МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1991

УДК 532.59

В. В. БУЛАТОВ, Ю. В. ВЛАДИМИРОВ

ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ИСТОЧНИКОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ, НЕОДНОРОДНЫХ ПО ГОРИЗОНТАЛИ СРЕДАХ

Основным параметром, определяющим поведение внутренних гравитационных волн, является частота Брента – Вяйсяля $N^2=-g\partial \ln \rho/\partial z$ (g – ускорение свободного падения, ρ – невозмущенная плотность). В реальных условиях плотность ρ зависит не только от вертикальной переменной z, но также и от горизонтальных переменных x, y. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о внутренних волнах, возбуждаемых точечным источником, например источником массы, движущимся в среде с меняющейся по всем переменным плотностью ρ, и соответственно N^2. Трудность такой задачи обусловливается тем, что при $\rho=\rho(z, x, y)$ уравнения в частных производных, описывающие внутренние волны, не допускают разделения переменных. Однако то обстоятельство, что характерный горизонтальный масштаб изменения плотности велик по сравнению с характерными длинами внутренних волн, дает возможность применить к решению этой задачи приближенный метод аналогичный методу геометрической оптики [1].

В [1, 2] рассматривалась задача о распространении локально-гармонических волн в стратифицированных, горизонтально-неоднородных средах. В [3, 4] решена задача о поле внутренних волн, создаваемом источником, движущимся в стратифицированной, горизонтально-однородной жидкости с различными видами распределения $N^2(z)$. Было показано, что дальнее поле представляет собой сумму мод, каждая из которых заключена внутри своего конуса Маха, асимптотика каждой моды вблизи соответствующего волнового фронта выражается через некоторые специальные функции (функция Эйри и ее производная, интегралы Френеля), аргумент которых зависит от первых двух коэффициентов соответствующего тейлоровского разложения дисперсионных кривых в нуле (локальная асимптотика с использованием слабодисперсионного приближения). Внутри конуса Маха, т. е. вдали от волнового фронта, асимптотика каждой моды, определяемая методом стационарной фазы, представляет собой локально-синусоидальную волну. Там же построены глобальные асимптотики – глобальные волны Эйри и Френеля. Поэтому при исследовании задачи о поле внутренних волн, возбуждаемом источником, движущимся в стратифицированной, горизонтально-неоднородной среде, решение надо искать не в виде обычного ВКБ-разложения по локально-гармоническим волнам, а в виде волн специального типа – глобальных волн Эйри и Френеля. В [5] методом бегущей волны была решена задача о распространении волн Эйри и Френеля в приближении слабой дисперсии, т. е. рассматривалась только окрестность волнового фронта. В настоящей работе изучается дальнее поле внутренних волн как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

Рассмотрим задачу о распространении глобальных внутренних волн Эйри и Френеля, генерируемых точечным источником массы, движущимся со скоростью V вдоль оси x на глубине z_0 в слое $-h<z<0$ стратифицированной, горизонтально-неоднородной жидкости с плотностью $\rho=\rho(z, \varepsilon x, \varepsilon y)$ (малый параметр ε характеризует «медленные переменные», медленности изменения по переменной z не предполагается). Будем считать, что в среде с неоднородным по горизонтали полем плотности можно пренебречь стационарными течениями, вызванными этим полем [1]. Тогда из линеаризованной системы уравнений гидродинамики в приближении

Буссинеска можно получить

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w-\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\rho)=$$
$$=\delta_{tt}''(x-Vt)\delta(y)\delta'(z-z_0) \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{u}+\nabla\frac{\partial w}{\partial z}=\delta(z-z_0)\nabla[\delta(x-Vt)\delta(y)] \qquad (2)$$

$$\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y),\quad \mathbf{v}=(\mathbf{u},\ w)$$

