

УДК 532.68:536.25

© 1991 г.

К. Г. ДУБОВИК, С. Г. СЛАВЧЕВ

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Для чистых жидкостей характерно снижение значения коэффициента поверхностного натяжения с увеличением температуры. Однако для некоторых двухкомпонентных смесей возможен иной характер изменения этого коэффициента. Так, в [1] установлено экспериментально, что водные растворы *n*-гептанола при температуре около 40°С имеют минимальное значение коэффициента поверхностного натяжения, причем зависимость достаточно хорошо аппроксимируется соотношением

$$\sigma = \sigma_0 + \delta(T - T_0)^2 \quad (1)$$

где  $T_0$  — значение температуры, соответствующее минимальному значению  $\sigma_0$ ;  $\delta$  — положительная константа. Известно также [2], что расплавы некоторых сплавов характеризуются тем, что их коэффициент поверхностного натяжения нарастает вместе с температурой.

В [3–5] выполнены эксперименты как в условиях нормальной силы тяжести, так и в невесомости, показывающие роль минимума поверхностного натяжения в растворе *n*-гептанола. В частности, при нагреве боковых стенок сосуда до разных температур, превышающих  $T_0$ , движение жидкости в приповерхностном слое осуществлялось от менее горячей к более горячей стенке, поскольку градиент поверхностного натяжения положителен. Конвективное течение в плоской камере квадратной и прямоугольной формы исследовано численно в [6] для сравнительно малых чисел Марангони. Влияние зависимости (1) на течение в тонком слое жидкости изучалось при отсутствии силы тяжести [7, 8] и с учетом гравитационной конвекции [9].

При линейном распределении температуры на свободной поверхности и отсутствии силы тяжести система уравнений движения и теплообмена допускает автомодельные решения [8, 10].

В настоящей работе на основе уравнений Навье — Стокса численно исследованы основные характеристики термокапиллярной конвекции в прямоугольном канале при нагреве одной из границ до температуры выше, а другой ниже  $T_0$ , качественно сопоставлены некоторые характеристики конвекции в случае нормального и аномального термокапиллярного эффекта, определены условия применимости автомодельных решений типа [10] для описания течения в ограниченной области.

*Постановка задачи.* Рассматривается течение жидкости в прямоугольном канале высотой  $H$  и шириной  $L$ , который в поперечном направлении не ограничен. На боковых границах канала заданы постоянные температуры  $T_1 = T_0 - \Delta T$  и  $T_2 = T_0 + \Delta T$ , где  $2\Delta T$  — характерный перепад температур. Основание слоя жидкости и ее свободная поверхность теплоизолированы. Все теплофизические свойства жидкости, за исключением поверхностного натяжения, определяемого по закону (1), полагаем постоянными. Сила тяжести отсутствует. Свободная поверхность плоская и недеформируемая.

Введем координатную систему с началом в центре дна канала, так, что ось  $x$  будет направлена вдоль дна, ось  $y$  — вертикально вверх. Для описания течения используем уравнения Навье — Стокса и переноса тепла, которые в переменных вихрь  $\omega$ , функция тока  $\psi$  и температура  $\theta$

имеют вид

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \omega_{xx} + \omega_{yy} \quad (2)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega \quad (3)$$

$$\theta_t + u\theta_x + v\theta_y = (\theta_{xx} + \theta_{yy})/\text{Pr} \quad (4)$$

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \omega = -u_y + v_x, \quad \theta = (T - T_0)/\Delta T$$

Здесь все переменные записаны в безразмерном виде, в качестве масштабов длины, скорости и времени используются высота канала и величины  $v/H$ ,  $H^2/v$  соответственно.

