

УДК 533.6.011.8

© 1990 г.

И. В. ВОЛКОВ, В. С. ГАЛКИН

АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ СКОЛЬЖЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНОГО СКАЧКА В БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Рассмотрен вопрос о возможности упрощения формул, получаемых методом Максвелла — Лоялки, для коэффициентов граничных условий «скоростного» ξ_u , температурного ξ_T и диффузионного ξ_d скольжений и температурного скачка τ в бинарной смеси газов с замороженными внутренними степенями свободы молекул. Особое внимание уделяется газам, резко не различающимся по физико-химическим свойствам. Формулы записаны в удобном для применения виде без линеаризации по коэффициенту термодиффузии. Проведен их систематический расчетный анализ для смесей инертных газов, N_2 , O_2 , CO_2 , H_2 при температурах от комнатной до 2500 К.

Показано, что при рассмотренных отношениях масс молекул $m^* = m_2/m_1$ формулы для ξ_u , τ могут быть кардинально упрощены. С приемлемой для практики погрешностью (до 10%) можно пользоваться формулами того же структурного вида, что и для однокомпонентного газа: для ξ_u , если $1 \leq m^* \leq 6$, и для τ , если $1 \leq m^* \leq 3$. Для ξ_T такое упрощение имеет место при $1 \leq m^* \leq 2$ с погрешностью до 5%. В рамках точности метода формулу для ξ_T можно линеаризовать по коэффициенту термодиффузии. Предложено аппроксимирующее выражение для ξ_d , удобное при практических вычислениях. В конце статьи проведен аналогичный анализ τ , ξ_u , ξ_T в однокомпонентном многоатомном газе при легком возбуждении внутренних степеней свободы молекул; показано, что эти формулы можно существенно упростить.

1. Постановка задачи. Формулы для коэффициентов скольжения $\xi = (\xi_u, \xi_T, \xi_d)$ и температурного скачка τ в смеси газов имеют громоздкий вид при весьма неопределенных сведениях о процессах взаимодействия молекул с поверхностью обтекаемого тела. Возникает естественный вопрос о возможности их упрощения. С этой целью анализируются формулы метода Максвелла — Лоялки [1–3] для ξ , τ в бинарной смеси простых газов (однако большинство из полученных ниже результатов непосредственно переносится на многокомпонентную смесь). Этот приближенный метод получил наибольшее применение в теории граничных условий для течений слаборазреженных газов в силу своей относительной простоты и достаточно высокой точности. О последней в [3] указано, что метод дает значения ξ , τ с погрешностью до 2%, хотя, по мнению авторов, этот вывод не является окончательным и нуждается в дальнейшем обосновании. Здесь уместно подчеркнуть, что практические требования к точности знания коэффициентов ξ , τ различны. «Скоростное» скольжение и температурный скачок дают поправки порядка 10% на разреженность к решению, получаемому при помощи уравнений Навье — Стокса — Фурье (или более простых уравнений) с граничными условиями прилипания. Поэтому ξ_u , τ достаточно вычислять с погрешностью до 10%. В то же время температурное и диффузионное скольжения определяют такие эффекты, как термо- и диффузиофорез, и требования к точности расчета ξ_T , ξ_d более высокие [4, 5].

Приведем теперь соотношения, необходимые для вычисления ξ , τ данным методом.

Наиболее подробное изложение метода применительно к рассматриваемым задачам дано в [6, 7]. Опустим в формулах [6, 7] «энскоговы» поправки на плотность, т. е. положим в них коэффициенты $b_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2$). Будем считать одинаковыми

парциальные коэффициенты аккомодации импульса $q_1=q_2=q$, $0 < q \leq 1$ (зеркально-диффузное отражение [6]); пусть также κ — коэффициент аккомодации энергии смеси ($0 < \kappa \leq 1$); при диффузном отражении с температурой стенки T_w имеем $q=1$, $\kappa=1$. Тогда для скорости скольжения u_0 и скачка температуры ΔT можно получить

$$u_0 = \xi_u \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \xi_T \frac{\partial \ln T_w}{\partial x} + \xi_d \frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad \Delta T = T - T_w = \tau \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\xi_u = \frac{(2-q)^2}{4q} \sqrt{\frac{\pi kT}{2}} \frac{\sum n_i B_{i0}}{\sum n_i \sqrt{m_i}} + (2-q) \sqrt{\frac{kT}{2\pi}} \frac{\sum n_i m_i^{-1/2} B_{i0}^2}{\sum n_i B_{i0}} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

