МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1990

УДК 532.511.031

Ю. Н. МАКОВ, О. В. РУДЕНКО

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КВАЗИКРУГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В настоящее время известны лишь единичные точные аналитические решения полных нелинейных уравнений для вихревых течений, причем почти все они описывают стационарные режимы [1, 2]. Некоторым продвижением в изучении динамики является исследование найденных стационарных решений на устойчивость относительно бесконечно малых возмущений (линейный анализ устойчивости), что, однако, сводит реальное многообразие возможных динамических процессов к экспоненциальному росту (затуханию) во времени или колебательному режиму пространственных возмущений, соответствующих собственным модам краевой задачи. Подобная ограниченность получаемых решений не позволяет исследовать реальную эволюцию тех или иных вихревых течений. Все это стимулирует закономерный интерес к поиску адекватного описания (с учетом нелинейных эффектов) динамических режимов некоторых характерных течений.

Ограничимся моделью двумерных вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости. В полярных координатах r, φ в произвольной плоскости, перпендикулярной оси z, плоские безграничные вихревые течения будут описываться системой двух уравнений для функции тока ψ и завихренности Ω [2]

$$\Omega=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)=0 \tag{2}$$

Для поиска нестационарных решений этой нелинейной системы используем хорошо развитый в радиофизике метод «медленных» переменных, которые выбираются, исходя из структуры известного порождающего решения рассматриваемой системы уравнений.

Точным стационарным решением системы (1), (2) является чисто вращательное движение жидкости, когда $\psi=\psi_0(r)$, $\Omega=\Omega_0(r)$, а скорость имеет только тангенциальную составляющую. Считая это точное стационарное решение порождающим, обобщим его на нестационарный и неосесимметричный случай

$$\psi=\psi(r,\ \varphi_*=\mu\varphi,\ t_*=\mu t),\qquad \Omega=\Omega(r,\ \varphi_*,\ t_*) \tag{3}$$

где $\mu\ll 1$ – малый параметр, учитывающий «медленность» изменения функций по азимутальному углу и времени.

Ограничиваясь членами низшего порядка малости по μ, перейдем от (1), (2) к «укороченной» системе уравнений. Она отличается от (1), (2) лишь тем, что в правой части (1) будет отсутствовать последнее слагаемое, имеющее более высокий порядок малости

$$\Omega=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)=0 \tag{5}$$

Такое же упрощение исходной системы уравнений можно получить, положив в (3) $\varphi_*=\mu G(\varphi)$, что имеет место в течениях с замкнутыми линиями тока.

Рассмотрим случай разделения переменных $\psi=R(r)f(\varphi_*=\mu\varphi,\ t_*=\mu t)$, причем связь этого решения с порождающим стационарным решением заключается в предельном переходе $f\to 1$ при $\mu\to 0$ и $R(r)=\psi_0(r)$. Смысл этого решения заключается в том, что исходное вращательное течение модулируется определенной угловой зависимостью и этот закон модуляции имеет развитие во времени. С этой точки зрения это обобщенное течение можно назвать квазивращательным.

В дальнейшем для удобства нижнюю индексацию «медленных» переменных будем опускать.

Подставляя $\psi=R(r)f(\varphi, t)$ в (4), (5), получаем

$$\Omega=(R''+R'/r)f(\varphi, t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{R'(R''+R'/r)-R(R''+R'/r)}{r(R''+R'/r)}=0 \tag{7}$$

где штрихом обозначена производная по координате r.

Для разделения переменных в (7) должна отсутствовать зависимость от r, т. е.

$$\frac{R'(R''+R'/r)-R(R''+R'/r)'}{r(R''+R'/r)}=k=\mathrm{const} \tag{8}$$

После несложных преобразований условие (8) приводится к нелинейному уравнению относительно $R(r)$

$$R''+\frac{R'}{r}+cR\exp\left(-k\int\frac{r}{R}\,dr\right)=0 \tag{9}$$

Здесь $c\neq0$ – произвольная постоянная.

Одним из частных решений уравнения (9) будет

$$R(r)=ar^2, \qquad a=k/2, \qquad k=-8/c \tag{10}$$

т. е. определяется класс стационарных вращательных течений $\psi_0\equiv R(r)=ar^2$, при азимутальной модуляции которых может быть найдено нестационарное решение нелинейной системы (4), (5) вида

$$\psi(r,\varphi,t)=\frac{r^2}{2\tau}f(\varphi,t) \tag{11}$$

где введена константа τ с размерностью времени. Подставляя (11) в систему (4), (5), получаем

$$\Omega=\frac{2}{\tau}f(\varphi,t), \qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{\tau}f\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0 \tag{12}$$

Решением получившегося уравнения (12) является неявная функция $f=\Phi(\varphi-ft/\tau)$, где произвольная функция Φ определяется ее заданным видом в начальный момент времени $t=0$.

Удобно записать полученное решение в явном виде и относительно исходной физической величины ψ, используя связь (11)

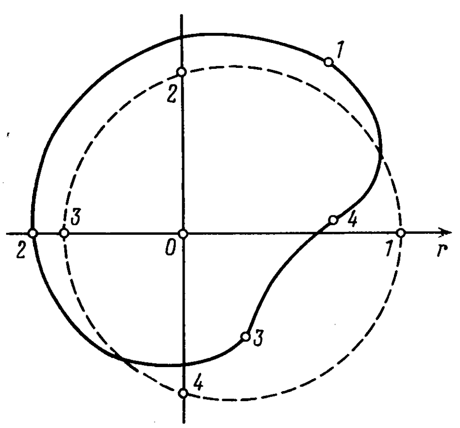
$$\varphi=\Phi^{-1}\left(\frac{2\tau\psi}{\tau^2}\right)+\frac{2\psi}{r^2}t \tag{13}$$

где Φ^{-1} означает функцию, обратную к Φ.

