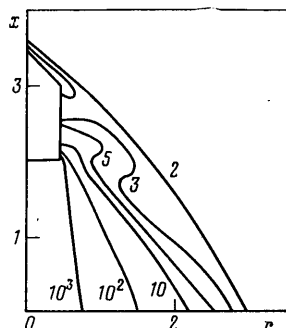
Поставленная краевая задача решается конечно-разностным методом [7]. Модификация схемы связана с использованием неравномерной в фи-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

ическом пространстве сетки, состоящей из  $7 \cdot 10^5$  узлов ( $30 \times 30 \times 19 \times 6 \times 7$ ). Сравнение результатов расчета по модели Крукса с результатами, полученными в рамках уравнений Навье — Стокса, позволяет сделать вывод, что их различие в основном количественное. Основные закономерности течения правильно описываются уравнениями Навье — Стокса. Максимальные различия решений наблюдаются в области скачка уплотнения в спутном потоке и выражаются в большем отходе скачка уплотнения при решении уравнения Крукса и увеличении ширины скачка.

На фиг. 2, 3 приведены изохоры для параметров течения  $n=4,1 \cdot 10^5$ ,  $Re_\infty=15$ ,  $\gamma=1,667$ ,  $M_\infty=7,8$ , полученные на основании моделей Навье — Стокса и Крукса соответственно.

**4. Решение нестационарной задачи методом Пикара.** На основании решения системы уравнений Навье — Стокса методом Пикара по схеме, описанной в разд. 2, изучена перестройка течения при внезапном изменении нерасчетности струи. Результаты расчета плотности представлены на фиг. 4—6 при изменении  $n$  от  $4,1 \cdot 10^5$  до  $4,1 \cdot 10^4$ ,  $Re_\infty=15$ ,  $\gamma=1,4$  в моменты времени  $t=0, 13, 42$  (время безразмерное).

Главное отличие от стационарного режима состоит в формировании вихря вблизи фронта волны сжатия (при больших числах Рейнольдса была бы ударная волна) и сносе этого вихря при уменьшении нерасчетности.

Остальные особенности, связанные с разреженностью газа набегающего потока и высокой плотностью струи, остаются и в нестационарном течении. Образование вихря связано с «выпрямлением» изохор, поскольку снижение нерасчетности струи приводит к обычной картине обтекания тела со струей, при которой эффекты разреженности среды выражены сла-

бее, ударная волна приближается к телу, а «избыток» затекшего в результате разворота струи газа «выдавливается» вниз по потоку.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Храмов Г. А., Чекмарев С. Ф. Автомодельное представление структуры газодинамической области при истечении сильно недорасширенной струи газа в спутный гиперзвуковой поток // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 6. С. 94–99.
2. Альбини. Приближенный расчет структуры недорасширенной струи // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 8. С. 219–221.
3. Кокошинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М.: Изд-во МГУ, 1980. 247 с.
4. Прозорова Э. В. К вопросу о решении нелинейного уравнения теплопроводности // Вест. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1977. № 19. Вып. 4. С. 110–113.
5. Ковеня В. М., Яценко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
6. Шахов Е. М. Численные методы решения аппроксимирующих кинетических уравнений // Численные методы в динамике разреженных газов. Вып. 2. М., 1975. С. 35–76.

Ленинград

Поступила в редакцию  
19.XII.1988