

УДК 532.529

© 1990 г.

Е. С. АСМОЛОВ

О ДИНАМИКЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Рассмотрена задача о движении отдельной сферической частицы в ламинарном пограничном слое при малых числах Рейнольдса, определяемых по относительной скорости движения и поперечному градиенту скорости невозмущенного частицей потока. Вычислена зависимость действующей на частицу поперечной силы, которая возникает вследствие неоднородности набегающего потока, от ее расстояния до поверхности плоской пластины. Показано, что направление поперечной силы меняется по мере удаления частицы от пластины: вблизи поверхности сила положительна, т. е. направлена от пластины, а на больших расстояниях — отрицательна.

В исследованиях течений дисперсной смеси в пограничном слое сила межфазного взаимодействия, как правило, принимается равной силе Стокса, т. е. совпадающей по направлению и пропорциональной относительной скорости движения фаз. В [1–3] при описании течения дисперсной смеси учитывалась также поперечная сила. При этом ее величина принималась равной значению, полученному в [4] для случая неограниченного сдвигового потока и для предельного соотношения чисел Рейнольдса. Ниже рассмотрен случай произвольного соотношения скорости набегающего потока и поперечного градиента скорости. Решение задачи строилось методом сращиваемых асимптотических разложений на основе обобщения подхода, развитого в [5, 6].

1. Рассмотрим движение сферической частицы радиуса a в ламинарном пограничном слое при условии, что число Рейнольдса относительного движения частицы $Re_v = \rho u_\infty a \mu^{-1}$, где ρ и μ — плотность и вязкость несущей фазы, u_∞ — скорость относительного движения, и число Рейнольдса $Re_k = \rho a^2 \mu^{-1} \partial U / \partial y$, определяемое по величине поперечного градиента скорости невозмущенного частицей потока $\partial U / \partial y$, являются асимптотически малыми параметрами, причем

$$Re_v \ll 1, \quad Re_k \ll 1, \quad \alpha = Re_v Re_k^{-1/2} \sim 1$$

Решение задачи строится в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = Re_k^{1/2}$ методом сращиваемых асимптотических разложений. Распределение скорости и давления во внутренней области с характерным пространственным масштабом a в главном приближении описываются известным решением задачи о вязком обтекании сферы. Пространственный масштаб внешней области течения $R_0 = a \varepsilon^{-1} \gg a$ определяется из условия, что вязкие и инерционные члены в уравнениях Навье — Стокса становятся величинами одного порядка.

Решению уравнений Стокса (главное приближение решения во внутренней области) соответствует действующая на частицу в направлении обтекания сила Стокса $F_s = 6\pi a \mu u_\infty$. Поперечная сила F_y возникает из решения внутренней задачи в следующем приближении по параметру ε : $F_y \sim \varepsilon F_s$. Как показано в [4], для определения силы F_y нет необходимости искать решение первого приближения во внутренней области, а достаточно найти распределение возмущенной скорости u_y во внешней области. Выражение для величины F_y при этом может быть записано в виде

$$F_y = \frac{3}{2} \mu a u_\infty \varepsilon \int \frac{v_y^{(0)}}{r^2} dS \quad (1.1)$$

Здесь интеграл берется по поверхности любой сферы радиуса r , центр которой совпадает с центром частицы, пространственные координаты обезразмерены на R_0 , $v_y^{(0)}$ — член нулевой степени в представлении внутреннего предела внешнего разложения скорости u_y в виде ряда по степеням r

$$u_y|_{r \rightarrow 0} = v_y^{(-1)} r^{-1} + v_y^{(0)} + r v_y^{(1)} + \dots \quad (1.2)$$

В условиях пограничного слоя масштаб внешней области R_0 мал по сравнению с его толщиной δ : $R_0 \sim X \text{Re}_x^{-1/2} \ll \delta \sim X \text{Re}_x^{-1/2}$ [6], где $\text{Re}_x = \rho U_\infty X / \mu \gg 1$ — число Рейнольдса пограничного слоя, а U_∞ и X — соответственно характерные скорость потока и продольный масштаб пограничного слоя. Таким образом, на масштабе внешней области R_0 профиль скорости $U(y)$ невозмущенного частицей потока можно считать линейным. При этом необходимо учитывать направление обтекания частицы. Так, в течениях дисперсных сред в пограничном слое частицы в силу их большей инерционности по сравнению с несущей средой обтекаются в направлении, противоположном направлению их движения, т. е. $U(y) = -u_\infty (y - \alpha) \alpha^{-1}$. Обратная ситуация, для которой $U(y) = u_\infty (y + \alpha) \alpha^{-1}$, может иметь место, в частности, в случае, когда частица попадает в пограничный слой с малой первоначальной скоростью и в дальнейшем увлекается потоком.

