

УДК 533.6.014

© 1991 г.

Ю. С. КОСОЛАПОВ

## ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ ПЛОСКИХ СОСУДОВ С БОЛЬШИМИ УГЛАМИ НАКЛОНА СТЕНОК

Получены численные решения задач о стационарном сверхзвуковом истечении газа из плоских бесконечных сосудов с углами наклона стенок к плоскости симметрии  $\theta_c$  в диапазоне  $90^\circ < \theta_c \leq 180^\circ$ . Задачи ставились и решались в плоскости годографа скорости. Показано, что начиная с некоторого  $\theta_c$  механизм запираания потока определяется не приходом предельной характеристики в кромку отверстия (классический механизм запираания), а взаимодействием струи с внешней поверхностью стенок сосуда. Исследовано влияние  $\theta_c$  и давления окружающего пространства на локальные и интегральные характеристики потоков.

В рассматриваемых задачах угол  $\theta_c$ , отношение давлений  $\varepsilon_a = p_a/p_0$  ( $p_0$  — давление торможения газа в сосуде;  $p_a$  — давление в окружающем пространстве) и показатель адиабаты  $\kappa$  полностью определяют истечение газа из сосуда.

Основные результаты теоретического исследования истечения газа из плоского сосуда получены с помощью метода годографа скорости. Краевые задачи для уравнения Чаплыгина в плоскости годографа решались как аналитически [1–5], так и численно [6–10] в широком диапазоне изменения  $\varepsilon_a$  и  $\theta_c$ .

Задачи о стационарных трансзвуковых незапертых и запертых истечениях газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий решались численно и непосредственно в физической плоскости [11–15]. В этом случае краевые задачи формулировались для системы нестационарных уравнений Эйлера, а стационарные решения находились в процессе установления по времени.

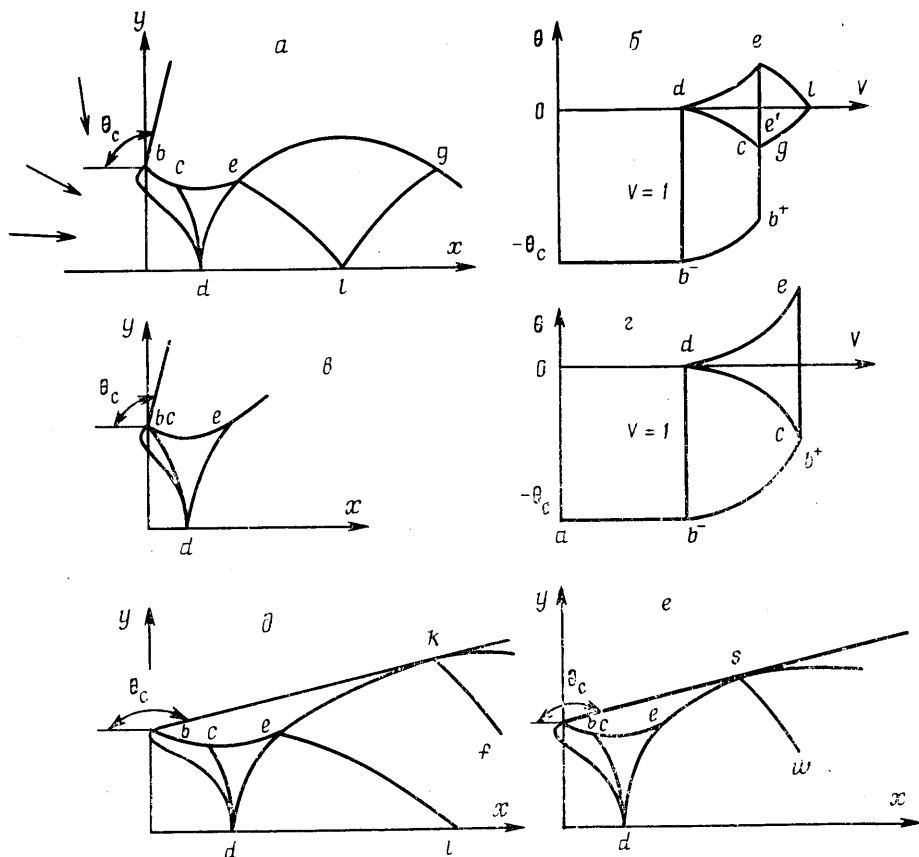
Влияние  $\varepsilon_a$  и  $\kappa$  на локальные и интегральные характеристики потоков при истечении газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий с  $\theta_c = 90^\circ$  изучалось в [11, 12]. Подробное исследование влияния  $\theta_c$  (в диапазоне  $0 < \theta_c \leq 90^\circ$ ) на трансзвуковое незапертое истечение газа из плоского сосуда проведено в [10].