$$\xi_T = \sqrt{\frac{kT}{8}} \frac{2-q}{\sum n_i \sqrt{m_i}} \sum n_i \left(A_{i0} - \frac{A_{i1}}{2} \right) + \sqrt{\frac{kT}{8}} \frac{q}{\sum n_i B_{i0}} \sum \frac{n_i}{\sqrt{m_i}} B_{i0} (A_{i0} - A_{i1})$$

$$\tau = \frac{4-3\kappa}{8\kappa p} \sqrt{\frac{2kT\pi}{\sum x_i m_i^{-1/2}}} \frac{\lambda}{k} \left[1 + \frac{\kappa n^2}{4-3\kappa} \frac{m_1 - m_2}{2\rho \lambda'} k D_T \right] +$$

$$+ \frac{\kappa}{\lambda'} \sqrt{\frac{kT}{8\pi}} \sum \frac{n_i}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{13}{2} A_{i1} - A_{i0} \right) (A_{i1} - n k_T d_{i1}) \quad (1.3)$$

$$n = \sum n_i, \quad \rho = \sum m_i n_i, \quad \sum = \sum_{i=1}^2, \quad p = nkT, \quad x_i = \frac{n_i}{n}$$

Формула для ξ_d получается из (1.2) заменой A на nd ; $u = u_x$ — компонента средней скорости вдоль стенки; y — координата по нормали к ней; n_i — числовая плотность i -го компонента; ρ — массовая плотность. Для сокращения обозначений в (1.1), (1.3) положено $T_w = T$, в (1.2) вместо T_w , n_{i0} , введенных в [6], используются T , n_i . В формулах [6] для температурного и диффузионного скольжения фигурирует величина

$$d_{1x} = x_1 \nabla_x \ln T + n^{-1} \nabla_x n_1 = \nabla_x x_1 + x_1 \nabla \ln p \approx \nabla_x x_1.$$

Такое упрощение справедливо в случае медленных (стоксовых) течений, когда эти виды скольжения определяют указанные выше эффекты в основном по числу Кнудсена $Kn \ll 1$ приближении, при этом $\nabla \ln p \sim Kn^2$. При выводе (1.3) исправлены неточности [7], допущенные в формулах (16)–(19), где должно быть $v^- = -\tau^-$, и в (20), где коэффициент 13 нужно заменить на 13/4. Для данного случая неплотных газов использованная в [7] величина $A_{i0}^* = 0$.

Скалярные коэффициенты функции распределения первого приближения методом Чепмена — Энского

$$f_i^{(1)} = f_i^{(0)} \left[1 - A_i(c_i^2) c_i \nabla \ln T - n D_i(c_i^2) c_i \nabla x_1 - B_i(c_i^2) c_{ix} c_{iy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad c_i = v_i \sqrt{\frac{m_i}{2kT}}$$

где $f_i^{(0)}$ — максвелловская функция, v_i — собственная скорость молекул i -го компонента, представлены рядами по полиномам Сонина

$$B_i = B_{i0} + \dots, \quad A_i = A_{i0} + A_{i1} S_{1/2}^{(1)}(c_i^2) + \dots, \quad D_i = d_{i0} + d_{i1} S_{3/2}^{(1)}(c_i^2) + \dots \quad (1.4)$$

Используются следующие точные формулы [8] для коэффициентов вязкости η , теплопроводности λ , бинарной диффузии D_{12} , термодиффузии D_T и т. д.:

$$\eta = \frac{kT}{2} \sum n_i B_{i0}, \quad \lambda' = -\frac{5kp}{\sqrt{8kT}} \sum \frac{x_i}{\sqrt{m_i}} A_{i1}$$

$$\lambda = \lambda' - \frac{kn}{x_1 x_2} D_T k_T = -\frac{5kp}{\sqrt{8kT}} \sum \frac{x_i}{\sqrt{m_i}} (A_{i1} - n k_T d_{i1}) \quad (1.5)$$

$$D_T = -\frac{5px_1x_2}{\sqrt{8kT}} \sum \frac{x_i}{\sqrt{m_i}} d_{i1}, \quad k_T = \frac{D_T}{D_{12}}, \quad A_{10} = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} \frac{nm_1m_2}{x_1kT\rho} D_T$$

$$d_{10} = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} \frac{m_1m_2}{x_1kT\rho} D_{12}, \quad (A_{20}; D_{20}) = -\frac{x_1}{x_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} (A_{10}; d_{10})$$