На твердых границах канала заданы условия прилипания

$$u = v = 0 \quad (5)$$

а на свободной поверхности кроме отсутствия нормального к ней движения имеет место баланс тангенциальных сил, который с учетом (1) приводит к граничному условию

$$\omega = M\theta_x \quad (6)$$

Для уравнения теплопроводности граничные условия имеют вид

$$0 < y < 1, \quad x = -d: \theta = 1; \quad x = d: \theta = -1 \quad (7)$$

$$-d < x < d, \quad y = 0; \quad 1: \theta_y = 0$$

В систему (2)–(4) и граничные условия (6), (7) входят безразмерные критерии: число Марангони  $M = \delta(\Delta T)^2 H / (\rho\nu^2)$ , число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  и безразмерная полуширина канала  $d = L/(2H)$ . Здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\alpha$  – коэффициент теплопроводности.

Система (2)–(4) решалась численно с использованием методики и комплекса программ метода конечных разностей [11]. Для уравнений переноса (2), (4) применена неявная, энергетически нейтральная схема, а уравнение для функции тока (3) решалось с помощью программы быстрого преобразования Фурье. Значения вихря на твердых границах рассчитаны с применением методики, подробно изложенной в [11]: значения вихря считаются на расстоянии одного узла сетки от твердой границы, исходя из разностного аналога уравнения (3), причем значения функции тока в соответствующих узлах подправляются так, чтобы точно выполнялось условие прилипания. Значения вихря на свободной границе рассчитаны непосредственно исходя из разностного аналога соотношения (7), записанного со вторым порядком точности.

Расчеты выполнены на равномерной сетке  $65 \times 65$  при следующих значениях безразмерных параметров:  $d = 1,5$ ,  $\text{Pr} = 7$ ,  $M = 100$  и  $500$ . Для второго значения  $M$  число  $\text{Ma} = M \cdot \text{Pr}$  соответствует слою водного раствора  $n$ -гептанола толщиной 1 см при  $2\Delta T = 3,8$  К.

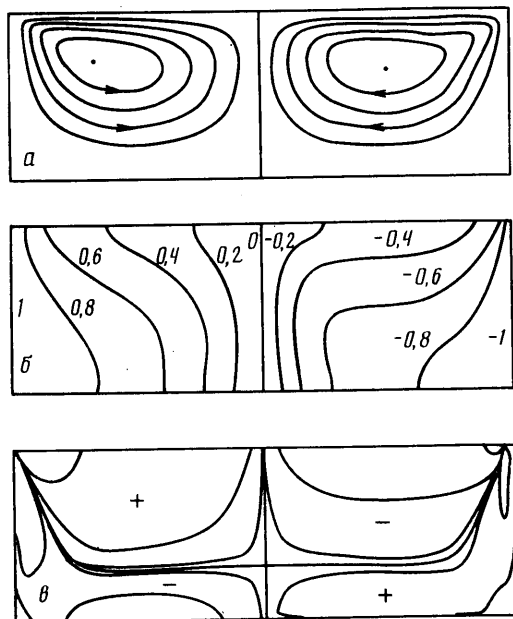
В качестве начальных данных задавалось линейное распределение температуры и отсутствие течения в расчетной области. Временной шаг не варьировался и был равен  $\tau = 0,001$ . Достижение стационарного режима течения контролировалось по соотношению

$$\varepsilon = \max|\psi_i/\psi| + \max|u_i/u| \leq 10^{-3}$$

где поиск максимума для функции тока осуществлялся по всему полю, а для горизонтальной компоненты скорости – только по свободной поверхности.

*Результаты расчетов.* На фиг. 1 приведены линии тока  $a$  (эквидистантные линии,  $|\psi_{\max}| = 0,37$  для  $\text{Ma} = 700$  и  $|\psi_{\max}| = 0,889$  для  $\text{Ma} = 3500$ ), изомеры  $b$  и изолинии вихря  $c$  для чисел  $\text{Ma} = 700$  (слева) и  $3500$  (справа).