Задача о трансзвуковом истечении струи газа с равновесно возбужденными колебательными степенями свободы молекул из бесконечного симметричного плоского сосуда решена в [8]. Эта задача ставилась в плоскости годографа скорости для уравнения типа Чаплыгина и решалась численно с помощью разностных схем. Изучено влияние  $\theta_c$ , температуры торможения и  $\varepsilon_a$  на коэффициент расхода.

Решение задачи о запертом истечении газа из плоского сосуда, приведенное в [2], справедливо для любых  $\theta_c$ . Однако в диапазоне  $90^\circ < \theta_c \leq 180^\circ$  вычисления локальных и интегральных характеристик запертых потоков не проводились. Задачи о незапертых трансзвуковых истечениях газа в указанном диапазоне углов  $\theta_c$  не решались.

1. Рассмотрим постановки задач о стационарном сверхзвуковом истечении идеального газа из плоского сосуда с прямолинейной образующей контура. На фиг. 1, а в физической плоскости ( $x, y$  — прямоугольные декартовы координаты) приведена схема сверхзвукового незапертого истечения газа. Здесь ось  $x$  совпадает с линией симметрии течения;  $b$  — выходная кромка сосуда;  $bd$  — звуковая линия;  $cd$  — предельная характеристика, отделяющая трансзвуковую область влияния  $bcd$  от течения правее  $cd$ , малые возмущения которого не оказывают влияния вверх по потоку;  $de$  — характеристика второго семейства, исходящая из точки  $d$ . Заданными величинами являются  $\theta_c$ ,  $\varepsilon_a$  и  $\kappa$ .

Отображение данной области на плоскость годографа ( $V, \theta$ ) представлено на фиг. 1, б, где  $V = |V|/a_*$ ,  $a_*$  — критическая скорость звука;  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ;  $b^-b^+$  — волна разрежения,



Фиг. 1

соответствующая течению Прандтля — Майера в точке  $b$  физической плоскости. Остальные обозначения идентичны.

Схема сверхзвукового запертого течения приведена на фиг. 1,  $в$ , где обозначения аналогичны принятым на фиг. 1,  $а$ . Но здесь участок границы струи  $bc$ , возмущения с которого могли бы прийти на звуковую линию и оказать влияние вверх по потоку, вырождается в точку, совпадающую с кромкой сосуда  $b$ . Поэтому дальнейшее уменьшение  $\epsilon_a$  (при  $\epsilon_a \leq \epsilon_{**}$ ) не оказывает влияние на поток вверх по течению от  $cd$  и поток оказывается запертым.

Отображение схемы течения, приведенной на фиг. 1,  $в$ , на плоскость географа представлено на фиг. 1,  $г$ .

При сверхзвуковом истечении газа из сосуда с  $90^\circ < \theta_c \leq 180^\circ$  при достаточно малых  $\epsilon_a$  возможно взаимодействие струи с внешней поверхностью стенки сосуда. Если вектор скорости на границе струи составляет в точке взаимодействия со стенкой нулевой угол, то струя касается стенки (безударное взаимодействие), если угол ненулевой, то реализуется ударное взаимодействие струи со стенкой.