В [1-3, 6, 7] учитываются, как обычно, только выписанные в (1.4) члены разложений по полиномам Сонина. Такое приближение обеспечивает приемлемую точность расчета коэффициентов переноса [8] при $m^* = O(1)$, однако в литературе отсутствует достаточно полный анализ точности приближения (1.4) для рассматриваемой задачи о ξ , τ .

Коэффициенты A_{i0} , d_{i0} рассчитываются по (1.5). Для вычисления A_{i1} , d_{i1} удобно воспользоваться приемом [5]. Уравнение для A_1 интегрируется по c_1 с весом $\sqrt{m_1/2kT}c_1$, A_{10} выражаются через D_T , к получающемуся линейному уравнению для A_{11} добавляется формула для λ' согласно (1.5). Аналогичная процедура применяется для d_{i1} . В итоге имеем

$$A_{11} = -\sqrt{\frac{2kT}{m_1}} \frac{2m_1^2 n \lambda'}{5k\rho} \left(1 - \frac{5nkD_T}{\sigma x_1 \mu_1 \lambda'} \right) \quad (1.6)$$

$$d_{11} = -\sqrt{\frac{2kT}{m_1}} \frac{2m_1^2 D_T}{x_1 x_2 \rho kT} \left(1 - \frac{5x_2 \delta D_{12}}{\mu_1 \sigma D_T} \right) \quad (1.7)$$

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}, \quad \sigma = 6C^* - 5, \quad \delta D_{12} = [D_{12}]_2 - [D_{12}]_1 = \frac{\Delta}{1 - \Delta} \quad (1.8)$$

Значения A_{21} , d_{21} получаются из (1.6), (1.7) заменой нижних индексов 1,2 на 2,1 соответственно (с учетом $D_{12} = D_{21}$) и знаков минус в скобках на знаки плюс. В (1.7), (1.8) $[D_{12}]_2$, $[D_{12}]_1$ — коэффициенты бинарной диффузии второго и первого приближений [8]. Согласно [8]

$$\Delta = \sigma^2 P_3 / (10Q_3) \quad (1.9)$$

где через P_3 и т. д. обозначены трехчлены типа

$$P_3 = P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_{12} x_1 x_2$$

входящие в (1.9) коэффициенты даются формулами (7.3.43) из книги [8], где в Q_{12} описка: вместо $(m_1 + m_2)^2$ стоит $(m_1 m_2)^2$.

В приближении (1.4)

$$D_T = k_T [D_{12}]_2, \quad k_T = x_1 x_2 \sigma k_T^*, \quad k_T^* = (S_1 x_1 - S_2 x_2) / Q_3 \quad (1.10)$$

где k_T — термодиффузионное отношение, множители S_1 , S_2 определены формулами (7.3.70) в [8]. Наконец, с помощью [8] можно найти

$$k_T^* (\lambda_{12} / \lambda) = (S_1 x_1 - S_2 x_2) / R_3, \quad R_1 = Q_1 \lambda_1^*, \quad R_2 = Q_2 \lambda_2^* \quad (1.11)$$

$$R_{12} = \frac{4A^*}{5\mu_1 \mu_2} \left(\frac{1}{\lambda_1^*} + \frac{1}{\lambda_2^*} \right) + 11 - \frac{12}{5} B^* - \frac{16}{5} A^*, \quad \lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{\lambda_{12}}$$

В (1.8), (1.11) через A^* , B^* , C^* обозначены отношения приведенных Ω -интегралов [8] A_{12}^* , B_{12}^* , C_{12}^* .