Уравнения для внешнего разложения возмущенных скорости \mathbf{u} и давления p , обезразмеренных соответственно на величины $u_\infty \varepsilon$ и $\rho u_\infty^2 \text{Re}_0 \varepsilon$, в системе координат, связанной с центром частицы, с учетом линейности профиля скорости невозмущенного потока могут быть записаны в виде [4]

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} + (y - \alpha) \partial \mathbf{u} / \partial x + u_y \mathbf{e}_x = -6 \pi \varepsilon \delta(r) \quad (1.3)$$

Здесь два последних члена в левой части уравнения импульса представляют собой вклад от инерционного члена. Наличие члена в правой части объясняется тем, что для течения во внешней области частица эквивалентна точечной силе, равной силе Стокса F_s . Отметим, что уравнения (1.3), а также все приведенные ниже аналитические выкладки относятся к ситуации, когда частица обтекается в направлении, противоположном направлению ее движения, т. е. $U(y) = u_\infty (y - \alpha) \alpha^{-1}$. Для получения аналогичных результатов в другом случае необходимо поменять знаки у последнего члена в левой части и у правой части уравнения импульса, а также соответствующим образом изменить знаки во всех последующих выражениях.

Граничные условия к уравнениям (1.3) представляют собой условия равенства нулю возмущений скорости на бесконечности и на поверхности плоской пластины в случае, если частица движется на расстояниях порядка R_0 от нее (т. е. на дне пограничного слоя)

$$\mathbf{u}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \mathbf{u}|_{y=y_0} = 0, \quad y_0 = O(1)$$

где $y_0 < 0$ — координата стенки, обезразмеренная на R_0 .

Решение задачи во внешней области должно удовлетворять также условию сращивания, т. е. первый член в разложении внутреннего предела скорости по степеням r (1.2) должен совпадать с внешним пределом решения уравнений Стокса

$$v_y^{(-1)} / r = u_{ys} = -3/4 (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{y}) / r^3$$

Сформулированная выше задача определения полей скорости и давления во внешней области рассматривалась ранее в [5, 6] для двух предельных значений α : $\alpha \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$. При этом найденные в результате зависимости поперечной силы от расстояния частицы до стенки для указанных предельных значений параметра α различались знаками: при $\alpha \rightarrow \infty$ сила F_y положительна, т. е. направлена от стенки, а при $\alpha \rightarrow 0$ — от-

рицательна. В этой связи можно ожидать, что для случая произвольного $\alpha=O(1)$ направление силы будет меняться по мере удаления частицы от стенки.

Для решения задачи во внешней области в [5, 6] производилось преобразование Фурье уравнений движения и граничных условий по координатам x и z . Уравнения, аналогичные (1.3), при этом преобразовались в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной y для фурье-образов скорости Γ и давления Π

$$\Gamma(k_x, k_z, y) = (2\pi)^{-2} \int \exp[-i(k_x x + k_z z)] u \, dx \, dz$$

$$\Pi(k_x, k_z, y) = (2\pi)^{-2} \int \exp[-i(k_x x + k_z z)] p \, dx \, dz$$

Применяя указанный метод для решения рассматриваемого здесь общего случая $\alpha \sim 1$ и последовательно исключая из полученной системы переменные Π , Γ_x , Γ_z , получим уравнение для фурье-образа поперечной скорости Γ_y

$$[L - ik_x(y - \alpha)] L \Gamma_y = -ik_x 3(2\pi)^{-1} \delta'(y) \quad (1.4)$$

$$L = k^2 - d^2/dy^2, \quad \Gamma_y|_{y=y_0} = d\Gamma_y/dy|_{y=y_0} = \Gamma_y|_{y \rightarrow +\infty} = 0$$