Рассмотрим сначала касание струей стенки сосуда. Будем считать, что касание произошло в результате некоторого квазистационарного процесса, вызванного медленным уменьшением  $\epsilon_a$  и начавшегося из состояния, в котором струя не взаимодействовала со стенкой. Если касание струей стенки произойдет до того, как точка  $c$  предельной характеристики совпадет с кромкой отверстия, то с момента касания поток окажется запертым (фиг. 1,  $д$ ).

Действительно, при меньших  $\epsilon_a$  малые возмущения с той части границы струи, на которой давление равно давлению окружающего пространства (правее точки  $k$  на фиг. 1,  $\partial$ ), не будут проникать в трансзвуковую область влияния  $bcd$  и расход останется неизменным. В этом случае предельной характеристикой, отделяющей область влияния от остальной части потока, будет левая крайняя характеристика, исходящая из точки касания струей стенки сосуда ( $kf$  на фиг. 1,  $\partial$ ). Очевидно, должен существовать некоторый угол наклона стенки сосуда  $\theta_{c*}$ , такой, что при  $\theta_c < \theta_{c*}$  заширение будет определяться совпадением точки с предельной характеристики с кромкой отверстия, а при  $\theta_c > \theta_{c*}$  — касанием струей стенки сосуда. По величине  $\theta_{c*}$  равен углу, при котором  $\epsilon_{**}$  совпадает с отношением давлений  $\epsilon_{**h}$ , соответствующим касанию струей стенки сосуда, где  $\epsilon_{**} = (1 - m^2 V_{**}^2)^{\chi/(\chi-1)}$ ,  $V_{**}$  — решение уравнения

$$W = \theta_c / 2 \quad (1.1)$$

$$W = m^{-1} \arctg(mB) - \arctg B, \quad m^2 = (\chi - 1) / (\chi + 1), \quad B^2 = (V^2 - 1) / (1 - m^2 V^2)$$

Уравнение (1.1) выражает хорошо известный факт, что в плоскости годографа в переменных  $W$ ,  $\theta$  координата  $W$ , соответствующая точке пересечения характеристик  $b-b^+$  и  $dc$ , равна  $\theta_c / 2$ .

Заметим, что величина расхода запертого течения при безударном взаимодействии не является максимально возможной для данного сосуда. Так, при ударном взаимодействии отношение давлений  $\epsilon_b = p_a / p_0$ , где  $p_b$  — давление газа в застойной области  $bcesb$  (фиг. 1,  $e$ ; там же  $sw$  — ударная волна), всегда меньше  $\epsilon_{**h}$ , а расход соответственно больше, чем при безударном взаимодействии.

Теоретически схемы с ударным взаимодействием возможны для сколь угодно малых  $\epsilon_b$ . В частности, для схем с  $\epsilon_b \leq \epsilon_{**}$  точка с характеристики  $cd$  совпадает с кромкой отверстия и расход имеет максимально возможное для данного сосуда значение. Физически ударное взаимодействие может реализоваться, например, в результате переходного процесса, возникающего при мгновенном изменении  $\epsilon_a$  до величины, существенно меньшей  $\epsilon_{**h}$ . Очевидно, в таких случаях схемы ударного взаимодействия будут зависеть от «предыстории» процесса. Так, от состояния, при котором струя не взаимодействовала со стенкой, на ударное взаимодействие можно выйти в результате мгновенного изменения  $\epsilon_a$  до  $\epsilon_a \ll \epsilon_{**h}$  и нельзя — в результате медленного (квазистационарного) уменьшения  $\epsilon_a$ , так как при  $\epsilon_a = \epsilon_{**h}$  наступит касание и дальнейшее уменьшение  $\epsilon_a$  никак не скажется на  $\epsilon_b = \epsilon_{**h}$ .

