

УДК 532.516.5+532.526.75

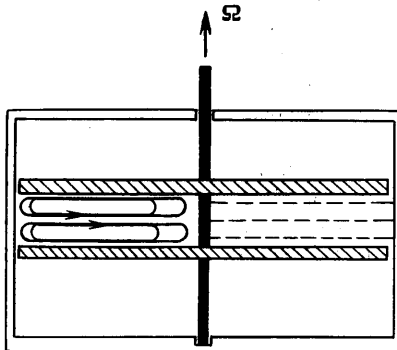
© 1990 г.

В. А. КРЫМОВ

О РАСКРУТКЕ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ МАЛОЙ ВЫСОТЫ

Данная работа посвящена исследованию процесса раскрутки жидкости (spin-up) внутри цилиндрической полости. Постановка задачи такова. Жидкость, заключенная внутри цилиндрической полости, находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени стенки полости начинают вращаться с угловой скоростью Ω . Исследуется процесс установления вращения жидкости с этой угловой скоростью. Задача характеризуется двумя безразмерными параметрами: числом Экмана $E = \nu/\Omega h^2$ и аспектным отношением h/R_0 , где ν — коэффициент кинематической вязкости, h — высота цилиндрической полости, R_0 — ее радиус. В [1, 2] теоретически и экспериментально был рассмотрен линейный случай раскрутки, когда жидкость вместе с полостью в начальный момент уже находится в состоянии квазистационарного вращения и получает малое приращение угловой скорости. Оказалось, что угловая скорость вращения жидкости подстраивается к угловой скорости вращения полости за характерное время $\tau_e = h/\sqrt{\Omega\nu}$.

В настоящей статье рассматривается случай раскрутки из состояния покоя при малых числах E . В начальный момент времени вблизи торцевых границ цилиндра образуются тонкие экмановские пограничные слои. Внутри погранслоев жидкость раскручивается за счет вязких сил, тогда как основная масса жидкости (внутренняя область) между погранслоями в начальный момент времени неподвижна. Вращающаяся жидкость внутри погранслоев центробежными силами отбрасывается на боковую стенку и поступает вдоль нее во внутреннюю область, обладая избыточным моментом вращения. Постоянный приток вращающейся жидкости из погранслоев вблизи боковой стенки приводит к созданию относительно слабой меридиональной циркуляции (фиг. 1). Таким образом во внутренней области образуется граница раздела между вращающейся и неподвижной жидкостью, распространяющаяся к оси цилиндра. Если толщина границы раздела мала по сравнению с радиусом, то можно ожидать, что она будет распространяться автомодельным образом. Обнаружению и исследованию этого эффекта посвящена настоящая статья.



Фиг. 1

1. Теоретическая модель. Аналитическая модель импульсной раскрутки жидкости из состояния покоя была предложена в [3]. В этой работе предполагалось, что: экмановские пограничные слои, возникающие вблизи торцевых границ полости, квазистационарны; боковые стенки полости не оказывают воздействия на перенос массы в пограничных слоях; пограничные слои можно считать локально кармановскими [4].

Исходя из результатов [5], в [3] была предложена зависимость для радиальной скорости u , индуцируемой во внутренней области пограничными слоями

$$u = \chi E^{1/2} (\nu - r\Omega) \quad (1.1)$$

где ν — азимутальная скорость, χ — коэффициент порядка единицы. Уравнение, описывающее изменение скорости вращения жидкости во времени,

имеет вид [3]

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \chi(V-R) \left(\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} \right) = \frac{E^{1/2}}{A^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial}{\partial R} \frac{V}{R} \right) \quad (1.2)$$

$$R=r/R_0, \quad V=v/\Omega R_0, \quad \tau=t/\tau_0, \quad A=R_0/h$$

где R_0 — радиус полости. Член в правой части данного уравнения описывает влияние вязкости на процесс раскрутки жидкости. Коэффициент, стоящий перед ним, равен квадрату отношения характерной толщины внешнего слоя Стюартсона $O(E^{1/2})$ [1] к радиусу цилиндрической полости, поэтому в дальнейшем будем по аналогии с числом Экмана называть его числом Стюартсона St .