Решение уравнения (1.4), удовлетворяющее граничным условиям, может быть выражено через функции Эйри: $\text{Ai}(\xi)$, $\text{Ai}(\xi_1)$, $\xi = ik_x^{1/3}(y - \alpha) - k^2 k_x^{-2/3}$, $\xi_1 = e^{2\pi i/3} \xi$, и их производные. В окончательном виде решение для Γ_y при $k_x \geq 0$ (для $k_x < 0$, как нетрудно показать, решение (1.4) комплексно сопряжено решению от $(-k_x)$) записывается в виде [6]

$$\Gamma_y = \frac{I_1 [e^{ky} (I_3 - I_6) + e^{-ky} (I_5 + I_7)]}{2k(I_2 + I_3)} - \frac{I_4 e^{-ky}}{2k} - \frac{\chi(-y) (I_8 e^{ky} - I_9 e^{-ky})}{2k} \quad (1.5)$$

$$I_1 = \int_{y_0}^0 \varphi e^{-k\eta} d\eta, \quad I_2 = \int_{y_0}^0 \text{Ai}(\xi_1) e^{-k\eta} d\eta, \quad I_3 = \int_0^\infty \text{Ai}(\xi_1) e^{-k\eta} d\eta$$

$$I_4 = \int_{y_0}^0 \varphi e^{k\eta} d\eta, \quad I_5 = \int_{y_0}^0 \text{Ai}(\xi_1) e^{k\eta} d\eta, \quad I_6 = \int_0^y \text{Ai}(\xi_1) e^{-k\eta} d\eta$$

$$I_7 = \int_0^y \text{Ai}(\xi_1) e^{k\eta} d\eta, \quad I_8 = \int_y^0 \varphi e^{-k\eta} d\eta, \quad I_9 = \int_y^0 \varphi e^{k\eta} d\eta$$

$$\varphi = 3ik \cos \theta e^{i\pi/8} [e^{2\pi i/3} \text{Ai}'(\xi_{10}) \text{Ai}(\xi) - \text{Ai}'(\xi_0) \text{Ai}(\xi_1)] \chi(-y)$$

$$\xi_0 = \xi|_{\eta=0} = i\alpha k_x^{1/3} - k^2 k_x^{-2/3}, \quad \xi_{10} = e^{2\pi i/3} \xi_0, \quad \cos \theta = k_x/k$$

Здесь $\chi(y)$ — функция Хевисайда.

2. Распределение скорости u_y во внешней области, которое определяется из обратного преобразования Фурье

$$u_y = \iint \Gamma_y \exp[i(k_x x + k_z z)] dk_x dk_z$$

где Γ_y описывается формулой (1.5), удовлетворяет условию сращивания. Чтобы убедиться в этом, необходимо сравнить функции Γ_y и Γ_{ys} , где Γ_{ys} — фурье-образ внешнего предела скорости u_{ys} , найденной из решения уравнений Стокса. Функция Γ_{ys} удовлетворяет уравнению, сходному с (1.4)

$$L^2 \Gamma_{ys} = -ik_x 3(2\pi)^{-1} \delta'(y) \quad (2.1)$$

и граничным условиям $\Gamma_{yS}|y \rightarrow \mp \infty = 0$. Решение (2.1) может быть записано в виде

$$\Gamma_{yS} = -i3(4\pi)^{-1}|y| \cos \theta e^{-k|y|}$$

Из полученной формулы видно, что при $|y| \sim r \rightarrow 0$ функция $\Gamma_{yS} = O(r)$ при $k \sim 1$, а экспоненциальное ее убывание происходит при больших значениях $k \sim r^{-1} \gg 1$. Из этого следует, что характерные масштабы областей интегрирования по k_x, k_z в обратном преобразовании Фурье от Γ_{yS} также являются величинами порядка r^{-1} . Указанное обстоятельство приводит к особенности типа r^{-1} в обратном преобразовании скорости: $u_{yS} \sim \Gamma_{yS} k_x k_z \sim \sim r r^{-2} \sim r^{-1}$.

