

точек эллипса в новое положение за указанное время показан их одноименной нумерацией на обеих кривых.

Отметим, что дальнейшая трансформация линии тока, описываемая уравнением (12), приводит к появлению неоднозначных решений для функции тока. На этой стадии своей эволюции функция будет содержать особенности — разрывы, динамика которых может быть описана уравнением типа Бюргерса [3].

Аналогично рассмотренному примеру по предложенной в работе схеме может быть прослежена временная трансформация других квазикруговых течений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Бэтчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
3. Маков Ю. Н., Руденко О. В. Нелинейная эволюция квазикруговых течений: модели бюргерсовского типа и акусто-гидродинамическая аналогия // Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия. 1990. Т. 31. № 5. С. 56–60.

Москва

Поступила в редакцию  
30.XI.1989

УДК 532.529.5:536.24

© 1990 г.

В. М. АГРАНАТ, А. В. МИЛОВАНОВА

#### КВАЗИЗАМОРОЖЕННЫЙ ЗАПЫЛЕННЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЗАТУПЛЕННОМ ТЕЛЕ

Исследование динамического и теплового взаимодействия затупленных тел с запыленными потоками газов представляется важным ввиду все более широкого применения газозвесей. В рамках теории двухфазного ламинарного пограничного слоя [1] данная проблема в целом достаточно хорошо изучена асимптотически и численно [2], а для квазиравновесного запыленного ламинарного пограничного слоя, т. е. при малых числах Стокса, получены аналитические формулы расчета коэффициентов трения и теплообмена [3]. В данной работе рассматривается квазизамороженный запыленный ламинарный пограничный слой, возникающий в режиме инверсионного осаждения частиц [2], когда скорость и температура частиц практически не изменяются. Аналитически исследуется совместное влияние числа Прандтля, параметров межфазного взаимодействия и градиента давления на локальные коэффициенты трения и теплообмена между запыленным потоком и окрестностью лобовой критической точки обтекаемой стенки. Обнаружена и количественно описана аналогия между квазизамороженным запыленным и магнетогидродинамическим ламинарными пограничными слоями.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное обтекание окрестности плоской или осесимметричной критической точки затупленного тела с постоянной температурой поверхности  $T_w^*$  однородным монодисперсным потоком запыленного вязкого теплопроводного несжимаемого газа при больших числах Рейнольдса. Используются стандартные допущения модели запыленного газа [1–3]: частицы — сферы одинакового радиуса  $\sigma$ , массы  $m$ , объемная концентрация частиц пренебрежимо мала, броуновское движение несущественно. Коэффициенты сопротивления и теплообмена одиночной частицы вычисляются по аппроксимационным зависимостям [2, 4]

$$C_D = \frac{24}{Re_{s1}} \left( 1 + \frac{1}{6} Re_{s1}^{3/2} \right), \quad Nu_s = 2(1 + 0,3Pr^{1/2} Re_{s1}^{1/2}), \quad Re_{s1} = \frac{2|V - V_s|\sigma}{v}$$

Все остальные обозначения общеприняты.

Предполагается, что частицы входят в пограничный слой несущей фазы с конечной нормальной скоростью  $v_{s*} = v_{s*}(x^*)$  и сохраняют в нем «внешние» значения скорости, температуры, плотности (реализуется режим инверсионного осаждения [2]). Данная ситуация характеризуется большими и умеренными числами Стокса динамического и теплового взаимодействия фаз

$$\beta_v = \frac{\tau_v V_\infty}{L}, \quad \beta_T = 1,5Pr \gamma \beta_v, \quad \beta_v > \beta_T$$

где  $V_\infty$  — скорость набегающего потока,  $L$  — характерный размер задачи,  $\tau_v = \rho_s \sigma^2 / (4,5\mu)$  — характерное время релаксации скорости частиц,  $\gamma = c_s / c_p$  — отношение теп-

лоемкостей твердой и газовой фаз,  $\rho_s^0$  — физическая плотность твердой фазы,  $\beta_{v^*}$  — критическое значение  $\beta_v$ , при переходе через которое становится осуществимым режим инерционного осаждения. В частности, при обтекании слабозапыленным потоком лобовых критических точек пластины, цилиндра и шара  $\beta_{v^*}$  принимает значения соответственно 1/4, 1/8, 1/12 [2, 4, 5].

