

УДК 532.517.3

© 1991 г.

Ю. Н. БЕЛЯЕВ, И. М. ЯВОРСКАЯ

СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА — ПЕРЕХОДЫ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ХАОСА

Представлены результаты экспериментального исследования перехода к хаосу и характеристик хаотических режимов в широком диапазоне значений числа Рейнольдса: $460 \leq Re \leq 3200 \approx 7 Re_0$. Оценки вероятностной размерности аттракторов, экспонент Ляпунова и экспоненциальное затухание наиболее высокочастотной части спектра свидетельствуют о детерминированном характере хаоса в рассмотренном интервале Re . Отмечается неединственность пути перехода к хаосу в одном и том же интервале значений Re в зависимости от предыстории развития течения, а также одновременное существование хаотических и регулярных режимов при фиксированных значениях параметров.

При переходе к развитой турбулентности течения жидкости в замкнутых объемах проходят стадию детерминированного динамического хаоса — режима течения, характеризуемого непериодическим поведением во времени, но вполне регулярной пространственной структурой. Это, конечно, не развитая турбулентность, необходимыми свойствами которой являются временная и пространственная переуглубленность. Тем не менее этот тип течения характерен, по-видимому, для почти всех течений в замкнутых сосудах ограниченных размеров, тогда как для течений в пространственно протяженных сосудах характерен переход через пространственно-временной хаос.

Применимость теории динамического хаоса базируется на некоторых строго не доказанных предположениях, которые сводятся к следующему [1, 2].

Предполагается, что турбулентные течения могут описываться уравнениями Навье — Стокса (Н-С). Несмотря на кажущуюся очевидность, этот факт требует некоторых разъяснений. Дело в том, что доказательство однозначной разрешимости в целом для начально-краевых задач уравнений Н-С имеется только в двумерном и осесимметричном случаях. Для общей трехмерной задачи доказано существование единственного решения вблизи гладких начальных данных лишь для ограниченных интервалов времени. Для произвольных интервалов вопрос о существовании решений остается открытым, в принципе не исключено появление сингулярности [3].

Предполагается, что движение жидкости может описываться диссипативной динамической системой и мгновенному состоянию жидкости соответствует точка в пространстве состояний. Более того, эквивалентная уравнениям Н-С динамическая система считается конечномерной. Теоремы о свойствах аттракторов уравнений Н-С, их конечномерности, оценки размерности этих аттракторов в зависимости от значений числа Рейнольдса Re строго получены лишь в двумерном и осесимметричном случаях для замкнутых областей или пространственно-периодических течений [4–6].

Обобщение оценок размерности аттракторов на трехмерные течения затруднено из-за отсутствия доказательства равномерной ограниченности решений уравнений Н-С в норме H_1 [4, 5, 7]. При условии отсутствия сингулярности в трехмерных решениях и при априорном задании колмогоровского спектра как спектра плотности энергии трехмерного течения строго получен верхний предел фрактальной размерности аттракторов уравнений Н-С $d \leq C Re^{3/4}$, совпадающий с основанной на феноменологии оценкой Ландау. Эта оценка неприменима для малых и умеренных Re , когда предположение о колмогоровском спектре несправедливо. Оценка, полученная без использования информации о спектре, более пессимистична: $d \leq C_1 Re^3$ [8].

Предполагается, что действующие на течение силы и граничные условия стационарны, и изучаются установившиеся течения, возникающие после затухания всех переходных процессов, т. е. при $t \rightarrow \infty$.

Внешний шум в теории детерминированного хаоса применительно к замкнутым течениям рассматривается как некое усложнение, а не основная причина возникновения непредсказуемости поведения течения (в отличие от открытых течений или течений в пространственно протяженных объемах).

Последнее предположение касается соображения о типичности свойств систем уравнений, описывающих изучаемые течения. Это предположение необходимо для применения результатов теории бифуркаций, которая наиболее полно разработана

для систем общего положения. При наличии в задачах симметрии рассматриваются типичные ситуации в рамках уравнений, отражающих данную симметрию.