В рассматриваемой постановке задачи конкретный режим ударного взаимодействия определяется заданием наряду с  $\epsilon_a$  еще и  $\epsilon_b$ . В данной работе структура струи при ударном взаимодействии и ее зависимость от предыстории процесса не исследовались. Для таких режимов получены лишь расходы (вплоть до максимального) и соответствующие звуковые линии. В этом случае задача решалась в области до ударной волны, исходящей из точки взаимодействия струи со стенкой, а ее постановка (задание только  $\epsilon_b$ ) ничем не отличалась от классической.

Рассмотрим математическую формулировку задач в плоскости годографа скорости. Уравнение, описывающее стационарное плоское безвихревое течение идеального газа в переменных годографа, имеет вид

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + V^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial V^2} + (1 + M^2) V \frac{\partial \Psi}{\partial V} = 0 \quad (1.2)$$

$$d\Psi = -\rho V \sin \theta dx + \rho V \cos \theta dy, \quad M = |V|/a$$

Здесь  $\Psi$  — функция тока;  $a$  — местная скорость звука;  $\rho$  — плотность, отнесенная к критической плотности  $\rho^*$ .

Незапертому сверхзвуковому течению соответствует обобщенная задача Трикоми для уравнения (1.2). В этом случае граничные условия следующие:

$$od: \Psi=0; oa: \Psi=\theta/\theta_c; ab^{-}b^{+}: \Psi=1; b^{+}c: \Psi=1.$$

Здесь и далее  $\Psi$  отнесена к  $Q/2$ , где  $Q$  — расход. При  $\theta_c \leq \theta_{c*}$  запертому сверхзвуковому течению соответствует задача Трикоми для уравнения (1.2). Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$od: \Psi=0; oa: \Psi=\theta/\theta_c; ab^{-}b^{+}: \Psi=1$$

При  $\theta_c > \theta_{c*}$  запертому течению соответствует обобщенная задача Трикоми с  $\varepsilon_a \leq \varepsilon_{**k}$ . Величину  $\varepsilon_{**k}$  в данном случае (в отличие от  $\varepsilon_{**}$  при  $\theta_c \leq \theta_{c*}$ ) нельзя вычислить заранее по  $\theta_c$  из соотношения (1.1). В настоящей работе  $\varepsilon_{**k}$  находилось в результате решения задачи о касании струей стенки сосуда.

Для этого в плоскости годографа (фиг. 1, б) решались четыре задачи: обобщенная задача Трикоми в области  $oab^{-}b^{+}c$  (из ее решения находились условия на  $dc$  и участок границы струи  $b^{+}c$ ); задача с данными на  $dc$  и  $ce$  в области  $dce$  (после решения этой задачи находились условия на  $de$ , а также участок границы струи  $ce$  в физической плоскости); задача Гурса в области  $e'del$  с данными на характеристиках  $de$  и  $de'$  ( $de'$  — характеристика симметричная относительно оси  $x$  характеристике  $de$ ) и задача в области  $elg$  с данными на характеристике  $el$  (полученными из решения задачи Гурса) и  $eg$ . (Подробнее ознакомиться с постановкой указанных задач можно в [4].)

По результатам решения последней задачи в физической плоскости достраивался участок границы струи  $eg$ . Таким образом, завершалось построение границы струи, соответствующей первой «бочке». Если полученная граница струи не касалась стенки, то задавалось новое значение  $\varepsilon_a$  (несколько меньшее предыдущего) и решение повторялось до тех пор, пока не получалось касание.

По найденным в плоскости годографа решениям задач, т. е. по известной функции  $\Psi(V, \theta)$ , осуществляется возврат в физическую плоскость по формулам

$$x = \frac{1}{\rho V} \int_{-\theta_c}^{\theta} \left( V \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial V} - \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\theta,$$