В обоих случаях в области образуется двухвихревое симметричное течение (здесь и далее решение приведено только в половине расчетной области), причем вихрь в левой части области вращается против, а в правой по часовой стрелке. На левой половине поверхности коэффициент поверхностного натяжения увеличивается с ростом температуры и жидкость движется от «холодного» центра к более нагретой стенке. На правой половине этот коэффициент убывает с ростом температуры и течение



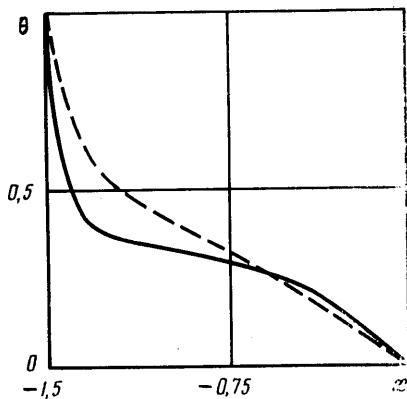
Фиг. 1

в приповерхностном слое направлено от «горячего» центра к более холодной границе. Структура течения в целом слабо меняется с увеличением числа Марангони.

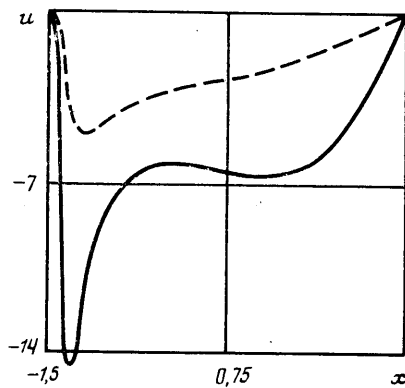
Картина изотерм также симметрична в обоих случаях. С увеличением числа Марангони заметно возрастает влияние течения на распределение температуры в области, при  $Ma=3500$  имеются горизонтально проходящие изотермы, в центральном сечении слоя градиент температуры минимален у свободной поверхности, затем быстро возрастает с глубиной, достигая максимального значения при  $y \approx 0,5$ ; далее происходит его наибольшее снижение с приближением к дну канала. При  $Ma=700$  в верхней части слоя поведение температуры аналогично, при  $y < 0,5$  градиент температуры на оси канала остается практически постоянным.

Такое поведение градиента температуры следует связывать со структурой течения. В области существует двухвихревое течение, переносящее с одной стороны холодную, а с другой стороны нагретую жидкость. Дно канала и свободная поверхность теплоизолированы, следовательно, в центральной части канала происходит интенсивный теплообмен между холодным и нагретым потоками жидкости.

В обоих случаях максимальное значение вихря располагается в точках контакта свободной поверхности с боковыми границами канала. В связи с тем что максимальные значения вихря значительно превышают значения вихря в области, на фиг. 1, в приведены линии, соответствующие значениям:  $\pm \omega_{\max}$ ;  $\pm \omega_{\max} \cdot 0,95$ ;  $\pm \omega_{\max} \cdot 0,1$ ;  $\pm \omega_{\max} \cdot 0,01$ ;  $\pm \omega_{\max} \cdot 0,001$ ; а так-



Фиг. 2



Фиг. 3

же линия нулевой завихренности, причем  $\omega_{\max}=235$  при  $Ma=700$  и  $1790$  при  $Ma=3500$ .

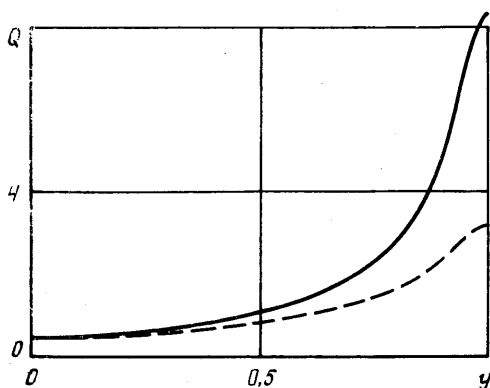
Линия нулевого значения вихря совпадает в обоих вариантах. При переходе через нее происходит смена знака вихря. Как показано в [12], точка контакта свободной поверхности жидкости с боковой границей является особой точкой, где значения вихря претерпевают разрыв. Примененный метод расчета граничных значений вихря не позволяет проследить поведение линии нулевой завихренности непосредственно в угловой точке, однако по мере приближения к ней все разрешимые графически изолинии «прижимаются» к линии нулевого вихря. С увеличением числа Марангони значительных качественных изменений структура поля вихря не претерпевает, однако можно заметить, что при этом расширяется область относительно малых значений.