Таким образом, A_i , D_i рассчитываются при помощи (1.4) — (1.11). Для B_{i0} будем непосредственно применять формулы [8], куда входят отношения $\eta_i^* = \eta_i / \eta_{12}$. Здесь и в (1.11) η_i , λ_i — коэффициенты вязкости и теплопроводности i -го газа в первом приближении по полиномам Сонина; $\eta_{12} = \eta_{21}$, $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ выражаются [8] через $[D_{12}]_1$. Чтобы избавиться от этой зависимости, будем применять формулы Вильке

$$\eta_i^* = 1/4 (2\mu_j)^{-1/2} [1 + (\mu_j / \mu_i)^{1/4} (\eta_i / \eta_j)^{1/2}]^2, \quad \lambda_i^* = 2\mu_j \eta_i^* \quad (1.12)$$

Эти формулы являются точными для молекул — упругих сфер и «дают удивительно хорошие результаты» [8] для других видов взаимодействия молекул. Коэффициенты A^* , B^* , σ зависят, вообще говоря, от T и параметров межмолекулярных сил. Ниже рассматриваются два предельных и

промежуточный, близкий к реальности, варианты: I — максвелловские молекулы, $A^*=1,29$, $B^*=1,25$, $\sigma=0$ (здесь $k_T=0$, $\Delta=0$); II — $A^*=1,15$ (см. [8]), $B^*=1,12$, $\sigma=1/2$; III — упругие сферы, $A^*=B^*=\sigma=1$.

Для каждого варианта рассчитываемые ниже соотношения являются функциями x_i , μ_i , η_i ($i=1,2$). Расчеты проводились для 45 бинарных смесей инертных газов, N_2 , O_2 , CO_2 , SO_2 , H_2 . Значения вязкостей «чистых» газов $\eta_i=\eta_i(T)$ брались из [8, 9] для температур от комнатной до 2500 К; основной расчетный случай $T=500$ К, установленные ниже свойства ξ , τ несущественно зависят от T .

2. Коэффициент «скоростного» скольжения. Используя (1.5) и формулы [8] для B_{10} , можно привести (1) к виду

$$\xi_u = \frac{2-q}{q} \left(2-q + \frac{4}{\pi} q \right) \frac{\eta}{2n} \sqrt{\frac{\pi}{2MkT}} (1+W_u) \quad (2.1)$$

$$1+W_u = \frac{\sqrt{\Delta_1}}{\Delta_{1/2}} \left[1 + \frac{(\pi+4)q}{2\pi+(4-\pi)q} G_u \right], \quad \Delta_\alpha = x_1 \mu_1^\alpha + x_2 \mu_2^\alpha \quad (2.2)$$

$$G_u = \frac{4}{4+\pi} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} (\sqrt{\mu_2} b_1^* - \sqrt{\mu_1} b_2^*)^2, \quad b_i^* = \eta_i^* b_i / \sum_{j=1}^2 x_j \eta_j^* b_j$$

$$b_i = x_j + 2\mu_1 \mu_2 \eta_j^* \left[x_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} + \frac{5}{3A^*} \right) + x_j \left(\frac{5}{3A^*} - 1 \right) \right]$$

Здесь $M=x_1 m_1 + x_2 m_2$ — молекулярный вес; η_i^* рассчитывается по формуле (1.12). Предположение о равенстве парциальных коэффициентов аккомодации q позволило выделить «однокомпонентный» множитель: при $W_u=0$ получаем формулу той же структуры, что и для газа. Функция G_u описывает сложную зависимость W_u от сечений столкновений. Согласно методу Максвелла $G_v=0$, множитель $2-q+4q/\pi$ заменяется на 2.

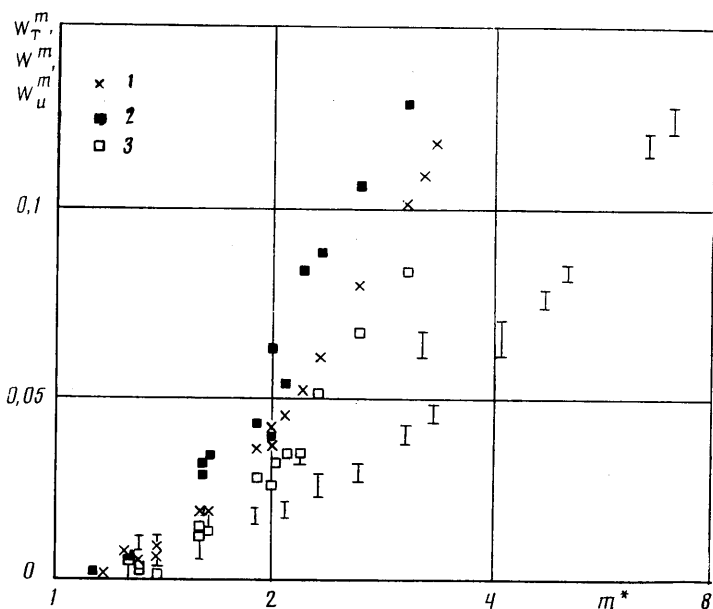
Ограничиваемся случаем $q=1$, так как при этом величина $1+W_u$ максимальна. Для каждой пары газов W_u , G_u зависят от x_1 , T (для определенности под $x_1=1-x_2$, m_1 понимаются концентрация и масса молекулы легкого газа). Обозначим