Для случая $St=A^{-2}E^{1/2} \ll 1$ в [3] найдено аналитическое решение

$$V=0 \quad (R \leq \exp(-\tau\chi))$$

$$V = \frac{R^2 \exp(2\tau\chi) - 1}{R(\exp(2\tau\chi) - 1)} \quad (R \leq \exp(-\tau\chi)) \quad (1.3)$$

Данное решение показывает, что в жидкости распространяется фронт вращения в направлении оси вращения по закону $R = \exp(-\chi\tau)$. Последующие экспериментальные исследования [6–8] подтвердили существование распространяющегося фронта вращения. Однако его форма и скорость распространения оказались отличными от предсказанных в [3] и не универсальными. Следует отметить, что численные расчеты на базе более полной системы уравнений находятся в хорошем согласии с экспериментальными результатами [7, 9].

Уравнение (1.2) без правой части (т. е. при $St \ll 1$) допускает семейство автомодельных решений, описывающее распространение фронта раскрутки без изменения его формы. (Данное решение получено Д. Ю. Маниным.) Сделав в (1.2) подстановку $V=R\Omega(c\tau - \ln R)$, легко получить в неявном виде закон автомодельного распространения фронта вращения ($c < -1$ — скорость распространения фронта)

$$\tau = \frac{1}{2\chi} \ln \frac{\Omega^{1+\chi/c}}{1-\Omega} + \frac{1}{c} \ln R \quad (1.4)$$

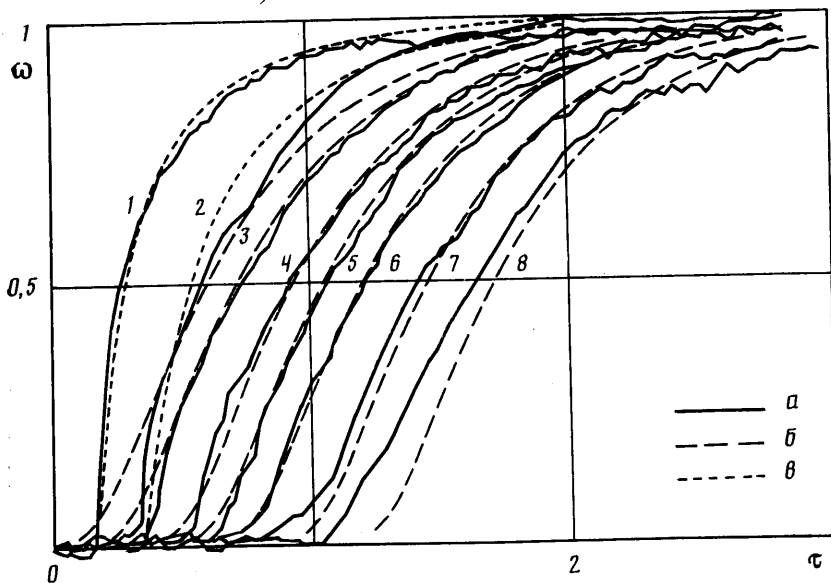
Легко видеть, что данное решение представляет собой волну, распространяющуюся без изменения формы в координатах $(\tau, \ln R)$.

В эксперименте малых чисел Стюартсона можно достигнуть, уменьшая число Экмана или аспектное отношение полости. Однако второй способ осуществить легче экспериментально. Поэтому в настоящей работе в отличие от предыдущих экспериментальных исследований был выбран цилиндр малой высоты.