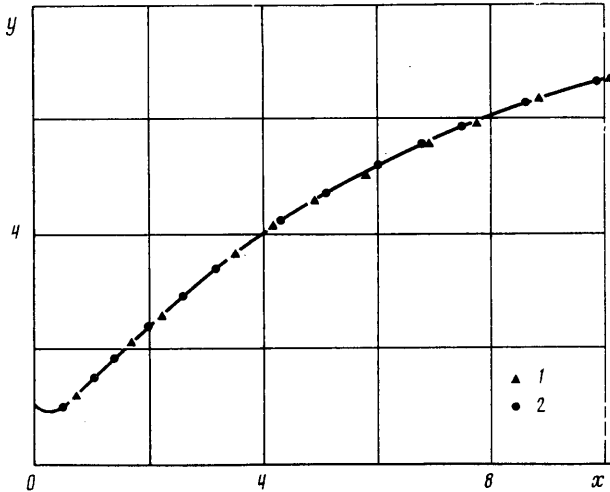
$$y = \frac{1}{\rho V} \int_{-\theta_c}^{\theta} \left( V \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial V} + \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\theta$$

Здесь интегрирование проводится вдоль линий  $V = \text{const}$ .

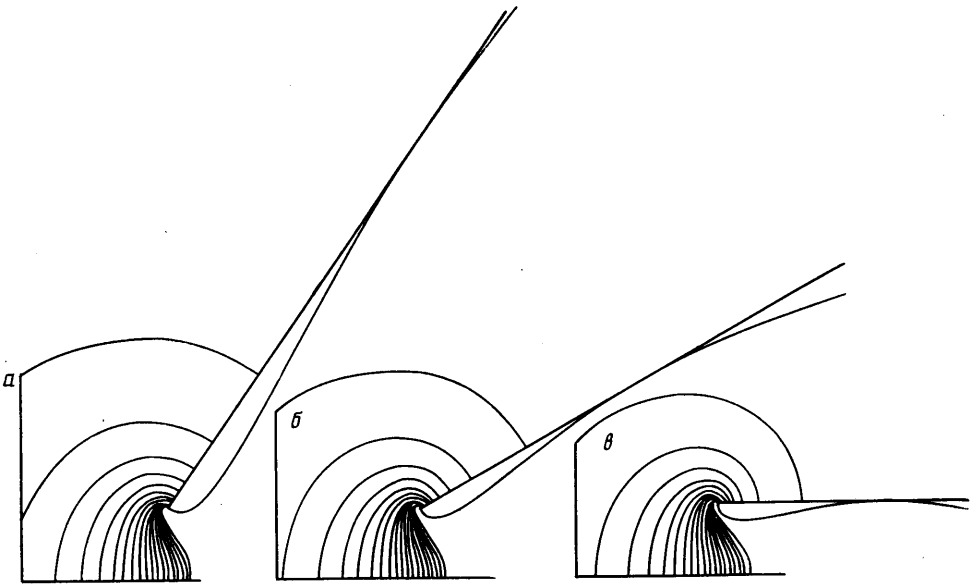
2. Задача Трикоми и обобщенная задача Трикоми решались численно модифицированным методом [7] (метод I). (Модификация метода [7] изложена в [9]). Задача с данными на  $dc$  и  $ce$  в области  $dce$ , задача Гурса в области  $e'del$  с данными на  $de$  и  $de'$  и задача с данными на  $el$  и  $eg$  в области  $elg$  решались с помощью разностной схемы, предложенной в [7] для расчета сверхзвуковых течений.

Система алгебраических уравнений, получающаяся в результате конечно-разностной аппроксимации уравнения (1.2), решалась методом последовательной верхней релаксации в области дозвуковых скоростей и маршевым методом — в области сверхзвуковых. Подробности организации вычислительного процесса и информацию о точности и достоверности численных решений задач Трикоми можно найти в [9, 10]. Сходимость итерационного процесса контролировалась по невязке разностных уравнений. Так, при решении задачи Трикоми для сосуда с  $\theta_c = 90^\circ$  на сетке, содержащей 1500 ячеек, для достижения невязки  $10^{-6}$  требовалось 68 итераций. Соответствующее время счета на ЭВМ ЕС-1061 составляло 5 с.