где w — вертикальная компонента скорости внутренних волн, $\mathbf{u}$ — вектор горизонтальных скоростей. В качестве граничных условий берется: $w=0$ при $z=0,\ -h$. Решение (1), (2) будем искать в виде суммы мод [3, 4], в дальнейшем все выкладки отнесем к отдельно взятой моде, опуская ее индекс. Исходя из структуры глобальной асимптотики для горизонтально-однородной среды, решение (1)—(2) будем искать в виде

$$w=A(\varepsilon x,\ \varepsilon y,\ z,\ \varepsilon t)F_0(\sigma)+\varepsilon^a B(\varepsilon x,\ \varepsilon y,\ z,\ \varepsilon t)F_1(\sigma)+O(\varepsilon^{2a}) \qquad (3)$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0(\varepsilon x,\ \varepsilon y,\ z,\ \varepsilon t)F_1(\sigma)\varepsilon^{a-1}+O(\varepsilon^{2a-1}) \qquad (4)$$

$$F_{m+1}'(\sigma)=F_m(\sigma),\qquad \sigma=\left(\frac{S(\varepsilon x,\varepsilon y,\varepsilon t)}{a\varepsilon}\right)^a$$

где аргумент σ считаем порядка единицы, функции S, A, $\mathbf{u}_0$ подлежат определению. Значение a для волны Эйри равно 2/3, для волны Френеля $a=1/2$. Если искать решение для вертикальной составляющей скорости волны Эйри, то в качестве $F_0(\sigma)$ берется производная функция Эйри $\mathrm{Ai}'(\sigma)$, для возвышения волны Эйри в качестве $F_0(\sigma)$ необходимо брать функцию Эйри $\mathrm{Ai}(\sigma)$. Для вертикальной компоненты скорости волны Френеля в качестве $F_0(\sigma)$ будем брать функцию $\Phi'(\sigma)$ и соответственно для возвышения волны Френеля

$$F_0(\sigma)=\Phi(\sigma),\quad \Phi(\sigma)=\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp\left(-it\sigma-i\frac{t^2}{2}\right)dt$$

В дальнейшем для определенности будем рассматривать вертикальную компоненту скорости волны Эйри и возвышение волны Френеля, так как в силу линейности задачи перейти от возвышения η к вертикальной компоненте скорости w можно, положив везде $w=\partial\eta/\partial t$.

Подставляя (4) в (2), находим

$$\mathbf{u}_0=-A_z'\left(\frac{S}{a}\right)^{1-a}\varepsilon^{-1}\nabla S\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]^{-1} \qquad (5)$$

Подставим (3)—(5) в уравнение (1) и приравняв члены при одинаковых степенях ε, получим при ε^a

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+k^2[\omega^{-2}N^2(z,x,y)-1]A=0 \qquad (6)$$

$$A=0,\quad z=0,\quad -h$$

где введены следующие обозначения: $\omega=\partial S/\partial t$, $\mathbf{k}\equiv(p,\ q)=\nabla S$. При решении данной задачи дисперсионная зависимость, обозначаемая через $K(\omega,\ x,\ y)$, предполагается известной, тогда для определения функции S

имеем уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=K^2(\omega, x, y) \tag{7}$$

Уравнение (7) есть уравнение Гамильтона — Якоби с гамильтонианом $H(\omega, \mathbf{k}, x, y)\equiv k^2-K^2(\omega, x, y)$. Характеристическая система для уравнения эйконала (7) имеет вид [6]

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{p}{K(\omega,x,y)K_\omega'(\omega,x,y)}, \quad \frac{dp}{d\tau}=\frac{K_x'(\omega,x,y)}{K_\omega'(\omega,x,y)} \tag{8}$$

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{q}{K(\omega,x,y)K_\omega'(\omega,x,y)}, \quad \frac{dq}{d\tau}=\frac{K_y'(\omega,x,y)}{K_\omega'(\omega,x,y)}, \quad \frac{d\omega}{d\tau}=0$$

Начальные условия для системы (8) удобно задать в трехмерном пространстве x, y, t на некоторой поверхности: $t=t_0$, $x=x_0(l)$, $y=y_0(l)$. Пусть эйконал S известен на этой поверхности: $S(x, y, t)=S_0(l, t_0)$. Это соответствует заданию начального эйконала на некоторой неподвижной линии $x=x_0(l)$, $y=y_0(l)$ в произвольный момент времени t_0. Дифференцируя начальный эйконал по l, t_0, получаем систему уравнений для определения начальных значений частоты ω_0 и волнового вектора (p_0, q_0)