Из (13) видно, что линия тока $\psi=\mathrm{const}$ со временем поворачивается как целое относительно общего центра с угловой скоростью $\omega=2\psi/r^2$, причем, как видно из выражения для ω, чем дальше участок данной линии тока от центра, тем с меньшей скоростью он вращается.

Проиллюстрируем все сделанные выводы на примере исследования нелинейной трансформации течения с первоначальными линиями тока в виде эллипсов, т. е.

$$\psi=\frac{r^2}{2\tau}(1-\varepsilon\cos\varphi)^2, \qquad t=0, \qquad \varepsilon\ll1 \tag{14}$$



Для конкретной линии тока $\psi=\mathrm{const}$ из (14) получаем уравнение эллипса $r=p/(1-\varepsilon\cos\varphi)$, где $p=\sqrt{2\tau\psi}$ – параметр данного эллипса, ε – эксцентриситет.

Решение уравнения (12) в соответствии с (13) для данного начального вида функции (14) имеет вид

$$\varphi=\arccos\left(\frac{1-p/r}{\varepsilon}\right)+\frac{p^2}{r^2}\frac{t}{\tau} \tag{15}$$

Форма записи полученного решения (15) без труда позволяет графически проследить временную трансформацию исходной эллипсоидальной линии тока (см. фигуру). Для примера показаны занимаемое через безразмерное время $t/\tau=\pi/2$ положение и деформированный вид (сплошная кривая) исходного эллипса (штриховая кривая) с $\varepsilon=0{,}3$. Переход конкретных точек эллипса в новое положение за указанное время показан их одноименной нумерацией на обеих кривых.

Отметим, что дальнейшая трансформация линии тока, описываемая уравнением (12), приводит к появлению неоднозначных решений для функции тока. На этой стадии своей эволюции функция будет содержать особенности – разрывы, динамика которых может быть описана уравнением типа Бюргерса [3].

Аналогично рассмотренному примеру по предложенной в работе схеме может быть прослежена временна́я трансформация других квазикруговых течеинй.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Бэтчелор Дж. К.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
3. *Маков Ю. Н., Руденко О. В.* Нелинейная эволюция квазикруговых течений: модели бюргерсовского типа и акусто-гидродинамическая аналогия // Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия. 1990. Т. 31. № 5. С. 56–60.

Москва

Поступила в редакцию 30.XI.1989

УДК 532.529.5:536.24

В. М. АГРАНАТ, А. В. МИЛОВАНОВА

КВАЗИЗАМОРОЖЕННЫЙ ЗАПЫЛЕННЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЗАТУПЛЕННОМ ТЕЛЕ

Исследование динамического и теплового взаимодействия затупленных тел с запыленными потоками газов представляется важным ввиду все более широкого применения газовзвесей. В рамках теории двухфазного ламинарного пограничного слоя [1] данная проблема в целом достаточно хорошо изучена асимптотически и численно [2], а для квазиравновесного запыленного ламинарного пограничного слоя, т. е. при малых числах Стокса, получены аналитические формулы расчета коэффициентов трения и теплообмена [3]. В данной работе рассматривается квазизамороженный запыленный ламинарный пограничный слой, возникающий в режиме инерционного осаждения частиц [2], когда скорость и температура частиц практически не изменяются. Аналитически исследуется совместное влияние числа Прандтля, параметров межфазного взаимодействия и градиента давления на локальные коэффициенты трения и теплообмена между запыленным потоком и окрестностью лобовой критической точки обтекаемой стенки. Обнаружена и количественно описана аналогия между квазизамороженным запыленным и магнитогидродинамическим ламинарными пограничными слоями.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное обтекание окрестности плоской или осесимметричной критической точки затупленного тела с постоянной температурой поверхности T_w^* однородным монодисперсным потоком запыленного вязкого теплопроводного несжимаемого газа при больших числах Рейнольдса. Используются стандартные допущения модели запыленного газа [1–3]: частицы – сферы одинакового радиуса σ, массы m, объемная концентрация частиц пренебрежимо мала, броуновское движение несущественно. Коэффициенты сопротивления и теплообмена одиночной частицы вычисляются по аппроксимационным зависимостям [2, 4]

$$C_D=\frac{24}{\mathrm{Re}_{s1}}\left(1+\frac{1}{6}\mathrm{Re}_{s1}^{2/3}\right),\quad \mathrm{Nu}_s=2(1+0{,}3\mathrm{Pr}^{1/3}\mathrm{Re}_{s1}^{1/2}),\quad \mathrm{Re}_{s1}=\frac{2|V-V_s|\sigma}{\nu}$$

Все остальные обозначения общепринятые.

Предполагается, что частицы входят в пограничный слой несущей фазы с конечной нормальной скоростью $v_s^*=v_{se}^*(x^*)$ и сохраняют в нем «внешние» значения скорости, температуры, плотности (реализуется режим инерционного осаждения [2]). Данная ситуация характеризуется большими и умеренными числами Стокса динамического и теплового взаимодействия фаз

$$\beta_V=\frac{\tau_V V_\infty}{L},\quad \beta_T=1{,}5\mathrm{Pr}\,\gamma\beta_V,\quad \beta_V>\beta_{V*},$$

где V_∞ – скорость набегающего потока, L – характерный размер задачи, $\tau_V=\rho_s{}^0\sigma^2/(4{,}5\mu)$ – характерное время релаксации скорости частиц, $\gamma=c_s/c_p$ – отношение теп-