С учетом результатов [1, 2] и сделанных допущений движение запыленного газа в ламинарном пограничном слое вблизи критической точки затупленного тела при больших и умеренных числах Стокса (в режиме инерционного осаждения частиц [2]) можно описать с помощью следующей краевой задачи:

$$f''' + ff'' = 2^{-j}(f'^2 - 1 + A(f' - 1))$$

$$\theta'' + Pr f \theta' = \frac{2^{1-j}}{3} B(\theta - 1) \quad (1.1)$$

$$\eta = 0: \quad f = f' = \theta = \theta' = 0; \quad \eta = \infty: \quad f' = \theta = 1$$

$$\chi = \frac{\kappa \rho_{s1}}{\beta_{v^*} u_1} k_1, \quad B = A k_2 / k_1, \quad \kappa = \frac{f_{s,c}^*}{\rho^*}$$

$$k_1 = 1 + \frac{1}{6} Re_{se}^{3/2}, \quad k_2 = 1 + 0.3 Pr^{1/2} Re_{se}^{1/2}$$

$$u_e^* = V_\infty u_1 x, \quad \rho_{se} = \rho_{se}(x) = \rho_{se}^* / \rho_{se\infty}^*, \quad \rho_{s1} = \rho_{se}(0)$$

$$\theta = \frac{T^* - T_w^*}{T_\infty^* - T_w^*}, \quad f' = \frac{u^*}{u_e^*}, \quad x = \frac{x^*}{L}$$

$$\eta = \frac{y^* \sqrt{Re} \sqrt{u_1}}{L} 2^{j/2}, \quad Re = \frac{V_\infty L}{\nu}, \quad Re_{se} = \frac{2\sigma |v_{se}^*(0)|}{\nu}$$

Здесь  $f$  — безразмерная функция тока,  $\theta$  — безразмерная температура,  $\eta$  — авторемодельная безразмерная переменная,  $\kappa$  — относительная массовая концентрация частиц в набегающем потоке, звездочкой отмечены размерные величины, индекс  $e$  относится к параметрам на внешней границе пограничного слоя, штрих означает производную по  $\eta$ ; плоскому случаю соответствует  $j=0$ , осесимметричному —  $j=1$ , остальные обозначения совпадают с обозначениями работы [2]. В дальнейшем принято  $B=A$  (в соответствии с оценками [2] это равенство применимо при  $Pr=2/3$  и  $Re_{se} \leq 40$  с погрешностью до 8%).

Заметим, что краевая задача (1.1) сводится путем замены переменных к соответствующей краевой задаче из [2]. Кроме того, в случае магнитогиродинамического течения жидкости с постоянной электропроводностью в окрестности плоской (осесимметричной) критической точки [6, 7] уравнение движения совпадает с первым уравнением (1.1), в котором величине  $A$  следует лишь придать смысл параметра магнитного взаимодействия  $M_m$  [6, 7]. Это свидетельствует о наличии гидродинамической аналогии между двумя ламинарными пограничными слоями — квазизамороженным запыленным и магнитогиродинамическим с постоянной электропроводностью жидкости — в случае обтекания критической точки. В то же время «тепловая» аналогия между этими пограничными слоями не выполняется, так как уравнение сохранения энергии в (1.1) не совпадает с соответствующими уравнениями из [6, 7].

Цель дальнейшего анализа — найти пригодные в широком диапазоне изменения  $A$  приближенные аналитические формулы для безразмерных коэффициентов трения и теплообмена между обтекаемой поверхностью и несущей фазой  $a=f''(0)$  и  $b=\theta'(0)$ , с помощью которых определяются традиционные безразмерные характеристики трения и теплообмена

$$C_f = \frac{\mu \partial u^* / \partial y^* |_{y^*=0}}{\rho^* V_\infty^2} = u_1^{1/2} x^{2j/2} f''(0) Re^{-1/2}$$

$$Nu = \frac{\lambda \partial T^* / \partial y^* |_{y^*=0}}{(\lambda/L)(T_\infty^* - T_w^*)} = u_1^{1/2} x^{2j/2} \theta'(0) \sqrt{Re}$$

Отметим, что дополнительные потоки тепла и импульса в обтекаемую стенку, обусловленные взаимодействием осаждающихся частиц с поверхностью, оценивались в [2] и в данной работе не анализируются.