1. Пути возникновения хаоса. При малом значении управляющего параметра основное течение в замкнутых объемах единственно и глобально устойчиво. По мере роста параметра возникают бифуркации — качественные изменения в решениях систем уравнений, которые соответствуют в экспериментах переходам одного режима течения в другой, обычно более сложный. Так, прослеживая с ростом параметра последовательность бифуркаций, в принципе можно получить непериодическое решение, описывающее хаос, т. е. найти весь сценарий перехода [9, 10]. На основе простых дискретных отображений различных типов были установлены три классических сценария перехода к хаосу и установлены их универсальные свойства. Это бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний — сценарий Фейгенбаума [11], переход через три прямые бифуркации Хопфа — сценарий Рюэля и Такенса [1] и переход через один из типов перемежаемости — сценарий Помо — Манвиля [12].

Эти пути перехода к хаосу связаны с последовательностями тех или иных локальных бифуркаций. Но в фазовом пространстве могут возникать также глобальные бифуркации. Один из примеров такой бифуркации — неограниченный рост периода предельного цикла и превращение его в гомоклиническую структуру. С этим типом бифуркации связан путь к хаосу, отмеченный в [13]. Имеются и другие пути возникновения хаоса, однако классификация всех типов бифуркаций и возникающих аттракторов даже для маломерных систем далека до завершения.

Поскольку сценарии переходов к хаосу получены на простейших динамических системах малой размерности, возникает вопрос: в какой мере эти сценарии присущи системам больших и даже бесконечных размерностей, которые описывают течение жидкости? Действительно ли маломерны аттракторы реальных течений жидкости вблизи перехода к хаосу? Как происходит развитие хаотических течений и какими характеристиками они могут быть описаны по мере роста управляющего параметра?

Ввиду ограниченных возможностей ЭВМ на данном этапе только тщательные эксперименты, проводимые в строго контролируемых условиях (малое отношение шум — сигнал) в течение длительных интервалов времени (возможность надежной статистической обработки) на различных типах течений, могут подтвердить или опровергнуть применимость теории динамического хаоса к динамике жидкости.

Два типа экспериментов представляют интерес в этом плане. Во-первых, изучение перестроек течения при квазистатическом изменении управляющих параметров позволяет найти пути перехода к хаосу и сравнить их с известными теоретическими сценариями. Другой тип исследований связан с изучением характеристик хаотических течений и переходов между ними при дальнейших изменениях параметров.

Такие эксперименты проводились в основном на простейших классах течений: течения Тэйлора — Куэтта и конвекции Рэлея — Бенара. Здесь излагаются результаты изучения перехода к хаосу и характеристик хаотических режимов в сферическом течении Куэтта. Это течение возникает в слое между двумя сферами, вращающимися коаксиально с различными скоростями, и в общем случае зависит от трех параметров подобия: числа $Re = r_1^2 \Omega_1 / \nu$, отношения скоростей вращения сфер $\omega = \Omega_2 / \Omega_1$, относительной толщины слоя $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$ (r_1 , r_2 , Ω_1 и Ω_2 — радиусы и скорости вращения внутренней и внешней сфер соответственно, ν — кинематическая вязкость).

Данная работа продолжает исследования перехода к хаосу, опубликованные в [14], представляемые результаты относятся к более широкому

диапазону значений чисел Re и включают новые сценарии и расчеты экспонент Ляпунова.

2. Параметры установки и методика измерений. Эксперименты проводились на установке, описание которой приведено в [15]. В процессе проведения экспериментов вращалась только внутренняя сфера $\omega=0$, относительная толщина слоя была $\delta=1,006$, число Рейнольдса менялось в пределах $450 \leq Re \leq 3200$, в качестве рабочей жидкости использовалось силиконовое масло с вязкостью $\nu=50$ сСт при $T=20^\circ C$. Эксперименты проводились в строго контролируемых условиях при малом отношении шум — сигнал. Все основные параметры установки поддерживались постоянными с относительной погрешностью, не превышающей $\pm 0,02\%$. В пределах этой погрешности эксперименты проводились в стационарных внешних условиях после выдерживания каждого режима перед началом измерений в течение 1–2 ч при квазистатическом изменении числа Re с шагом $Re=0,03\%$ вблизи критических точек.

