

УДК 532.5

© 1990 г.

Е. Б. ГЛЕДЗЕР, А. Л. МАКАРОВ

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Один из способов описания стационарных осесимметричных течений невязкой несжимаемой жидкости содержится в методе Громеки – Бельтрами, предложенном более 100 лет назад [1, 2]. Он состоит в приведении уравнений Эйлера в стационарном случае к якобиевому виду $\{\psi, L\psi\}=0$, где L – линейный оператор, действующий на искомую функцию. Тогда точное стационарное решение нелинейной задачи можно найти как решение линейного уравнения $L\psi=\lambda\psi$. Некоторые частные случаи решений этого уравнения приведены в книгах [3, 4]. При изучении аналогичных течений в магнитной гидродинамике, где через ψ выражаются компоненты магнитного поля, это уравнение носит название Грэда – Шафранова [5–7]. Примеры винтовых и циркуляционных течений рассмотрены также в [8–10].

В связи с тем, что данный подход дает описание весьма широкого класса точных стационарных решений уравнений идеальной жидкости, в том числе и для замкнутых объемов, представляет интерес рассмотреть классификацию этих решений в зависимости от некоторых имеющихся свободных параметров задачи. Кроме того, возможно также распространить метод для определения некоторых типов течений в стационарной осесимметричной конвекции несжимаемой жидкости с учетом поля сил Кориолиса.

1. Уравнения стационарной осесимметричной конвекции идеальной несжимаемой жидкости с учетом сил Кориолиса для цилиндрической системы после введения функции тока, описывающей течение в плоскости координат (r, z) , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + w \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} &= - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + w \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u_r \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_r &= 0 \\ u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \tag{1.2}$$

$$\left\{ \psi, \frac{\omega}{r} \right\} = \beta g \frac{\partial T}{\partial r} + 2\Omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{2}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \tag{1.2}$$

$$\{\psi, T\} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \{\psi, r u_\varphi + \Omega r^2\} = 0$$

Здесь Ω – угловая скорость вращения системы как целого.

Решение уравнений (1.2) можно представить в форме

$$T = \theta(\psi), \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \Phi(\psi), \quad -\Omega r$$

$$\frac{\omega}{r} + \frac{\Phi \Phi'}{r^2} + \beta g z \theta' = -F'(\psi) \quad (1.3)$$

где Φ , θ и F — произвольные функции от ψ , штрихи обозначают соответствующие производные по ψ .

Отсюда следует, что стационарная осесимметричная конвекция в поле сил Кориолиса может быть описана уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \Phi \Phi' + r^2 F' + \beta g z r^2 \theta' = 0 \quad (1.4)$$

В общем случае (1.4) — нелинейное уравнение. Конкретизируем входящие в него функции Φ , θ , F так, чтобы это уравнение оказалось линейным

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (\alpha^2 + \beta g \delta z r^2 + \gamma r^2) \psi = 0$$

$$\Phi = \alpha \psi, \quad \theta = \frac{1}{2} \delta \psi^2, \quad F = \frac{1}{2} \gamma \psi^2 \quad (1.5)$$

Здесь α , β , γ — константы.

Вихрь Ω_0 для рассматриваемого класса течений имеет вид

$$\Omega_0 = \text{rot } \mathbf{u} = -\Phi' \mathbf{u} - i_\varphi (\Omega r \Phi' + \beta g z r \theta' + r F') - i_z 2\Omega \quad (1.6)$$

Уравнение (1.5) изучалось только в случае однородной жидкости ($\beta=0$). В работах [3, 4] были приведены некоторые его решения при $\gamma=0$, что отвечает [1, 2] винтовым течениям $\Omega_0 = -\alpha \mathbf{u}$. При этом в цилиндрической геометрии при $\alpha^2 > k^2 \pi^2$ имеются решения вида

$$\psi = r J_1(\lambda_n r) \sin k \pi z, \quad \lambda^2 = \alpha^2 - k^2 \pi^2$$

где J_1 — функция Бесселя.

2. Рассмотрим регулярные решения уравнения (1.5) при $\delta=0$, $\gamma \neq 0$ в цилиндре с размерами L , R_0 .