**2. Расчет трения и теплообмена.** Используем апробированную в [3] комбинацию интегрально-асимптотических методов [7, 8] и метод асимптотической интерполяции [9] с применением полученных методами [7, 8] двусторонних асимптотик решения (при  $A \ll 1$  и  $A \gg 1$ ).

В результате получаем следующие расчетные формулы, применимые при произвольном  $A \geq 0$ :

$$j=0: \quad \frac{a}{a_0} = 1 + \frac{0,5A}{1+0,616\sqrt{A}} \quad (2.1)$$

$$\frac{b}{b_0} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{b_0} \left( A + \frac{1}{6b_0^2 c_1^2} \right)^{1/2} + 1} - \frac{1}{3b_0^2 c_1} \quad (2.2)$$

$$a_0 = 1,233, \quad c_1 = 0,864 \text{Pr}^{-3/5} + \frac{1}{6}$$

$$b_0 = 0,616 a_0^{1/5} \text{Pr}^{1/5} (1 + 0,153 a_0^{-4/5} \text{Pr}^{-1/5} + 0,077 a_0^{-8/5} \text{Pr}^{-3/5})^{-1}$$

$$j=1: \quad \frac{a}{a_{10}} = 1 + \frac{0,4556A}{1+0,594\sqrt{A}} \quad (2.3)$$

$$\frac{b}{b_{10}} = 1 + \frac{1}{b_{10}\sqrt{3}} \left( A + \frac{1}{12b_{10}^2 c_2^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{6b_{10}^2 c_2} \quad (2.4)$$

$$a_{10} = 0,9212, \quad c_2 = 0,5246 \text{Pr}^{-3/5} + 0,1519$$

$$b_{10} = 0,616 (a_{10} \text{Pr})^{1/5} (1 + 0,153 z + 0,077 z^2)^{-1}$$

$$z = \frac{1}{2} a_{10}^{-4/5} \text{Pr}^{-1/5}$$

Здесь индекс ноль относится к характеристикам чистого газа. При сравнении с численными результатами [2] ( $\text{Pr} = 2/3$ ) погрешность формулы (2.1) составляет менее 3%, формулы (2.2) – менее 2%, (2.3) – менее 3%, а формулы (2.4) – около 5% для  $A \sim 1$  и менее 3% для больших  $A$ .

Следует подчеркнуть, что формула для  $b_{10}$  совпадает с точностью до обозначений с соответствующей формулой (11) из работы [3], если в последней устранить допущенную опечатку – вторую круглую скобку взять в степени –1. Заметим также, что в формуле (10) в [3] в показателе вместо  $1/2$  должно стоять  $3/2$ .

Заметим, что при  $\text{Pr} = O(1)$  и больших значениях  $A$  удобно применять полученные методом [7] упрощенные формулы, обобщающие асимптотические оценки [2] на случай, когда  $\text{Pr} \neq 2/3$  и  $B \neq A$

$$a = 2^{-j/2} \sqrt{1+A}, \quad b = 2^{-j/2} \sqrt{\frac{2}{3}} B \quad (2.5)$$

Погрешность этих формул по сравнению с численными результатами [2] при  $\text{Pr} = 2/3$  для  $B = A \geq 5$  не превышает 5% (в табл. 1 работы [2] приводятся значения величин  $a_1 = 2^{j/2} a$  и  $b_1 = 2^{j/2} b$ ). Используя формулы (2.5), в случае больших  $A$  можно рекомендовать расчетные соотношения

$$C_f \sqrt{\text{Re}} = u_1 x \sqrt{1+A}, \quad \frac{\text{Nu}}{\sqrt{\text{Re}}} = u_1 \sqrt{\frac{2}{3}} B \quad (2.6)$$

Видно, что показатель симметрии течения  $j$  явно не входит в формулы (2.6), однако геометрические особенности обтекания критической точки влияют на  $C_f$  посредством параметров  $u_1$ ,  $A$ . Поскольку  $B \sim u_1^{-1}$ , то изменение  $u_1$  не влияет на величину числа  $\text{Nu}$ , т. е. процесс теплообмена менее чувствителен к аэродинамической кривизне тела, чем трение.