Лазерная доплеровская анемометрия использовалась для измерения компонент скорости жидкости в трех точках сферического слоя одновременно: вблизи экватора и полюса измерялась радиальная компонента скорости, на широте 45° — меридиональная. Постоянные составляющие компонент скорости отфильтровывались и регистрировались непосредственно по прибору, значения переменных составляющих преобразовывались в цифровой код с погрешностью менее $0,1\%$ через равные промежутки времени $\Delta t=0,02$ или $0,04$ с. Таким образом получались выборки значений пульсаций скорости $v(t_k)$, $t_k=t_0+k\Delta t$, $k=1, 2, \dots, K$, максимальная длина выборки $T=K\Delta t$ составляла 6–8 ч. Полученные временные ряды в зависимости от целей эксперимента в дальнейшем подвергались различной математической обработке.

3. Методы обработки экспериментальных данных. Для изучения перестроек между регулярными режимами течения с изменением Re и перехода к хаосу использовались традиционные статистические методы обработки данных. Так, сглаженная несмещенная оценка спектров мощности пульсаций скорости с минимальной дисперсией находилась путем простого усреднения выборочных спектральных оценок $|J_n(v)|^2$, полученных применением процедуры быстрого преобразования Фурье к выборкам максимальной длины $N=65\ 536$, полученных делением исходной на q равных частей

$$I(v) = \langle |J(v)|^2 \rangle = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^q |J_n(v)|^2$$

При получении выборочной спектральной оценки применялись прямоугольное окно и окно Хеннинга.

Весьма важной характеристикой является автокорреляционная функция, которая дает статистическую зависимость пульсаций скорости в одной точке потока в различные моменты времени

$$R(\tau) = \int_0^T v(t)v(t+\tau) dt / (T-\tau)R(0)$$

$$R(0) = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt, \quad |\tau| \leq 0, 1T$$

Такие методы позволяют изучать переход к хаосу в течениях, регистрируя его наступление по уширению спектральных линий и подъему уровня непрерывного фона в спектрах мощности, а также затуханию автокорреляционной функции.

Для характеристики хаотических режимов течений эти методы недостаточно эффективны. Здесь прежде всего необходима реконструкция фазового портрета соответствующей течению динамической системы на основе измерения на больших интервалах времени какой-либо одной характеристики течения.

Согласно идеям работы [16] и теореме вложения Такенса [17] по достаточно длинным измерениям одной динамической переменной системы с n степенями свободы, например компоненты скорости в одной точке $v(t_k)$, и времени запаздывания τ можно построить m -мерный вектор $\{v(t_k), v(t_k+\tau) \dots v(t_k+(m-1)\tau)\}$, по которому воссоздается m -мерный фазовый портрет системы, имеющей практически те же свойства, что и первоначальная, при условии, что $m \geq 2n+1$, где m — размерность вложения, а τ в принципе произвольно.

По фазовому портрету системы можно найти его проекции на различные плоскости пространства, построить сечения Пуанкаре, определить размерности аттракторов системы, рассчитать экспоненты Ляпунова и т. д. Здесь использовались в основном два метода расчета размерности. Находилась вероятностная поточечная

размерность по оценке среднего числа точек траектории N_ε для многих m -мерных кубов с линейным размером ε . Затем ε менялось и определялся наклон кривой $\lg N_\varepsilon(\lg \varepsilon)$ при последовательном увеличении размерности вложения m . Когда размерность вложения оказывалась достаточной, наклон переставал меняться с изменением m и по этому условию устанавливалась размерность аттрактора d [18].

В наших оценках число кубов, по которым проводилось усреднение, было порядка 10^3 , число различных ε равнялось 15, длина траектории соответствовала 2–3 ч измерений, число точек $K=(3-5) \cdot 10^5$.