Случай $\gamma > 0$. В соответствующих безразмерных переменных (r/R_0 , z/L) уравнение (1.5) имеет вид

$$D = \frac{L}{R_0}, \quad \rho = \frac{\sqrt{\gamma}}{2D} r^2$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2D \sqrt{\gamma} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \alpha^2 \psi + 2D \sqrt{\gamma} \rho \psi = 0$$

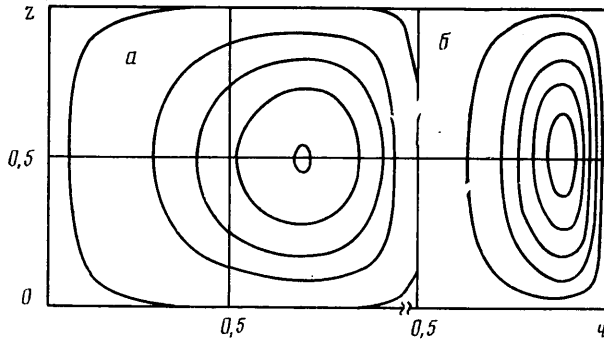
$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (r=1), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (z=0, 1)$$

где на границах цилиндра принято условие для невязкой жидкости — равенство нулю нормальных компонент скорости. Тогда (2.1) при разделении переменных приводится к частному случаю волнового уравнения Кулона

$$\psi = X(\rho) \sin k \pi z$$

$$\frac{d^2 X}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho}\right) X = 0$$

$$X(\rho_0) = 0, \quad \rho_0 = \frac{\sqrt{\gamma}}{2D}, \quad \eta = \frac{k^2 \pi^2 - \alpha^2}{4D \sqrt{\gamma}} \quad (2.2)$$



Фиг. 1

которое имеет регулярное при $\rho=0$ решение в виде волновой функции Кулона [11]

$$X(\rho) = F_0(\eta_i, \rho), \quad F_0(\eta_i, \rho_0) = 0 \quad (2.3)$$

Здесь индекс i нумерует решения уравнения (2.3). При $i=1$ функция $F_0(\eta_i, \rho)$ равна нулю только при $\rho=0$, $\rho=\rho_0$; при $i=2$ она обращается в нуль еще в одной промежуточной точке и т. д.

Схема получения решения представляется следующей: при данном D задаем $\gamma > 0$ и находим по (2.2) $\rho_0(\gamma)$. Из (2.3) определяем корни η_i ($i=1, 2, \dots$), а из (2.2) определяем $\alpha = \alpha_{i,k}$. Тогда функция тока и поле скорости течения имеют вид

$$\psi = F_0(\eta_i, \rho) \sin k\pi z, \quad u_r = \frac{k\pi}{r} F_0(\eta_i, \rho) \cos k\pi z$$

$$w = -\frac{\sqrt{\gamma}}{D} F_0' \sin k\pi z, \quad F_0' = \frac{dF_0(\eta_i, \rho)}{d\rho} \quad (2.4)$$

$$u_\varphi = \frac{\alpha_{i,k}}{r} F_0 \sin k\pi z, \quad \alpha_{i,k}^2 = k^2\pi^2 - \eta_i 4D\sqrt{\gamma}$$

В частном случае из (2.4) получаем решение при $\gamma = 4D^2\pi^2$. Тогда $\rho_0 = \pi$, $\eta_1 = 0$, $F_0(\eta_1, \rho) = \sin \rho$, $\alpha_{1,k} = k\pi$. На фиг. 1 приведены линии тока этого течения с $\eta_1 = 0$, $k=1$ в сравнении с течением (2.4), в котором $\eta_1 = 5$, $k=1$. Видно, что с увеличением η (а значит, и γ) происходит сгущение линий тока к стенкам цилиндра.