Сходные свойства при $|y| \rightarrow 0, k \sim |y|^{-1}$ имеет и решение (1.5) для Γ_y . Для доказательства этого утверждения необходимо, используя асимптотические выражения для функций Эйри и их производных при больших значениях аргумента $|\xi| \gg 1$ [7], представить функции $Ai(\xi_1)$ и ϕ в виде произведений рядов по степеням y и k^{-1} на экспоненты $\exp(-ky)$ и $\exp(ky)$ и затем вычислить все необходимые интегралы в формуле (1.5) (эта процедура подробно описана в [6]). Произведя все указанные вычисления, будем иметь

$$\Gamma_y = \Gamma_{yS} + \Gamma_{y1} + \Gamma_{y0}, \quad |y| \rightarrow 0, \quad k \sim |y|^{-1} \quad (2.2)$$

$$\Gamma_{y1} = \Gamma_{yS} i \alpha / 4 \cos \theta [(k^{-1} - |y|) + O(k^{-2}, y k^{-1} y^2)] \text{sign}(y)$$

$$\Gamma_{y0} = \Gamma_y|_{y=0} = [I_1(I_3 + I_5)(I_2 + I_3)^{-1} - I_4](2k)^{-1}$$

Таким образом, первый член в разложении (1.2) внутреннего предела скорости u_y по степеням r , равный u_{yS} (что эквивалентно условию сращения), формируется в обратном преобразовании Фурье за счет интегрирования первого члена Γ_{yS} в выражении для Γ_y (2.2). Вклад в величину $v_y^{(0)}$, знание которой необходимо для вычисления поперечной силы F_y , формируется двояким образом: за счет интегрирования второго члена $\Gamma_{y1} = O(r^2)$ в разложении (2.2) по области значений $k_x, k_z \sim r^{-1}$, а также интегрирования третьего члена $\Gamma_{y0} = O(1)$ по области значений $k_x, k_z \sim 1$

$$v_y^{(0)} = \iint \Gamma_{y1} \exp[i(k_x x + k_z z)] dk_x dk_z + 2 \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Re}(\Gamma_{y0}) k dk d\theta \quad (2.3)$$

Последняя формула записана с учетом комплексной сопряженности Γ_y при $k_x < 0$ с решением при $k_x \geq 0$.

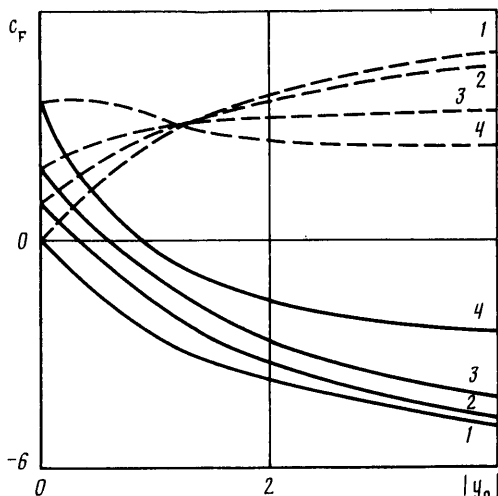
Отметим, что в отличие от предельного случая $\alpha \rightarrow 0$ [16] скорость $v_y^{(0)}$ содержит не только однородную (второй интеграл в выражении (2.3)), но и неоднородную (первый интеграл), т. е. зависящую от $xr^{-1}, yr^{-1}, zr^{-1}$, части. При этом, однако, указанная неоднородная часть не дает вклада в величину поперечной силы (1.1), поскольку соответствующий интеграл в (2.3) представляет собой функцию, нечетную по y , так что интеграл от нее по поверхности сферы, центр которой совпадает с центром частицы, равен нулю.