Другой метод основан на вычислении корреляционного интеграла

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{ij}^N \theta(r - |x_i - x_j|)$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, а x_i и x_j — точки на траектории системы [19]. При малых r интеграл $C(r) \sim r^\nu$, а $\nu \leq d$. При оценке размерности этим методом число точек на траектории было порядка $1,6 \cdot 10^4$.

Размерность определяет число степеней свободы изучаемого течения, но никак не характеризует его природу. Для суждения о регулярности или хаотичности течения необходимо знать поведение траектории соответствующей динамической системы на аттракторе.

Устойчивость траекторий на аттракторе определяется экспонентами Ляпунова динамической системы, которые дают информацию о скорости разбегания траекторий по различным направлениям, т. е. перемешиванию. Два метода было предложено для их оценки. В работе [20] наибольшая экспонента находится путем слежения за длительной эволюцией расстояния l_i между реперной точкой i на выбранной траектории и близлежащей точкой. Когда расстояние от этой точки до траектории l_i' становится большим, эта точка заменяется новой, близкой к рассматриваемой траектории и лежащей в направлении, близком к направлению на прежнюю точку, и т. д. до конца траектории. Максимальная экспонента находится по следующей формуле:

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{l_i'}{l_i} \right)$$

Второй метод [21] в принципе позволяет оценить все положительные экспоненты. Он основан на оценках матриц Якоби методом наименьших квадратов в каждой точке траектории путем слежения за эволюцией группы ближайших точек за короткий интервал времени. Экспоненты Ляпунова находятся как собственные значения произведения полученных матриц. Знание экспонент Ляпунова позволяет найти оценку сверху размерности аттрактора по формуле [22]

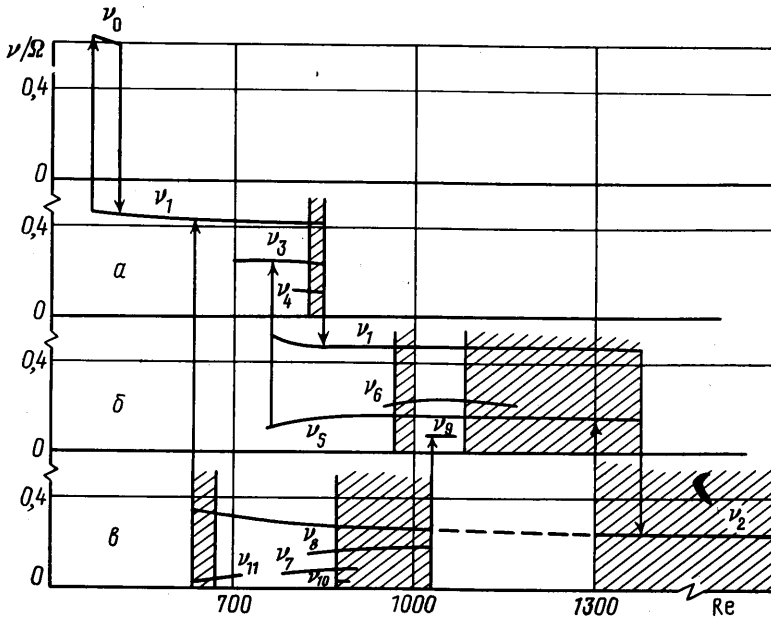
$$d_\lambda = k + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{|\lambda_{k+1}|}, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$$

Метод, использованный в данной работе, является комбинацией методов, изложенных выше.

4. Переход к хаосу и его характеристика. Исследование начиналось при малых Re , когда основное течение было единственным и стационарным и представляло дифференциальное вращение с одновихревой меридиональной циркуляцией.

Первая неустойчивость возникала при $Re=460$ и сопровождалась появлением в каждой полусфере четырех подковообразных вихрей и синусоидального возмущения экватора с азимутальным волновым числом $n=4$. Вся структура распространялась как целое в сторону вращения сферы с фазовой скоростью ω_0 ; в спектрах мощности при этом появляется инструментально острый пик на частоте $\nu_0=4\omega_0$. Движения в нижней и верхней полусферах синхронизованы с точностью до погрешности эксперимента. При $Re=Re_0$ безразмерная частота $\nu_0/\Omega_1=0,614$. Число вихрей n и фазовая скорость ω_0 существенно зависят от толщины слоя δ [23].