Следует отметить, что в полученном решении (2.4) по заданному $\gamma > 0$ для фиксированной геометрии цилиндра определяется параметр $\alpha = \alpha_{i,k}$, входящий в (2.4). При этом γ является произвольным, а решение (2.4) уравнения (2.2) состоит из одного произведения $F_0(\eta_i, \rho_0(\gamma)r^2) \sin k\pi z$. Путем выбора параметра $\gamma > 0$ можно добиться, чтобы решение уравнения (2.2) состояло из суммы двух таких произведений

$$\psi = F_0(\eta_i, \rho_0(\gamma)r^2) \sin k\pi z + C F_0(\eta_j, \rho_0(\gamma)r^2) \sin p\pi z \quad (2.5)$$

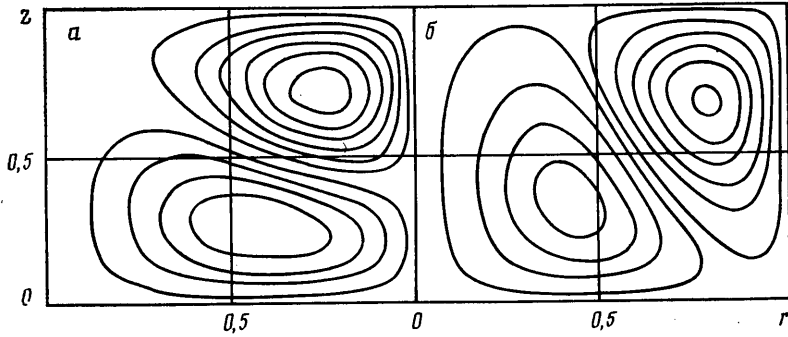
где $C = \text{const}$, k, p — целые. Для этого необходимо, чтобы определяемые по (2.4) значения α для двух слагаемых в (2.5) совпадали

$$\alpha^2 = \alpha_{i,k}^2 = k^2\pi^2 - \eta_i 4D\sqrt{\gamma} = k^2\pi^2 - 8D^2\rho_0\eta_i \quad (2.6)$$

$$\alpha^2 = \alpha_{j,p}^2 = p^2\pi^2 - \eta_j 4D\sqrt{\gamma} = p^2\pi^2 - 8D^2\rho_0\eta_j$$

где η_i и η_j — два различных корня уравнения (2.3). При этом ρ_0 , а значит по (2.2) и γ можно найти из уравнений, которые следуют из (2.6), (2.3)

$$\rho_0(\eta_i(\rho_0), \eta_j(\rho_0)) = (k^2 - p^2) \frac{\pi^2}{8D^2}, \quad F_0(\eta_i, \rho_0) = 0, \quad F_0(\eta_j, \rho_0) = 0$$



Фиг. 2

В решении (2.5) произвольным в силу линейности уравнения (2.1) является параметр C . На фиг. 2 приведены линии тока течения (2.5) при значениях $C=0,5$ и 2 для параметров $k=2$, $p=1$, $\rho_0=\pi$, $\eta_1=0$, $\eta_2=-1,450223$.

Случай $\gamma < 0$. Вместо (2.1), (2.2) теперь получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2D\sqrt{|\gamma|}\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \alpha^2 \psi - 2D\sqrt{|\gamma|}\rho \psi = 0$$

$$\rho = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{2D} r^2, \quad \rho_0 = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{2D}, \quad \psi = X(\rho) \sin k\pi z$$

$$\frac{d^2 X}{d\rho^2} - \left(1 + \frac{2\eta}{\rho}\right) X = 0, \quad X(\rho_0) = 0, \quad \eta = \frac{k^2 \pi^2 - \alpha^2}{4D\sqrt{|\gamma|}} \quad (2.7)$$

которые имеют решения, равные нулю на внешней границе $\rho = \rho_0$ только при $\eta < -1$. Соответствующее поле скорости описывается функциями, аналогичными (2.4), однако сгущение линий тока при увеличении $|\gamma|$ имеет место теперь вблизи оси $r=0$ цилиндра.