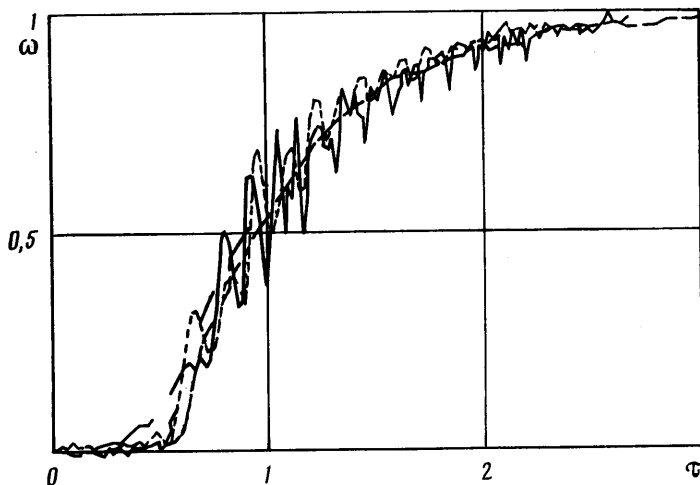
2. Экспериментальная установка. Основой экспериментальной установки (фиг. 1) был плексигласовый куб, в котором выточена цилиндрическая полость [10, 11]. В полости размещались два плоских диска радиусом $R_0=10$ см. Общая ось вращения дисков перпендикулярна каждому из них и совпадает с осью симметрии полости. Зазор между краями дисков и внутренней стенкой не превышал 0,5 мм. Расстояние между дисками h варьировалось в пределах от 0,8 до 2,0 см. Полость заполнялась раствором глицерина в воде (ν изменялся от 0,01 до 0,05 см²/с). Диски приводились во вращение с постоянной угловой скоростью, которую можно было выбирать в пределах от 0,9 до 9 с⁻¹. Это позволило исследовать процесс раскрутки жидкости в большом диапазоне чисел Экмана ($E=0,02-0,0003$) и Стюартсона ($St=3 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-4}$).

Измерения проводились с помощью лазер-доплер-анемометра фирмы «DANTEC», результаты обрабатывались на ПЭВМ «WEST PC-1600». В экспериментах измерялась азимутальная скорость вращения жидкости на средней плоскости между дисками.

Согласно результатам работы [10], влияние неподвижной боковой стенки распространяется в глубь жидкости на расстояние порядка $h < R_0$, поэтому после раскрутки жидкости основная ее масса вращается как единое целое вместе с дисками. Равенство угловой скорости жидкости в состоянии квазитвердого вращения и угловой скорости дисков проверялось независимыми измерениями. Для исследования



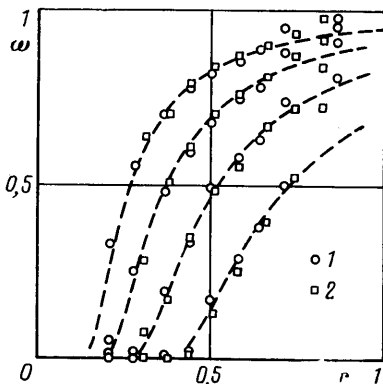
Фиг. 2



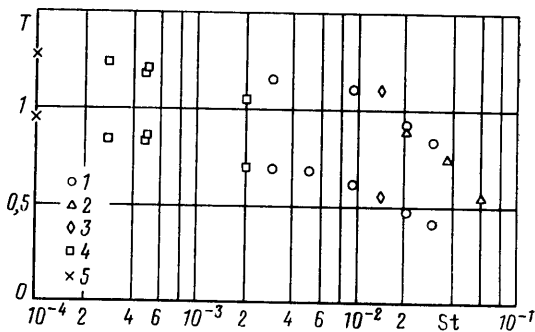
Фиг. 3

изменения формы распространяющегося фронта раскрутки измерения проводились на различных радиусах в диапазоне $0,2 < R < 0,9$.

3. Невязкий режим раскрутки жидкости. На фиг. 2 приведены экспериментальные зависимости (а) безразмерной азимутальной скорости жидкости ω от безразмерного времени $\tau (t/\tau_e)$ при параметрах течения $E = 0,002$, $St = 2,8 \cdot 10^{-4}$ для значений радиуса $R = 0,86; 0,71; 0,64; 0,5; 0,44; 0,37; 0,28; 0,21$ (1–8 соответственно). На этом же рисунке нанесены теоретические зависимости (1.3)–(в) и (1.4)–(б). Из рисунка видно, что на больших радиусах (начальный этап распространения фронта раскрутки) экспериментальная зависимость довольно хорошо описывается решением (1.3). Впоследствии происходит постепенное установление автомодельного режима распространения по зависимости (1.4). Расхождение с зависимостью (1.4) начинается при малых R , когда ширина фронта, уменьшаясь по мере приближения к оси, становится сравнима с характерной шириной слоя Стюартсона и возрастает роль вязких сил. Аналогичные результаты были получены и для других параметров E и St , при которых проводились эксперименты.