Некоторые сценарии перехода к хаосу при квазистатическом увеличении Re были изучены в [14]. Переход к хаосу регистрировался по ушире-



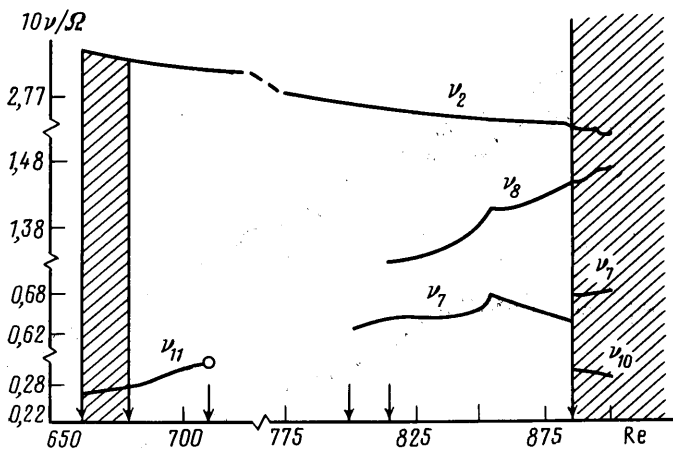
Фиг. 1

нию спектральных линий в спектрах мощности, повышению уровня шума и затуханию автокорреляционной функции. График зависимости безразмерных частот колебаний ν/Ω , от Re приведен на фиг. 1. Области, соответствующие хаотическим режимам, заштрихованы, стрелками указаны необратимые переходы. Все регулярные режимы течений характеризуются небольшим набором несоизмеримых частот, их гармоник и комбинаций, а соответствующие им спектры — инструментально острыми пиками на соответствующих частотах с относительной толщиной $\Delta\nu/\nu \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Спектральные линии главных частот примерно на шесть порядков выше уровня сплошного спектра — инструментального шума, автокорреляции таких режимов практически не затухают, экспоненты Ляпунова — отрицательны.

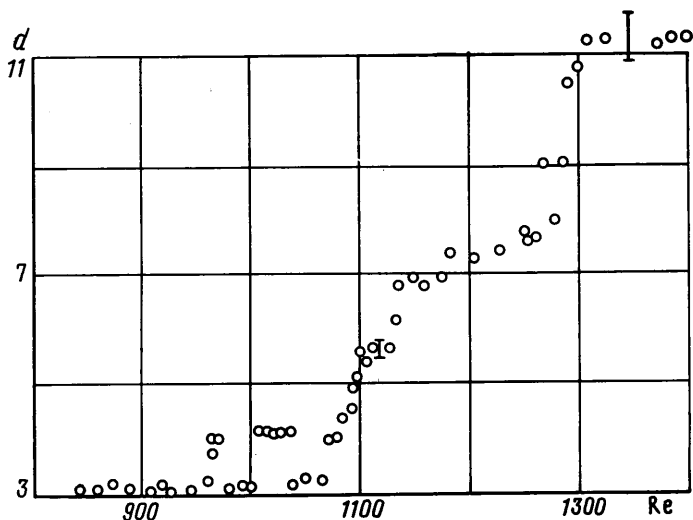
На фиг. 1 подробно изучена последовательность переходов (σ), которая получается только при резком изменении Re от значений $Re \leq 550$ до значений $Re > 660$. В этом случае после выхода на режим с одной частотой $\nu_2 = \nu_0/2$ возникновение хаоса происходит не только при росте Re , но и при его уменьшении.