Для построения решения в неограниченном по r пространстве воспользуемся тем свойством, что при $\eta = -n$, n — целые, функция $X(\rho)$ имеет следующее представление через ортогональные многочлены Лаггера L_n :

$$X(\rho) = -\frac{1}{2} \rho \exp(-\rho) \frac{d}{d\rho} L_n(2\rho) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

$$n=1: L_1(2\rho) = 1 - 2\rho, \quad \alpha^2 = k^2 \pi^2 + 4D\sqrt{|\gamma|}$$

$$\psi = \rho \exp(-\rho) \sin k\pi z, \quad u_r = k\pi r \exp(-\rho) \cos k\pi z \quad (2.9)$$

$$u_\varphi = \alpha r \exp(-\rho) \sin k\pi z, \quad w = -2(1-\rho) \exp(-\rho) \sin k\pi z$$

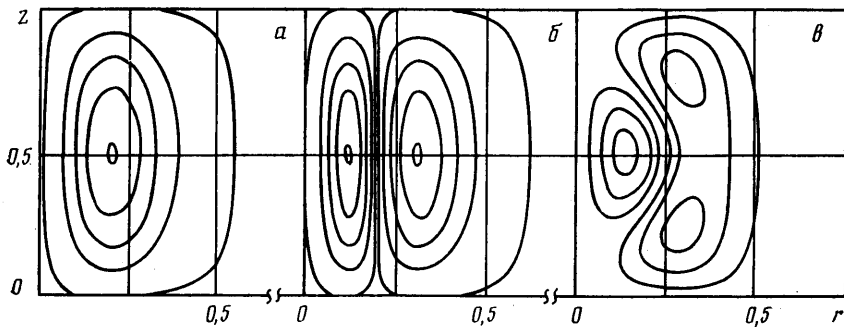
$$n=2: L_2(2\rho) = 1 - 4(\rho - 1/2\rho^2)$$

$$\psi = (\rho - \rho^2) \exp(-\rho) \sin k\pi z, \quad u_r = k\pi r (1-\rho) \exp(-\rho) \cos k\pi z \quad (2.10)$$

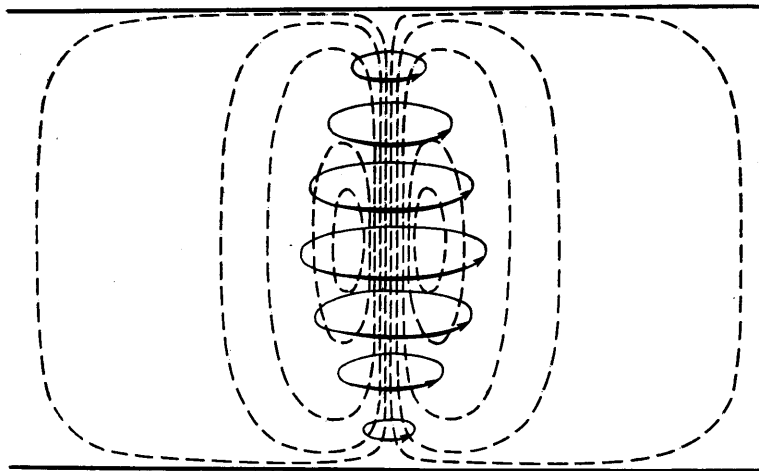
$$u_\varphi = \alpha r (1-\rho) \exp(-\rho) \sin k\pi z, \quad w = -2(1-3\rho+\rho^2) \exp(-\rho) \sin k\pi z$$

Следует отметить, что получаемые решения экспоненциально затухают при $r^2 \rightarrow \infty$.

На фиг. 3, *a* и *b* приведены линии тока $\psi = \text{const}$ решений (2.9), (2.10) ($k=1$, $\rho_0=25$), а на фиг. 4 показана соответствующая полю скорости (2.9) структура получающегося вихревого течения. На фиг. 3, *в*



Фиг. 3



Фиг. 4

представлена суперпозиция решений (2.8) и (2.9) с различными k :

$$\psi = \rho \exp(-\rho) \sin 3\pi z + C(\rho - \rho^2) \exp(-\rho) \sin \pi z$$

$$C = -2$$

Полученная на фиг. 3, в картина течения качественно близка к приведенным в работах по численному и экспериментальному моделированию эффекта разрушения вихря [13].