Точность расчета границы струи методом I оценивалась сравнением с результатами, полученными методом характеристик (метод II) непосредственно в физиче-



Фиг. 2

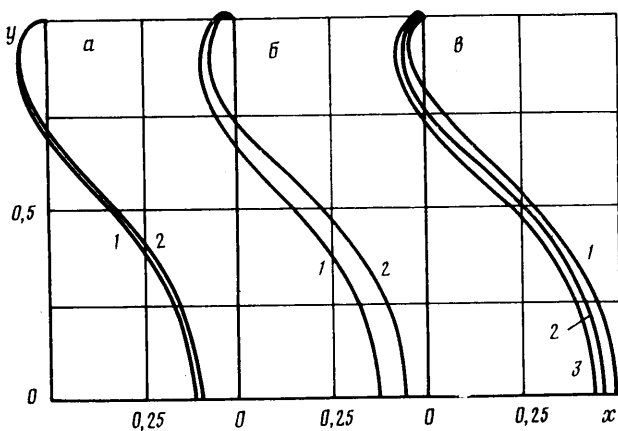


Фиг. 3

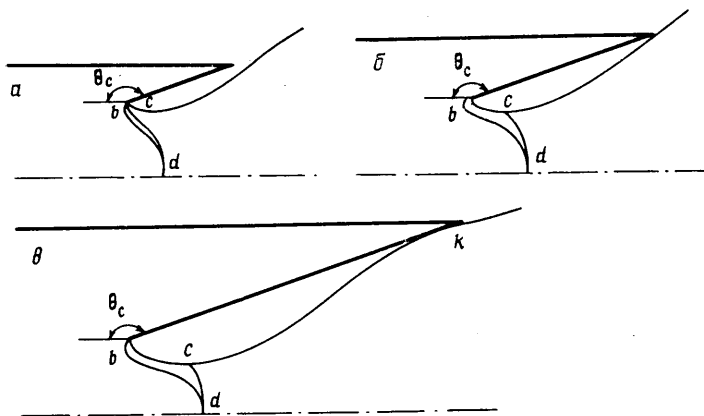
ской плоскости<sup>1</sup>. При расчете методом II начальные данные  $\theta = \theta(y)$  на звуковой линии брались из расчета методом I. В качестве объекта для сравнения была выбрана граница струи, истекающей из плоского сосуда с  $\theta_0 = 90^\circ$  при  $\epsilon_0 = \epsilon_{\infty}$ . (Здесь и в дальнейшем все результаты приведены для газа с  $\kappa = 1,4$ .)

На фиг. 2 сплошной линией показана граница струи, рассчитанная методом II. (Зависимость  $\theta = \theta(y)$  на звуковой линии задавалась в 100 точках.) Там же точками 1 и 2 нанесены результаты расчетов методом I на сетках с  $31 \times 51$  и  $61 \times 101$  узлами соответственно. Здесь 31 и 61 — количество узлов при разбиении расчетной области вдоль  $\theta$ . Координаты точки максимума ( $x_m, y_m$ ) границы струи (в пределах первой бочки), вычисленные методом II,  $x_m = 17,52$ ;  $y_m = 7,621$ , а методом I (сетка  $31 \times 51$ ) —  $x_m = 17,57$ ;  $y_m = 7,638$ . Видно, что соответствие результатов расчетов методами I и II хорошее. Здесь и в дальнейшем  $x$  и  $y$  отнесены к полуширине щели.

<sup>1</sup> Расчеты методом характеристик по просьбе автора выполнены Н. И. Тилляевой.



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Рассмотрим влияние угла наклона стенки сосуда на локальные и интегральные характеристики потоков при изменении  $\theta_c$  и  $\epsilon_a$  в диапазоне  $90^\circ < \theta_c \leq 180^\circ$  и  $\epsilon_{**} \leq \epsilon_a < \epsilon_*$ .