Появление этой последовательности связано, по-видимому, с глобальной бифуркацией решения при числе $Re \approx 660$. Движение с частотой ν_2 существует в интервале $710 \leq Re \leq 800$ и подобно периодическому режиму с частотой ν_0 , возникающему вблизи предела устойчивости, но с азимутальным волновым числом $n=2$. С уменьшения числа Re , при $Re=710$ происходит бифуркация предельного цикла в тор-2, в спектре появляется вторая, очень низкая частота $\nu_{11} \approx 0,03$. Возникновение при $Re=685$ в спектрах еще более низкой частоты $\Delta\nu \approx 0,0067$ приводит к амплитудной модуляции. Переход к хаосу при $Re=680$, похоже, связан с уменьшением $\Delta\nu$ до нуля, т. е. с появлением в фазовом пространстве гомоклинической структуры. Дальнейшее уменьшение Re приводит к необратимому переходу при $Re=660$ на регулярный режим с одной частотой ν_1 , соответствующей пространственной структуре с азимутальным волновым числом $n=3$.

С ростом числа Re в результате закритических бифуркаций при $Re=800$ и 820 появляется квазипериодическое течение с тремя несоизмери-



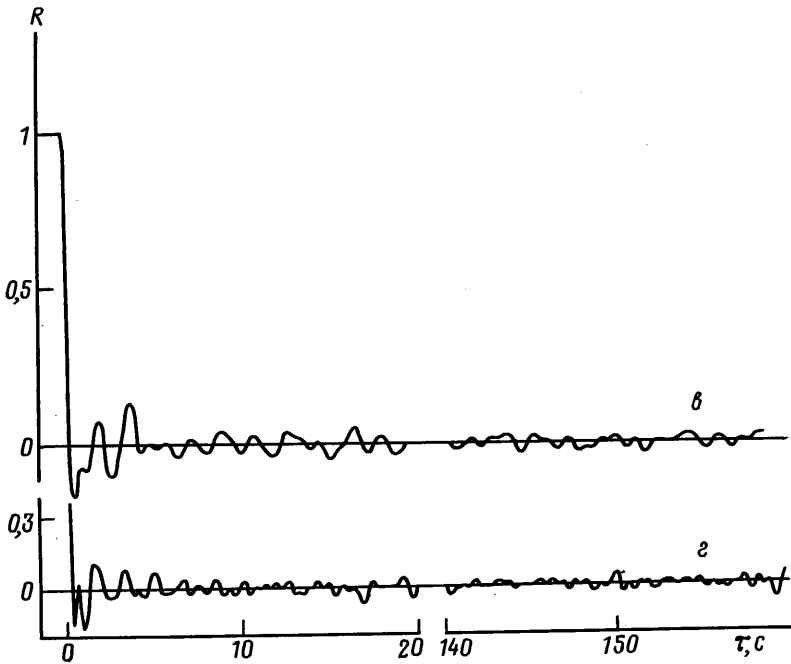
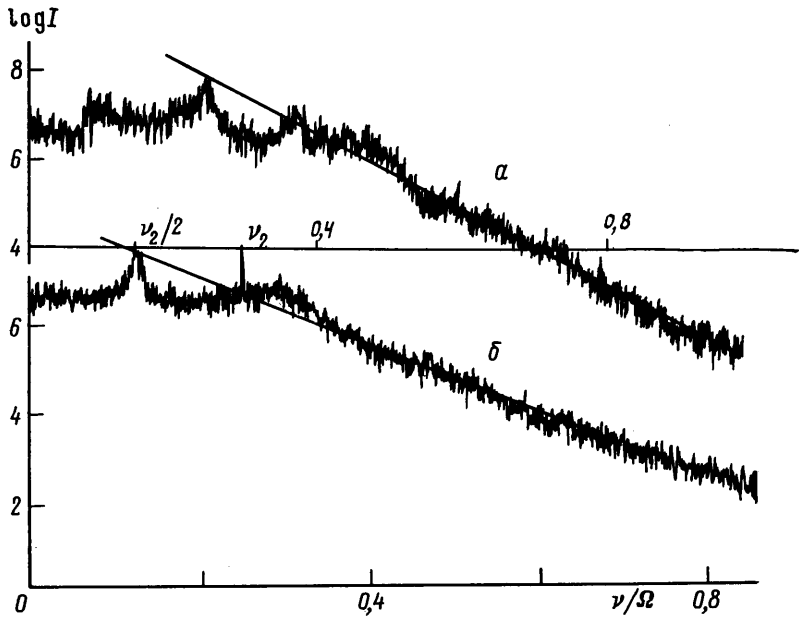
Фиг. 2