$$\omega_0(l,t_0)=\frac{\partial S_0}{\partial t_0}$$

$$p_0(l,t_0)x_0'(l)+q_0(l,t_0)y_0'(l)=\frac{\partial S_0}{\partial l}$$

$$p_0^2(l, t_0)+q_0^2(l, t_0)=K^2(\omega_0(l, t_0), x_0(l), y_0(l))$$

Таким образом, решение системы (8) определяет в трехмерном пространстве x, y, t семейство пространственно-временных лучей $x=x(t, t_0, l)$, $y=y(t, t_0, l)$, где $x=x_0(l)$, $y=y_0(l)$ при $t=t_0$. При этом l и момент выхода луча t_0 выступают в роли лучевых координат, а переменная t является одновременно декартовой и лучевой. Проекции пространственно-временных лучей на плоскость x, y определяют в отличие от характеристической системы для монохроматической волны [1] двухпараметрическое семейство лучей, которое при фиксированном t_0 переходит в обычное однопараметрическое семейство лучей с лучевыми координатами l и t. Тем не менее переменные l и t_0 в дальнейшем будем называть лучевыми координатами. Частота ω, как видно из (8), сохраняет вдоль луча свое начальное значение $\omega_0(l, t_0)$ и эйконал $S^*(t, t_0, l)=S(x(t, t_0, l), y(t, t_0, l), t)$ в лучевых координатах определяется интегрированием вдоль луча

$$S^*(t,t_0,l)=S_0(l,t_0)+\omega_0(l,t_0)(t-t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{K(\omega_0(l,t_0),x(\tau,t_0,t),y(\tau,t_0,l))}{K_\omega'(\omega_0(l,t_0),x(\tau,t_0,l),y(\tau,t_0,l))}d\tau$$

Для того чтобы найти $S(x, y, t)$ и $\omega(x, y, t)$ в декартовых координатах x, y, t, достаточно обратить уравнения лучей $l=l(t, x, y)$, $t_0=t_0(t, x, y)$. Для этого необходимо, чтобы при любых t якобиан $D(t, t_0, l)\equiv x_{t_0}'y_l'-x_l'y_{t_0}'$ был отличен от нуля.

Чтобы определить амплитудную зависимость A, представим предварительно $A(x, y, z, t)$ в виде $A(x, y, z, t)=A^*(x, y, z, \omega(x, y, t))=\psi(x, y, \omega)f(x, y, z, \omega)$, где f есть нормированная собственная функция зада-

чи (6)

$$\int_{-h}^{0} [N^2(z,x,y)-\omega^2]f^2(x,y,z,\omega)\,dz=1$$

Тогда, подставляя (3)—(5) в (1), используя свойства функции Эйри и интегралов Френеля, приравнивая члены при ε^{2a}, после громоздких выкладок получаем для волны Эйри

$$\frac{d}{dt}\psi^2 P+\nabla^*\mathbf{c}=0 \tag{9}$$

$$\nabla^*=\nabla+\frac{\partial}{\partial\omega}\nabla\omega,\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{k}\nabla}{K(\omega,x,y)K_\omega'(\omega,x,y)}$$

$$P=\sqrt{\sigma(\omega,x,y)}K_\omega'(\omega,x,y)K^{-2}(\omega,x,y)$$

где $\mathbf{c}$ — вектор групповой скорости внутренних волн, d/dt — производная вдоль характеристик (8). Для волны Френеля $P=K_\omega'(\omega,x,y)$. Далее воспользуемся теоремой Лиувилля [7], утверждающей, что вдоль характеристик (8) будет верно соотношение $dD(t,t_0,l)/dt=\nabla^*\mathbf{c}$. Тогда (9) можно записать в виде некоторого закона сохранения вдоль луча

$$\frac{d}{dt}\ln(D\psi^2 P)=0 \tag{10}$$

Отсюда, считая, что все функции зависят от лучевых координат, получим

$$D(t,t_0,l)\psi^2(t,t_0,l)P(t,t_0,l)=C(l,t_0) \tag{11}$$

где $C(l,t_0)$ — некоторая функция, которую нельзя определить, решая задачу методом геометрической оптики. Отметим, что закон сохранения (10) аналогично случаю локально-гармонических волн [1, 2] можно записать в виде

$$\frac{DI}{Dt}+\nabla^*(I\mathbf{c})=0,\qquad \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

где $I=\psi^2 P$ — «адиабатический инвариант» соответствующей волны.