Фиг. 4



Фиг. 5

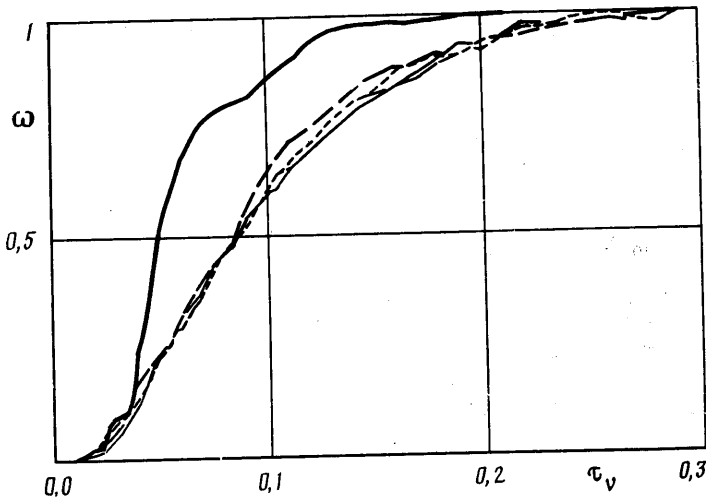
Универсальность зависимости безразмерной угловой скорости от безразмерного времени для различных значений E и St иллюстрирует фиг. 3, где эти зависимости приведены к радиусу $R=0,5$ сдвигом по времени на величину $c \cdot \ln(R/0,5)$. Зависимости на фиг. 3 соответствуют (по длине пунктира): 1 — $E=0,0003$, $St=7 \cdot 10^{-4}$, $R=0,61$; 2 — $E=0,0006$, $St=5 \cdot 10^{-4}$, $R=0,44$; 3–5 — $E=0,002$, $St=2,8 \cdot 10^{-4}$, $R=0,64$; 0,44; 0,28. Безразмерные временные зависимости угловой скорости вращения имеют одну и ту же форму для различных параметров течения и различных радиусов. Это подтверждает существование автомодельного режима распространения фронта раскрутки.

При $E < 0,001$ наблюдалась генерация колебаний угловой скорости. Они видны на ряде реализаций из фиг. 3. Колебания имеют частоту, близкую к Ω , возникают одновременно на различных радиусах и скорее всего связаны с нарушением осевой симметрии фронта раскрутки.

На фиг. 4 представлены зависимости угловой скорости вращения жидкости от радиуса для различных значений τ ($\tau=0,6; 0,9; 1,2; 1,5$). Кривые — теоретическая зависимость (1.4), 1 — течение с параметрами $E=0,002$, $St=2,8 \cdot 10^{-4}$, 2 — $E=0,0006$, $St=5 \cdot 10^{-4}$ (на данной зависимости осреднены колебания, о которых говорилось выше). Видно, что при $R < 0,7$ устанавливается автомодельная форма распространяющегося фронта раскрутки.

На основании проведенных экспериментов были выбраны наилучшие значения параметров c и χ , входящих в формулу (1.4). Значение $c=-1,1$ соответствует экспериментальной скорости распространения фронта раскрутки на автомодельной стадии. Она не зависит от параметров течения. Значение c определялось по зависимости времени прихода начала фронта от радиуса. При данном значении c наилучшее совпадение формы экспериментальных и теоретических кривых обеспечивается при $\chi=1,0$. Все теоретические зависимости на фиг. 2 и 4 приведены при данных значениях параметров. Таким образом, экспериментальные результаты дают наиболее оптимальное значение константы χ , входящей в зависимость (1.1) [4].

Проведенные эксперименты позволяют определить область значений E и St , при которых распространение фронта раскрутки носит автомодельный характер. В проведенных экспериментах автомодельное распространение фронта наблюдалось только при $E < 0,002$. При $E > 0,002$ форма фронта раскрутки близка к автомодельной, однако за счет вязких сил скорость распространения становится больше автомодельного значения $c=-1,1$. На основании данных настоящего эксперимента и результатов [7], где режим раскрутки неавтомодельный, можно выделить область автомодельного режима раскрутки по St : $St < 1 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, автомодельный режим раскрутки реализуется при $E < 0,002$ и $St < 1 \cdot 10^{-3}$. На фиг. 5 приведены



Фиг. 6

данные о времени прихода начала ($\omega=0,05\Omega$) и середины фронта ($\omega=0,5\Omega$) на радиус $R=0,39$, полученные в различных экспериментальных работах: 1 — [7], 2 — [6], 3 — [8], 4 — настоящая работа. На оси помечено (5) время прихода, вычисленное по формуле (1.3) [3]. Из рисунка видна постепенная по St стабилизация скорости распространения фронта.