Как и в (2.4), решения (2.8)–(2.10) содержат свободный параметр γ . Рассмотрим поле скорости (2.9) при $|\gamma| \rightarrow \infty$. При этом $\rho_0 \rightarrow \infty$ и скорость отлична от нуля только вблизи малой окрестности оси $r=0$. Поэтому при $|\gamma| \rightarrow \infty$ решение (2.9) стремится к некоторому точечному по r вихрю. На это же указывает формула $\exp(-\rho_0 r^2) \sqrt{\rho_0/\pi} \rightarrow \delta(r)$ при $\rho_0 \rightarrow \infty$, $\delta(r)$ — дельта-функция, так что компоненты скорости (2.9), определенные с точностью до произвольного постоянного множителя, выражаются через $\delta(r)$ и ее производные

$$u_r \rightarrow k\pi \cos k\pi z \delta'(r), \quad u_\varphi \rightarrow \alpha \sin k\pi z \delta'(r)$$

$$w \rightarrow -\left(\delta''(r) + \frac{1}{r} \delta'(r) \right) \sin k\pi z$$

В этом предельном переходе при каждом конечном ρ_0 решение остается регулярным. Такими же свойствами обладает решение (2.10), а также все другие поля скорости, получаемые при $\eta = -n$, n — целое. Таким образом, в пределе $|\gamma| \rightarrow \infty$ имеем последовательность точечных по r вих-

рей, имеющих при $r \rightarrow 0$ достаточно сложную пространственную структуру (для (2.9) она показана на фиг. 4).

Укажем также, что рассмотренные выше цилиндрические вихри имеют ротор скорости, равный (см. (1.6) при $\beta=0$ и $\Omega=0$)

$$\Omega_0 = \text{rot } \mathbf{u} = -\alpha \mathbf{u} - i_\varphi \gamma r \psi \quad (2.11)$$

т. е. при $\gamma \neq 0$ векторы Ω_0 и \mathbf{u} не коллинеарны.

Другой тип точечных вихрей можно получить в сферической геометрии $R^2 = r^2 + z^2$, $\text{tg } \theta = z/r$, в которой уравнение (1.5) и компоненты скорости при $\beta=0$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + (\alpha^2 + \gamma R^2 \sin^2 \theta) \psi = 0$$

$$u_r = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\varphi = \frac{\alpha \psi}{R \sin \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

Это уравнение допускает разделение переменных [2] при $\gamma=0$:

$$\psi = R J_n(\alpha R) \sin^2 \theta \frac{d}{dx} P_n^\circ(x), \quad x = \cos \theta \quad (2.12)$$

где J_n — сферическая функция Бесселя первого рода, $P_n^\circ(x)$ — полиномы Лежандра. Решение (2.12) является регулярным в нуле при $n \geq 1$. Для $n=1$ получаем

$$u_r = -\frac{\cos \theta}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial R} \frac{\alpha \sin \alpha R}{\pi \alpha R}, \quad u_\varphi = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial R} \frac{\alpha \sin \alpha R}{\pi \alpha R} \quad (2.13)$$

$$u_\theta = \frac{\sin \theta}{\alpha^2 R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} \frac{\alpha \sin \alpha R}{\pi \alpha R}$$

Из представления дельта-функции как предела

$$\frac{\alpha \sin \alpha R}{\pi \alpha R} \rightarrow \delta(R), \quad \alpha \rightarrow \infty$$

следует, что при $\alpha \rightarrow \infty$ компоненты скорости (2.13) пропорциональны производным от $\delta(R)$, т. е. стремятся к выражению для некоторого сингулярного вихря.

3. Исследование полученных стационарных течений однородной жидкости на устойчивость является сложной проблемой. Приведем некоторые соображения, связанные с возможностью использования для этих целей интегралов энергии и спиральности [12]. Последний выполняется для уравнений Эйлера, если на поверхности S объема V , занимаемого жидкостью, имеет место $\Omega_n|_S=0$, $\Omega=\text{rot } \mathbf{u}$.