Полученные выше формулы для коэффициентов трения можно использовать в расчетах ламинарных пограничных слоев – как квазизамороженного запыленного, так и магнитогазодинамического (в последнем случае под  $A$  понимается параметр магнитного взаимодействия  $M_m$  [6, 7]), поскольку между этими течениями существует отмеченная выше гидродинамическая аналогия. При этом формулы для расчета  $b$  и  $\text{Nu}$  нельзя распространять на второй случай, так как «тепловой» аналогии между этими пограничными слоями нет.

В заключение подчеркнем, что представленные выше результаты нельзя использовать в расчетах запыленного пограничного слоя при очень больших значениях параметра межфазного взаимодействия  $A$ , для которых соответствующие значения числа Стокса  $\beta_V < \beta_V^*$ . В конкретных случаях обтекания затупленных тел запыленным газом перед употреблением полученных выше формул прежде всего

необходимо убедиться в справедливости условия  $\beta_V > \beta_{V^*}$  ( $A < A^*$ ). Для магнитогидродинамических пограничных слоев подобного ограничения нет. Использование диапазона  $A \gg 1$  при выводе основных расчетных формул в данной работе продиктовано логическими особенностями метода [9], с помощью которого получены результаты при всех  $A \geq 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стулов В. П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 51–60.
2. Осипцов А. Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 99–107.
3. Агранат В. М. Влияние градиента давления на трение и теплообмен в запыленном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 105–108.
4. Волощук В. М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеиздат, 1971. 208 с.
5. Левин Л. М. Об осаждении частиц из потоков аэрозоля на препятствия // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 6. С. 1329–1332.
6. Sparrow E. M., Eckert E. R. G., Minkowycz W. J. Transpiration cooling in a magnetohydrodynamic stagnation-point flow // Appl. Sci. Res. Section. A. 1962. V. 11. № 1. P. 125–147.
7. Резников Б. И., Смыслов Ю. Н. Об одном методе определения трения и теплового потока в автомобильных задачах пограничного слоя // ПМТФ. 1964. № 1. С. 53–58.
8. Meksyn D. New methods in laminar boundary layer theory. Oxford: Pergamon Press, 1961. 294 p.
9. Дильман В. В., Полянин А. Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. М.: Химия, 1988. 303 с.

Томск

Поступила в редакцию  
2.XI.1989

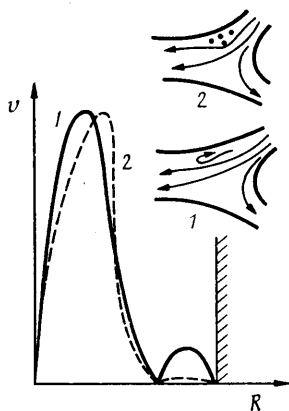
УДК 532.54;612.13

© 1990 г.

М. В. КАМЕНЕВА, М. С. ПОЛЯКОВА, Е. В. ФЕДОСЕЕВА

### ВЛИЯНИЕ СНИЖАЮЩИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПОЛИМЕРОВ НА СТРУКТУРУ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН И ВИХРЕЙ В МОДЕЛЯХ СТЕНОЗИРОВАННЫХ И РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

Гидродинамическое сопротивление кровеносной системы определяется ее геометрией и реологическими свойствами крови. Существенный вклад в величину полного гидродинамического сопротивления сосудистой сети вносят застойные зоны и возмущения потока крови (возвратные и вторичные течения), возникающие на бифуркациях, а также в местах изгибов, сужений и расширений сосудов. Наличие застойных зон и локальных возмущений может играть отрицательную роль в функционировании сердечно-сосудистой системы, в частности, в связи с тем, что эти области являются местами повышенного риска развития атеросклероза [1–4].



Фиг. 1

возвратные и вторичные течения, возникающие на бифуркациях, за стенозами кровеносной сети, а также на псевдотурбулентность, порождаемую неупорядоченным