5. Вязкий режим раскрутки жидкости. В вязком режиме раскрутка происходит за счет трения между горизонтальными слоями жидкости, аналогично тому как проходило торможение жидкости при числах E близких к 1 [10]. На фиг. 6 приведены зависимости безразмерной угловой скорости от «вязкого» времени $\tau_v = t/(h^2/\nu)$ с параметрами течения (по длине пунктира): 1—3 — $\nu=0,01$ см²/с, $\Omega=0,9$ с⁻¹, $h=0,8$ см ($E=0,017$, $St=0,0008$), $R=0,88$; 0,57; 0,43 и 4—5 — $\nu=0,035$ см²/с, $\Omega=0,9$ с⁻¹, $h=1,5$ см ($E=0,016$, $St=0,03$), $R=0,66$; 0,46. Из рисунка видно, что если вблизи стенки (на начальном этапе раскрутки) и существует распространяющийся фронт раскрутки, то на малых радиусах раскрутка происходит вязким образом до прихода фронта. Об этом свидетельствует то, что обезразмеренные экспериментальные зависимости при малых R ложатся на единую кривую. Очевидно, что чем больше E , тем больше по R будет область, в которой раскрутка жидкости происходит вязким образом. В области значений $0,1 < \omega < 0,9$ экспериментальные данные удовлетворительно аппроксимируются экспоненциальной зависимостью с показателем $k = (17 \pm 3)/(h^2/\nu)$. Отметим, что в эксперименте по вязкому торможению жидкости [10] был получен показатель $k=10/(h^2/\nu)$.

Таким образом, проведенные эксперименты показывают, что при раскрутке жидкости в цилиндре малой высоты ($h \ll R_0$) существуют две области параметров течения с универсальными зависимостями угловой скорости вращения жидкости от времени: область больших чисел Экмана с вязким режимом раскрутки жидкости и область малых чисел Экмана и Стюартсона, где наблюдался распространяющийся фронт раскрутки, описываемый зависимостью (1.4).

Автор благодарит Ф. В. Должанского за постановку задачи и Д. Ю. Манина за конструктивное обсуждение результатов эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.
2. Greenspan H. P., Howard L. N. On a time-dependent motion of a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. Pt 3. P. 385-404.

3. *Wedemeyer E. H.* The unsteady flow within a spinning cylinder // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 20. Pt 3. P. 383-399.
4. *Karman Th., von.* Über laminare und turbulente Reibung // *Z. angew. Math. und Mech.* 1921. B. 1. H. 4. S. 233-252.
5. *Rogers M. N., Lance G. N.* The rotationalary symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 7. Pt 4. P. 617-631.
6. *Watkins W. B., Hussey R. G.* Spin-up from rest in a cylinder. // *Phys. Fluids.* 1977. V. 20. № 10. Pt 1. P. 1596-1604.
7. *Hyun J. M., Leslie F., Fowles W. W., Warn-Varnas A.* Numerical solutions for spin-up from rest in a cylinder // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 127. P. 263-281.
8. *Savas O.* On flow visualization using reflective flakes // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 152. P. 235-248.
9. *Warn-Varnas A., Fowles W. W., Piaošek S., Lee S. M.* Numerical solutions and laser-Doppler measurements of spin-up // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 85. № 4. P. 609-639.
10. *Должанский Ф. В., Крымов В. А.* О торможении жидкости в цилиндре малой высоты // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985. № 1. С. 19-25.
11. *Крымов В. А., Манин Д. Ю.* Торможение жидкости в цилиндре малой высоты при больших числах Рейнольдса // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 3. С. 39-46.

Москва

Поступила в редакцию
21.VI.1989