Интеграл (1.1) от однородной части $v_y^{(0)}$ равен, очевидно, ее произведению на 4π . В результате будем иметь для величины поперечной силы

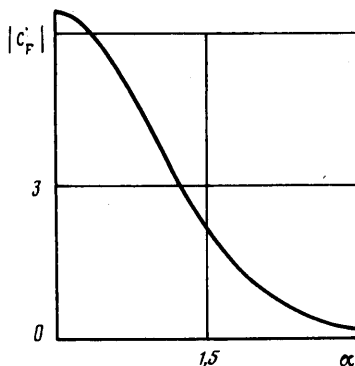
$$F_y = c_F \mu a |u_\infty| \text{Re} k^{1/2}, \quad c_F = 12\pi \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Re}(\Gamma_{y0}) k dk d\theta \quad (2.4)$$

3. Численное определение интегралов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 и интегралов (2.4), знание которых необходимо для вычисления поперечной силы F_y с относительной точностью $\beta = 10^{-2}$, производилось аналогично [6].

На фиг. 1 представлены результаты расчета коэффициента поперечной силы c_F , характеризующего ее зависимость от безразмерного расстоя-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния частицы до стенки y_0 , для значений параметра $\alpha=0; 0,5; 1$ и 2 (кривые 1–4). Расчет при $\alpha=0$ выполнен в [6]. Сплошные кривые соответствуют случаю $u_\infty < 0$, штриховые — $u_\infty > 0$. При $u_\infty < 0$ (течение дисперсной смеси в пограничном слое) для всех $\alpha > 0$ зависимости $c_F(y_0)$ являются знакопеременными функциями: вблизи поверхности пластины коэффициент c_F и, следовательно, сила F_y положительны, а на больших расстояниях от нее — отрицательны. По этой причине при движении дисперсной смеси в пограничном слое частицы не достигают поверхности пластины, как это следует из [2, 3], где для c_F принималось предельное значение $c_F^0 = -6,46$. В результате действия знакопеременной поперечной силы частицы, очевидно, будут скапливаться в тонком подслое у поверхности пластины толщиной порядка $R_0 \sim X Re_x^{-2/4}$.

Движение частицы в основной части пограничного слоя в масштабе внешнего разложения R_0 соответствует ее обтеканию неограниченным сдвиговым потоком: $|y_0| \sim \delta/R_0 \rightarrow \infty$. Вычисление значения коэффициента поперечной силы c_F в этом предельном случае целесообразно проводить, решая непосредственно уравнение (1.4) с граничными условиями $\Gamma_y|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0$, поскольку выполнение предельного перехода в формулах (1.5) затруднительно. Ниже приведены лишь окончательные выражения для Γ_{y0}

$$\Gamma_{y0} = \pi k \cos \theta \left[e^{-2\pi i/3} \text{Ai}'(\xi_{20}) \int_0^\infty \text{Ai}(\xi_1) e^{-\lambda \eta} d\eta + e^{2\pi i/3} \text{Ai}'(\xi_{10}) \int_{-\infty}^0 \text{Ai}(\xi_2) e^{\lambda \eta} d\eta \right], \quad \xi_2 = e^{2\pi i/3} \xi$$

Зависимость $c_F(\alpha)$ при $y_0 \rightarrow -\infty$ представлена на фиг. 2. Необходимо принять во внимание, что при обтекании неограниченным сдвиговым потоком абсолютная величина c_F не зависит в силу симметричности задачи от направления обтекания частицы и в двух указанных случаях ($u_\infty < 0$ и $u_\infty > 0$) при одинаковом α коэффициенты c_F различаются только знаками. При $\alpha \rightarrow 0$ предельное значение c_F совпадает со значением $c_F^0 = 6,46$, полученным в [4]. В другом предельном случае при $\alpha \rightarrow \infty$ коэффициент c_F стремится к нулю быстрее, чем α^{-2} .

Автор выражает благодарность М. Н. Когану и Н. К. Макашеву за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Otterman B., Lee S.-L.* Particulate velocity and concentration profiles for laminar flow of a suspension over a flat plate // Proc. «Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst.» Monterey, Calif., 1970. Stanford, Calif., 1970. P. 311–322.
2. *Осипцов А. Н.* Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 80–87.
3. *Наумов В. А.* Расчет ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 171–173.
4. *Saffman P. G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385–400; Corrigendum: J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt 3. P. 624.
5. *Vasseur P., Cox R. G.* The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid // J. Fluid Mech. 1977. V. 80. Pt 3. P. 561–591.
6. *Асмолов Е. С.* О поперечной силе, действующей на сферическую частицу в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 66–71.
7. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.1989