На фиг. 2 приведены распределения температуры вдоль свободной поверхности слоя при  $Ma=700$  (здесь и далее — штриховые линии) и  $3500$ . Градиент температуры в обоих случаях максимален вблизи изотермических границ слоя, причем заметно возрастает с увеличением числа Марангони. По мере удаления от изотермических границ слоя происходит снижение градиента температуры, причем для  $Ma=3500$  имеется участок, где значение температуры поверхности жидкости мало меняется. В центральной части слоя градиент температуры слабо увеличивается с ростом числа Марангони, причем протяженность участка постоянного градиента температуры сопоставима в обоих случаях.

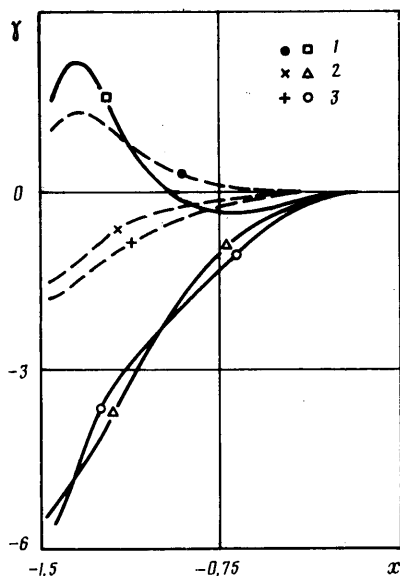
Отметим также, что при аномальном термокапиллярном эффекте распределение температуры на свободной поверхности имеет существенно иной характер, чем при нормальном термокапиллярном эффекте [11]. В последнем случае с увеличением числа Марангони происходит непрерывное снижение градиента температуры в центральной части слоя и его увеличение у изотермических границ.

На фиг. 3 представлены распределения скорости на свободной поверхности при  $Ma=700$  и  $3500$ . Эти распределения согласуются с профилями температуры на свободной поверхности. Качественно профили скорости подобны в обоих случаях, однако имеются и существенные отличия. При  $Ma=700$  скорость течения жидкости монотонно возрастает по мере удаления от центра слоя, на участке снижения градиента температуры рост скорости замедляется. При  $Ma=3500$  на участке снижения поверхностного градиента температуры происходит некоторое снижение скорости течения, появляется слабо выраженный локальный максимум скорости.

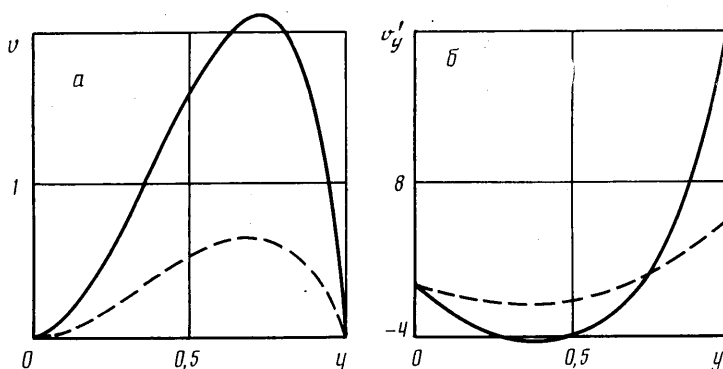
Основной максимум скорости в обоих случаях расположен в непосредственной близости к изотермической границе канала, причем при  $Ma=$



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

$\approx 3500$  пространственная разрешающая способность разностной сетки, видимо, предельна.

На фиг. 4 приведены распределения потока тепла на изотермических границах. Качественных изменений с увеличением числа Марангони не выявлено. Вблизи дна поток тепла слабо зависит от числа Марангони, причем в обоих случаях он ниже, чем при переносе тепла теплопроводностью. По мере приближения к свободной поверхности происходит монотонное увеличение потока тепла, его абсолютный максимум находится непосредственно у свободной границы. С увеличением числа Марангони значительно возрос поток тепла только через часть слоя жидкости вблизи свободной поверхности.