Фиг. 3

мыми частотами ν_2 , ν_7 и ν_8 , соответствующее в фазовом пространстве движению на устойчивом торе-3. Далее, при $Re=853$ возникает синхронизация частот $\nu_2 - \nu_3 = 2\nu_7$. Осевая симметрия, по-видимому, не запрещает этой синхронизации в отличие от случая синхронизации на двух частотах. Качественные изменения поведения частот колебаний с ростом Re вблизи области синхронизации представлены на фиг. 2. Разрушение синхронизации с одновременным появлением еще одной частоты при $Re=886$ приводит к возникновению хаотического режима с размерностью аттрактора на две единицы больше, чем у предшествующего регулярного.

Дальнейшие перестройки течения с ростом Re ведут к усложнению режимов и росту вероятностной размерности аттракторов с ~ 4 до ~ 9 при изменении Re от 886 до 1040, где этот хаотический режим перестраивается на другой, регулярный. Следует заметить, что оценки размерностей аттракторов при $d \geq 5$ очень ненадежны вследствие невозможности использования для расчетов достаточно длинных реализаций и из-за проведения оценок, например поточечной размерности, с помощью кубов, линейные размеры которых не только не стремятся к нулю, но и оказываются достаточно большими. Тем не менее алгоритм с ростом раз-



Фиг. 4

мерности вложения сходится и поэтому есть надежда, что полученные оценки качественно отражают реальную ситуацию.

Непосредственно после перехода к хаосу размерности аттракторов в различных сценариях варьируются от 3,5 до 4,8, т. е. непериодические режимы описываются вблизи перехода небольшим числом степеней свободы. При этом появляются положительные экспоненты Ляпунова. Расчет экспонент Ляпунова проведен для четырех хаотических режимов и им

предшествующих регулярных. Проведено сравнение размерностей, вычисленных через показатели Ляпунова d_λ , и поточечной d . Некоторые из значений размерности для последовательностей a , b (зависимость d от Re дана на фиг. 3) и c , представленных на фиг. 1, приведены ниже:

Последовательность	a	b	b	c
Re	821	985	1063	886
d_λ	3,98	3,4	3,8	4,92
d	4,5	3,3	3,63	4,8

Таким образом, оценки размерности аттракторов, полученные принципиально различными методами и являющиеся оценками сверху и снизу, дают примерно одинаковые значения, что указывает на сравнительно малое число степеней свободы, возбужденных в хаотических течениях при умеренных значениях чисел Рейнольдса.

Весьма необычные результаты получены при исследовании развития течения при больших Re в интервале $1400 \leq Re \leq 3200$. При $Re=1400$ происходит необратимый переход с хаотического режима с характерными частотами ν_1 и ν_5 (фиг. 1, b) на другой хаотический режим с характерной частотой ν_2 (фиг. 1, c). Затем во всем рассматриваемом интервале характеристики течения практически сохраняются. Качественно неотличимы спектры пульсаций при $Re=1410$ и 3200 (фиг. 4, a , b), в которых на фоне непрерывного спектра продолжают сохраняться довольно регулярные колебания на дискретной частоте ν_2 . Автокорреляционные функции практически идентичны и имеют вид, типичный для турбулентных течений (фиг. 4, c , d).

Тем не менее такие свойства спектра, как экспоненциальное затухание на более высоких частотах $d \lg I/d\nu \approx -9$ (фиг. 4, a , b) и наличие уширенных пиков на одних и тех же частотах в различных точках потока свидетельствуют о детерминированном характере и пространственной когерентности изучаемого течения при числе Рейнольдса вплоть до $Re=3200$.