$$G_u^m = \max_{x_1, T} |G_u|, \quad W_u^m = \max_{x_1, T} |W_u| \quad (2.3)$$

Оценим G_u^m , W_u^m . Как показали расчеты, значения G_u^m малы и характеризуются большим разбросом. Для смесей из инертных газов, N_2 , O_2 имеем $G_u^m \leq 0,01$. Наибольшие значения имеют место для смесей H_2 с инертными газами (за исключением H_2-He), из них G_u^m максимально для смеси H_2-Kr ($m^*=41,9$): для вариантов I, II, III соответственно $G_u^m \cdot 10^2 = 5,8; 4,6; 3,2$. Для этих смесей $G_u(x_1)$ обычно резко возрастает при большом содержании H_2 и имеет максимум при $x_1 \approx 0,9$. Для остальных смесей $G_u^m \leq 0,03$.

Фигура 1 иллюстрирует погрешность, с которой W_u можно положить равным нулю для газов с не резко различающимися массами ($W_u^m \approx 0,64$ при $m^*=65,6$). Разброс значений для функции W_u (вертикальные отрезки прямых на фиг. 1) обусловлен значениями η_i , а также значениями коэффициентов A^* ; B^* в вариантах I—III.

С учетом сказанного в разд. 1 о требуемой точности расчета ξ_u из приведенных данных следует, что для рассмотренных m^* с указанной выше погрешностью можно положить $G_u=0$, $W_u=0$ при $1 \leq m^* \leq 6$ с максимальной погрешностью 10%; при этом ξ_u рассчитывается по формуле той же структуры, что и для однокомпонентного газа. Полученные выводы (как и аналогичные выводы для τ , ξ_T) справедливы, по всей вероятности, и для многокомпонентной смеси газов, если под m_2 , m_1 понимать максимальную



Фиг. 1

и минимальную из масс молекул смеси. Действительно, увеличение числа компонентов с близкими свойствами при фиксированном m_2/m_1 должно способствовать большему осреднению макроскопических величин.

При $m^* > 6$ будем иметь

$$(1+W_u)n^{-1}M^{-1/2} \approx (n_1\sqrt{m_1} + n_2\sqrt{m_2})^{-1} \quad (2.4)$$

При $n_1 \sim n_2$ и $\sqrt{m^*} \rightarrow \infty$ величина (2.4) стремится к $(n_2\sqrt{m_2})^{-1}$ и (2.1) имеет ту же структуру, что и для тяжелого газа [10].

3. Коэффициент температурного скачка. Используя формулы (1.5) — (1.12), приведем выражение (1.3) к виду, аналогичному (2.1), (2.2)

$$\tau = \psi \frac{\sqrt{2kT\pi M}}{2\rho} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{\lambda}{k} (1+W) \quad (3.1)$$

$$1+W = (1+G)(\sqrt{\Delta_1}\Delta_{-1/2})^{-1}, \quad \psi = (4-3\kappa)\kappa^{-1} + 104(25\pi)^{-1} \quad (3.2)$$

$$1+G = \left(1 + \frac{104}{25\pi} \frac{\kappa}{4-3\kappa}\right)^{-1} \left[1 + \frac{\kappa}{4-3\kappa} \frac{\mu_1 - \mu_2}{10\Delta_1} x_1 x_2 \sigma \delta + \frac{104}{25\pi} \frac{\kappa}{4-3\kappa} \times\right.$$