Для окончательного решения задачи необходимо определить функцию $C(l,t_0)$ в уравнении (11), которую можно найти, используя решение задачи о движении точечного источника массы в стратифицированной, горизонтально-однородной среде [3, 4], так как на типичных расстояниях от источника, на которых верна глобальная асимптотика в горизонтально-однородной среде (порядка нескольких h [4]), можно предположить, что параметры среды, характеризующие горизонтальную неоднородность, меняются мало, т. е. среду можно считать локально-однородной по горизонтали. Пусть источник, движущийся со скоростью V, в момент времени $t=t_0$ находится в точке $(x_0,y_0)=(Vt_0,0)$. В каждый момент времени t_0 источник излучает волны всех частот в диапазоне $0<\omega<\max N(z)$, поэтому в качестве лучевых координат удобно взять ω и момент выхода луча из источника t_0. Тогда для волны Эйри получаем [3]

$$C(\omega,t_0)=\frac{\omega^4}{2VK^3(\omega,x_0,y_0)\nu(\omega,x_0,y_0)}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,\omega)}{\partial z_0}\right)^2$$

$$\nu(\omega,x_0,y_0)=\sqrt{K^2(\omega,x_0,y_0)-\omega^2V^{-2}}$$

Для волны Френеля функция $C(\omega, t_0)$ имеет вид [4]

$$C(\omega, t_0)=\frac{\omega^2}{2VK(\omega, x_0, y_0)\nu(\omega, x_0, y_0)}\left(\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \omega)}{\partial z_0}\right)^2$$

Выпишем первый член асимптотики вертикальной компоненты скорости глобальной волны Эйри, возникающей при движении точечного источника массы в стратифицированной, горизонтально-неоднородной среде

$$w=w_0(t, t_0, \omega)f(x, y, z, \omega)\,\mathrm{Ai}'\left(\left[\frac{3}{2}S^*(t, t_0, \omega)\right]^{2/3}\right) \tag{12}$$

$$w_0(t, t_0, \omega)=\omega^2K(\omega, x, y)\sigma^{1/4}(\omega, x, y)\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \omega)}{\partial z_0}\times$$

$$\times[2VK_\omega'(\omega, x, y)D(t, t_0, \omega)K^3(\omega, x_0, y_0)\nu(\omega, x_0, y_0)]^{-1/2}$$

где $x=x(t, t_0, \omega)$, $y=y(t, t_0, \omega)$. Первый член асимптотики возвышения глобальной волны Френеля имеет вид

$$\eta=\eta_0(t, t_0, \omega)f(x, y, z, \omega)\Phi(\sqrt{2S^*(t, t_0, \omega)}) \tag{13}$$

$$\eta_0(t, t_0, \omega)=\omega\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \omega)}{\partial z_0}[2VK_\omega'(\omega, x, y)K(\omega, x_0, y_0)\nu(\omega, x_0, y_0)]^{-1/2}$$

Полученные решения (12)–(13) в горизонтально-однородной среде совпадают с глобальными асимптотиками, построенными в [3, 4]. При больших S^* (вдали от волнового фронта), пользуясь асимптотиками функции Эйри и интегралов Френеля при больших значениях аргумента, получаем обычное ВКБ-разложение для горизонтально-неоднородной среды, совпадающее с [1, 2]; при малых S^* (вблизи волнового фронта) получаем решение в приближении слабой дисперсии [5]. Таким образом, построенные решения в наиболее общем виде описывают поле внутренних волн, возникающее при движении источника в стратифицированной, горизонтально-неоднородной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
2. *Воронович А. Г.* Распространение внутренних и поверхностных гравитационных волн в приближении геометрической оптики // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12. № 8. С. 850–857.
3. *Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.* Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 6. С. 526–532.
4. *Боровиков В. А., Булатов В. В., Кельберт М. Я.* О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 158–162.
5. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в неоднородной по горизонтали среде // Мор. гидрофиз. журн. 1989. № 6. С. 14–19.
6. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
7. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.I.1990