Рассмотрим интеграл

$$L = (H + \lambda E) - (H_0 + \lambda E_0), \quad H = \int_V \mathbf{u} \Omega dx \quad (3.1)$$

$$E = \int_V u^2 dx, \quad L=0, \quad H=0, \quad E=0$$

где $\lambda = \text{const}$, H_0 и E_0 — значения интегралов на стационарном поле скорости \mathbf{u}_0 , H и E — значения интегралов на возмущенном поле скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$. Легко получить, что

$$L = 2 \int_V \mathbf{u}' (\Omega_0 + \lambda \mathbf{u}_0) dx + \int_S [\mathbf{u}', \mathbf{u}_0]_n dS +$$

$$+ \int_V \mathbf{u}' \Omega' dx + \lambda \int_V u'^2 dx, \quad \Omega_0 = \text{rot } \mathbf{u}_0, \quad \Omega' = \text{rot } \mathbf{u}' \quad (3.2)$$

Для Ω_0 имеем выражение (2.11). Подставляя его в первое слагаемое (3.2), при $\lambda = \alpha$ получаем

$$L' = 2 \int_V \mathbf{u}' [(\lambda - \alpha) \mathbf{u}_0 - i_\varphi \gamma r \psi] dx = -2\gamma \int_V r \psi u_\varphi' dx$$

Отсюда следует, что $L' = 0$ либо при $\gamma = 0$, либо при $\gamma \neq 0$, $u_\varphi' = 0$. Рассмотрим также возмущения \mathbf{u}' поля скорости, удовлетворяющие условию

$$\int_S [\mathbf{u}', \mathbf{u}_0]_n dS = 0 \quad (3.3)$$

которое выполняется, например, при $\mathbf{u}'(x) = c(x) \mathbf{u}_0(x)$, $x \in S$. Тогда L является квадратичной формой по возмущениям \mathbf{u}'

$$L = \int_V \mathbf{u}' \operatorname{rot} \mathbf{u}' dx + \alpha \int_V \mathbf{u}'^2 dx, \quad L = 0 \quad (3.4)$$

Первый интеграл в (3.4) имеет оценку

$$\left| \int_V \mathbf{u}' \operatorname{rot} \mathbf{u}' dx \right| \leq \left(\int_V \mathbf{u}'^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{u}')^2 dx \right)^{1/2}$$

Поэтому L знакоопределена, если

$$l^2 = \left(\int_V \mathbf{u}'^2 dx \right) \left(\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{u}')^2 dx \right)^{-1} \quad (3.5)$$

Отсюда следовала бы устойчивость рассматриваемого класса стационарных течений возмущений, удовлетворяющих указанным ограничениям, при $|\alpha|$ из (3.5). Однако, вообще говоря, $l = l(t)$. Поэтому при фиксированных α критерий устойчивости (3.5) невыполним для таких возмущений поля скорости, в которых $l(t) \rightarrow 0$, т. е. для потоков с интенсифицирующейся в малых объемах завихренностью. Однако для точечных решений вида (2.13) при $\alpha \rightarrow \infty$, для которых выполнено условие $\gamma = 0$, вывод об устойчивости справедлив.

Авторы выражают благодарность А. М. Обухову за постановку проблемы, а также В. П. Гончарову и В. М. Грянику за полезные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Казань, 1981. (Опубл. также в книге: Громека И. С. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952.)
2. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Милл-Томпсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
5. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопр. теории плазмы. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1963. С. 92–131.
6. Грэд, Рубин. Магнитогидродинамическое равновесие и бессильные поля // Тр. 2-й Междунар. конф. по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958. Т. 1. М.: Атомиздат, 1959. С. 131–145.
7. Петвиашвили В. И., Похотелов О. А., Чудин Н. В. Уединенные тороидальные вихри // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. Вып. 6. С. 1823–1839.
8. Армицкий А. Г. Течение вязкой жидкости, обусловленное винтообразным движением тела вращения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 47–52.
9. Пастернак В. Е. Точное решение задачи о соударении неравномерной струи с плоской преградой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 176–179.
10. Салганов Н. В. Обобщенный потенциал в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 6. С. 1325–1327.
11. Справочник по специальным функциям // Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Гордин В. А., Петвиашвили В. И. Уравнение неразрывности спиральности в средах с бесконечной проводимостью // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. Вып. 5. С. 215.
13. Lugt H. J., Abboud M. Axisymmetric vortex breakdown with and without temperature effects in a container with a rotating lid // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 179–200.

Москва

Поступила в редакцию
14.XI.1989