Отметим, что в этом случае в отличие от нормального термокапиллярного эффекта распределения потока тепла на холодной и нагретой границах слоя различаются только знаком, что обусловлено симметрией течения.

На фиг. 5 приведены распределения вертикальной компоненты скорости в центральном сечении слоя (а) и ее первой производной по  $y$ . С увеличением числа Марангони резких качественных изменений этих

распределений не наблюдается, происходит лишь незначительное смещение положения максимума вертикальной скорости к свободной поверхности.

В упоминавшихся ранее автомоделльных решениях компоненты скорости связаны соотношениями

$$u = xf'(y), \quad v = -f(y)$$

где  $f(y)$  — решение обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с граничными условиями, соответствующими условиям (6) на дне канала и условию нулевой нормальной скорости на свободной поверхности [10]. Учитывая то обстоятельство, что в обоих случаях в центральной части свободной поверхности имеется протяженный участок почти линейного изменения температуры (фиг. 2), распределение вертикальной компоненты скорости может быть истолковано как соответствующая автомоделльная функция (с точностью до нормировки задачи).

На фиг. 6 представлены профили величины  $\gamma = u - xf'(y)$  (график  $f'$  приведен на фиг. 5, б), характеризующей отклонение решения, полученного численно на основе полных уравнений Навье — Стокса, от упомянутого автомоделльного решения, на свободной поверхности (1) и на двух глубинах:  $1/2 H$  (2) и  $3/4 H$  (3). При  $Ma = 700$  влияние боковых границ канала распространяется почти на  $2/3$  полуширины канала, однако в центральной части канала существует достаточно протяженная область, причем по всей глубине жидкости, где отклонения от автомоделльного решения малы. С увеличением числа Марангони ( $Ma = 3500$ ) протяженность этой области сокращается примерно вдвое, значительно возрастает влияние боковых границ канала на течение жидкости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vochten R., Petre G. Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface // J. Colloid Interface Sci. 1973. V. 42. № 2. P. 320–327.
2. Desre P. J., Joud J. C. Surface tension temperature coefficient of liquid alloys and definition of a «zero-Marangoni number alloy» for crystallisation experiments in microgravity environment // Acta Astronaut. 1981. V. 8. № 5–6. P. 407–415.
3. Legros J. C., Limbourg-Fontaine M. C., Petre G. Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection // Acta Astronaut. 1984. V. 11. № 2. P. 143–147.
4. Limbourg-Fontaine M. C., P  tr   G., Legros J. C. Texus 8 experiment: effect of a surface tension minimum on thermocapillary convections // Physicochem. Hydrodyn. 1985. V. 6. № 3. P. 301–310.
5. Limbourg-Fontaine M. C., Petre G., Legros J. C. Thermocapillary movements under microgravity at a minimum of surface tension // Naturwissenschaften. 1986. B. 73. № 7. P. 360–362.
6. Villers D., Platten J. K. Marangoni convection in systems presenting a minimum in surface tension // Physicochem. Hydrodyn. 1985. V. 6. № 4. P. 435–451.
7. Пухначев В. В. Проявление аномального термокапиллярного эффекта в тонком слое жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск, 1985. С. 119–127.
8. Пухначев В. В. Термокапиллярная конвенция в слабых силовых полях: Препринт № 178-88. Новосибирск, Ин-т теплофизики АН СССР. 1988. 45 с.
9. Villers D., Platten J. K. Separation of Marangoni convection from gravitational convection in Earth experiments // Physicochem. Hydrodyn. 1987. V. 8. № 2. P. 173–183.
10. Гунало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 132–137.
11. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Дубовик К. Г. и др. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
12. Zebib A., Homay G. M., Meiburg E. High Marangoni number convection in a square cavity // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 12. P. 3467–3476.