5. Обсуждение результатов и выводы. Проведенные исследования в основном подтверждают применимость теории детерминированных динамических систем к описанию возникновения и развития хаоса в сферическом течении Куэтта. Как и в цилиндрическом течении Куэтта, переход к хаосу осуществляется после небольшого числа бифуркаций, размерности аттракторов вблизи переходов невелики: $\sim 3-4$.

Появление и исчезновение колебаний с изменением Re , а также возникновение или разрушение хаоса происходят одновременно во всем слое, хотя амплитуды колебаний на одних и тех же частотах могут различаться на несколько порядков, т. е. сферическое течение Куэтта ведет себя в рассматриваемом диапазоне параметров как единая динамическая система.

Однако пути перехода к хаосу имеют свои особенности и не полностью следуют классическим сценариям. Так, наполнение частотного спектра при приближении к хаосу всегда осуществляется за счет появления более медленных движений.

После возникновения хаоса с ростом Re течение обычно усложняется: скачком растет размерность аттракторов, поднимается уровень сплошного фона, увеличивается затухание автокорреляционной функции. Сравнительно небольшие значения размерности аттракторов вблизи перехода указывают на принципиальную возможность математического описания сферического течения Куэтта динамическими системами сравнительно невысокого порядка.

При больших Re ($Re > 1400 \approx 3Re_0$) отмечено существование протяженного интервала значений Re , где характеристики хаотического течения

практически сохраняются; спектр, хотя и сплошной, но ограничен сравнительно низкими частотами, для более высокочастотной части спектра характерно экспоненциальное затухание, свидетельствующее о детерминированном характере процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange attractors near quasi periodic flows of T^m , $m \geq 3$ // *Commun. Math. Phys.* 1978. V. 64. № 1. P. 35–40.
2. *Ланфорд О. Е.* Странные аттракторы и турбулентность // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 22–46.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. С. 288 с.
4. *Ильяшенко Ю. С.* Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнений Навье – Стокса на двумерном торе // *Успехи механики.* 1982. Т. 5. № 1/2. С. 31–63.
5. *Ладыженская О. А.* О конечности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье – Стокса и других диссипативных систем // *Зап. науч. семинара. ЛОМИ.* 1982. Т. 115. С. 137–155.
6. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // *Успехи мат. наук.* 1983. Т. 38. № 4. С. 133–187.
7. *Марсден Дж. Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
8. *Constantin P., Foias C., Manley O. P., Teman R.* Determining modes and fractal dimension of turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 150. P. 427–440.
9. *Иосс Ж., Дездеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
10. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. V. 19. № 1. P. 25–52.
12. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Commun. Math. Phys.* 1980. V. 74. № 2. P. 189–197.
13. *Langford W. F., Arneodo A., Couillet P., Tresser C., Coste J.* A mechanism for a soft mode instability // *Phys. Lett.* 1980. V. 78A. № 1. P. 11–14.
14. *Belyaev Yu. N., Monakhov A. A., Scherbakov S. A., Yavorskaya I. M.* Some routes to turbulence in spherical Couette flow // *Laminar Turbulent Transitions.* Berlin a.o.: Springer. 1985. P. 669–676.
15. *Беляев Ю. Н., Монахов А. А., Яворская И. М.* Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1978. № 2. С. 9–15.
16. *Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Show R. S.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. № 9. P. 712–716.
17. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lect. Notes Math.* 1981. № 899. P. 366–381.
18. *Brandstätter A., Swift J., Swinney H. L.* Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. № 16. P. 1442–1445.
19. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. № 5. P. 346–349.
20. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. V. 16. № 3. P. 285–317.
21. *Sano M., Sawada Y.* Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. № 10. P. 1082–1085.
22. *Kaplan J., Yorke J.* Chaotic behaviour of multi-dimensional differential equations // *Functional differential equation and approximation of fixed point.* N. Y. a. o.: Springer, 1979. P. 228–237.
23. *Yavorskaya I. M., Belyaev Yu. M., Monakhov A. A. et al.* Non-uniqueness and transition to turbulence in the flow between two rotating spheres // *Theor. and Appl. Mech.* Amsterdam. e. a., 1980. P. 431–443.

Москва

Поступила в редакцию
27.XI.1989