В результате исследования запертых режимов установлено, что смена механизмов запираания происходит при  $\theta_{c*} = 124,5^\circ$ . Таким образом, при  $\theta_c \leq 124,5^\circ$   $\epsilon_{**}$  находится из уравнения (1.1), а  $\epsilon_{**h}$  (при  $\theta_c > 124,5^\circ$ ) — в результате численного решения краевых задач для уравнения (1.2). Значения  $\epsilon_{**}$ ,  $\epsilon_{**h}$ , соответствующие значения коэффициентов расхода  $\mu_{**}$  и  $\mu_{**h}$ , вычисленные в настоящей работе, приведены ниже (где  $\mu = Q/(a_* r_* h)$ ,  $h$  — ширина щели):

$\theta_c$ , град	100	110	120	124,5	130	140	150	160	170	180
$\epsilon_{**}$	0,0267	0,0178	0,0115	0,0093	0,0071	0,0042	0,0024	0,0013	0,00063	0,00029
$\mu_{**}$	0,8372	0,8259	0,8153	0,8110	0,8056	0,7962	0,7885	0,7821	0,7762	0,77125
$\epsilon_{**h}$	—	—	—	0,0093	0,0152	0,033	0,0582	0,1075	0,1732	0,2711
$\mu_{**h}$	—	—	—	0,8110	0,8051	0,7954	0,7853	0,7726	0,7558	0,7296

Здесь при  $\theta_c > \theta_{c*}$  под  $\epsilon_{**}$  подразумевается то отношение давлений в застойной зоне, начиная с которого расход имеет максимально возможное значение для данного сосуда. При этом  $\epsilon_{**}$  находится из уравнения (1.1).

Общее представление о картине течения на запертых режимах с  $\epsilon_a = \epsilon_{**h}$  дает фиг. 3, где приведены линии  $V = \text{const}$  (с шагом 0,05 в диапа-

$\theta_c = 120^\circ$		$\theta_c = 150^\circ$		$\theta_c = 180^\circ$	
$\epsilon_a$	$\mu$	$\epsilon_a$	$\mu$	$\epsilon_a$	$\mu$
0,0115	0,8154	—	—	—	—
0,0389	0,8130	0,0582	0,7853	—	—
0,1132	0,8057	0,0996	0,7805	0,2711	0,7292
0,1745	0,7983	0,147	0,7739	0,2918	0,7221
0,2166	0,7912	0,2107	0,7614	0,3140	0,7159
0,2711	0,7805	0,2711	0,7498	0,3380	0,7091
0,3140	0,7711	0,3140	0,7381	0,3640	0,7010
0,3640	0,7574	0,3640	0,7235	0,3926	0,6931
0,4249	0,7373	0,4249	0,7025	0,4249	0,6811

зоне  $0,1 \leq V \leq 1$  и граница струи при  $\theta_c = 124,5^\circ$  (а),  $\theta_c = 150^\circ$  (б),  $\theta_c = 180^\circ$  (в). (На фиг. 3 в качестве характерного масштаба выбрана полуширина щели.)

Звуковые линии, полученные при  $\epsilon_a = \epsilon_{**}$  (кривые 1) и  $\epsilon_{**h}$  (кривые 2) для сосуда с  $\theta_c = 150^\circ$ , представлены на фиг. 4, а, а для сосуда с  $\theta_c = 180^\circ$  — на фиг. 4, б.

На незапертых сверхзвуковых режимах общая картина течения несколько отличается от приведенной на фиг. 3. Отличие заключается в том, что струя не взаимодействует со стенкой, и с ростом  $\epsilon_a$  граница струи смещается в направлении к плоскости симметрии течения. Звуковые линии, полученные в расчетах истечения газа из сосудов с  $\theta_c = 120, 150, 180^\circ$  при  $\epsilon_a = 0,277$ , приведены на фиг. 4, в (кривые 1–3 соответственно). Для тех же углов  $\theta_c$  в таблице приведены результаты расчетов коэффициентов расхода при различных значениях  $\epsilon_a$ .

4. При истечении газа из сосуда конечной ширины (так же как и в случае бесконечного сосуда) запирающие точки  $s$  предельной характеристики  $cd$  с кромкой отверстия (фиг. 5, а), или вследствие взаимодействия струи со стенкой. Однако для сосуда конечной ширины взаимодействие струи со стенкой имеет свои особенности. Так, в результате квазистационарного процесса (начавшегося от состояния, при котором струя не взаимодействовала со стенкой) граница струи при уменьшении  $\epsilon_a$  может попасть в точку излома образующей стенки (фиг. 5, б). Если это взаимодействие произойдет до того, как точка  $s$  предельной характеристики совпадает с кромкой отверстия, то оно и будет определять запирающие точки. Соответствующее такому механизму запирающее отношение давлений больше величины  $\epsilon_{**}$ , вычисляемой из уравнения (1.1), и одновременно меньше  $\epsilon_{**h}$  для бесконечного сосуда с тем же  $\theta_c$ .

Итак, в некотором диапазоне углов  $\theta_c$  попадание струи в точку излома образующей стенки возможно лишь после того, как точка  $s$  предельной характеристики совпадает с кромкой отверстия (фиг. 5, а). Соответствующая величина  $\epsilon_{**}$  будет решением уравнения (1.1). Кроме того, существует диапазон  $\theta_c$  такой, что для любого  $\theta_c$  из этого диапазона с увеличением степени поджатия запирающие точки сначала определяются совпадением точки  $s$  предельной характеристики с кромкой отверстия, затем попаданием граничной линии тока в точку излома образующей контура и, наконец, касанием струей стенки сосуда (фиг. 5, в).

Таким образом, если для бесконечного сосуда с  $\theta_c > \theta_{c*}$  запирающие точки при уменьшении  $\epsilon_a$  связаны только с касанием стенки, то для конечного сосуда с тем же  $\theta_c$  в зависимости от степени поджатия могут иметь место все три механизма запирающих точек.

Автор благодарит А. Н. Крайко за полезные обсуждения результатов, Н. И. Тилляеву за помощь в работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях // Полн. собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 19–137.
2. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 3. С. 381–384.
3. Асланов С. К. Сверхзвуковое истечение газа из несимметричного сосуда с плоскими наклонными стенками при максимальном расходе // Тр. Куйбышев. авиац. ин-та. 1961. Вып. 12. С. 237–241.
4. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. 216 с.
5. Блюмкина И. А., Цителов И. М. Расчет истечения симметричной струи газа при максимальном расходе // Вестн. ЛГУ. 1978. № 13. Вып. 3. С. 79–85.
6. Benson R. S., Pool D. E. The compressible flow discharge coefficients for a two-dimensional slit // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 5. P. 337–353.
7. Fenain M., Dutoquet L., Salignac J.-L. Calcul des performances d'une tuyère propulsive convergente: Comparaison avec l'expérience // J. Rech. Aérospat. 1974. № 5. P. 261–276.
8. Киселев О. М., Козырев О. Р. О трансзвуковом истечении струи газа из сосуда с плоскими стенками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 128–135.
9. Косолапов Ю. С. К численному решению задачи о сверхзвуковом истечении газа из плоской щели в переменных годографа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 1. С. 137–141.
10. Косолапов Ю. С. Численное решение задачи об истечении газа из сосуда с плоскими стенками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 177–181.
11. Косолапов Ю. С., Салганов Г. А., Сивобород В. А., Филиппов Г. А. Численное решение задачи об истечении газа из плоских и осесимметричных сосудов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 174–176.
12. Филиппов Г. А., Салганов Г. А., Сивобород В. А., Косолапов Ю. С. Истечение газов с различными показателями адиабаты // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 1. С. 121–126.
13. Косолапов Ю. С., Сивобород В. А. Расчетно-теоретическое исследование истечения газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 109–115.
14. Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Шербаков С. А. Метод расчета течений идеального газа в плоских и осесимметричных соплах с изломами контура // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 11. С. 1679–1694.
15. Тагиров Р. К. Теоретическое исследование течения идеального газа в сужающихся соплах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 198–202.

Москва

Поступила в редакцию  
11.1.1990