$$\times (1+w) \Delta_{-1/2} \Delta_1^{-2} \left\{ x_1 \mu_1^{1/2} (\mu_1 - x_2 \delta + 1/13 \mu_2 x_2 \delta \sigma) \left[\mu_1 - x_2 \delta - \frac{w\delta(\mu_1 - x_2 v)}{\delta^*} \right] + x_2 \mu_2^{1/2} \left(\mu_2 + x_1 \delta - \frac{1}{13} \mu_1 x_1 \sigma \delta \right) \times\right.$$

$$\left. \times \left[\mu_2 + x_1 \delta - \frac{w\delta(\mu_2 + x_1 v)}{\delta^*} \right] \right\}, \quad \delta = \frac{\delta^*}{(1+w)}$$

$$v = \frac{5\Delta}{(1-\Delta)x_1 x_2 \sigma^2 k_T^*}, \quad w = \frac{1}{5} k_T^* \sigma^2 x_1 x_2 \delta^*, \quad \delta^* = \frac{8A^* k_T^* \lambda_{12}}{5(1-\Delta)\lambda}$$

Здесь не проведена линеаризация по D_T , при этом $\lambda \neq \lambda'$. В (3.1) введено отношение удельных теплоемкостей $\gamma = 5/3$. В методе Максвелла $G=0$, а множитель ψ заменяется на $2(2-\kappa)/\kappa$. Как и в разд. 2, ограничимся случаем $\kappa=1$, так как при этом $1+W$ максимально. Последнее справедливо

во и для зеркально-диффузного отражения при $q=1$, когда [3]

$$\psi = (2-q)[2-q+104q(25\pi)^{-1}]q^{-1} \quad (3.3)$$

Следуя (2.3), введем величины G^m , W^m . Результаты расчетов G^m аналогичны полученным для G_u^m , но $G^m < G_u^m$. В большинстве случаев $G^m \leq 0,02$. Исключение составляют смеси $H_2 - Ne$ ($m^*=10,1$); $H_2 - Ar$ ($m^*=20$) для варианта III, когда $G^m \cdot 10^2 = 3,7$; $2,5$ соответственно. Поэтому зависимость W^m (m^*) имеет меньший разброс, однако сильнее отклоняется от нуля (см. фиг. 1, I — данные для варианта III, незначительно превосходящие соответствующие данные для варианта I).

Таким образом, имеем аналогичные разд. 2 выводы: с указанной погрешностью $G=0$, с погрешностью до 10% имеем $W=0$ для $1 \leq m^* \leq 3$. Для $m^* > 3$ удобнее записать

$$\sqrt{M}(1+W)/n \approx (n_1 m_1^{-1/2} + n_2 m_2^{-1/2})^{-1}$$

Отсюда при $n_1 \sim n_2$ и $\sqrt{m^*} \rightarrow \infty$ получаем $(n_1/m_1^{-1/2})^{-1}$, т. е. (3.1) имеет ту же структуру, что и для легкого газа [10].

4. Коэффициент температурного скольжения. Формула (1.2) по аналогии с разд. 2 и 3 приводится к виду

$$\xi_T = \frac{2+q}{10n} \frac{\lambda'}{k} (1+W_T), \quad 1+W_T = \frac{\Delta_{1/2}(1+G_T)}{\Delta_1 \Delta_{1/2}} \quad (4.1)$$

$$G_T = \alpha_2 + \frac{2-q}{2+q} \frac{x_1 x_2 \delta}{\Delta_{1/2}} \left\{ \frac{2q}{2-q} \Delta_{1/2} (b_2^* - b_1^*) - \sigma \alpha_1 + \right. \\ \left. + (\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}) (1 + \sigma \sqrt{\mu_1 \mu_2}) \right\} \quad (4.2)$$

$$\alpha_1 = \frac{q \Delta_{1/2}}{2-q} (\mu_2 b_1^* - \mu_1 b_2^*), \quad \alpha_2 = \frac{2q}{2+q} \frac{x_1 x_2}{\Delta_{1/2}} (\mu_1 - \mu_2) (\sqrt{\mu_2} b_1^* - \sqrt{\mu_1} b_2^*) \quad (4.3)$$

Формулы для ξ_T не допускают таких упрощений, как формулы для ξ_u и τ . В отличие от G_u^m , G^m величина G_T^m , определяемая по (2.3), не мала; с ростом m^* от 1 до 65,6 она монотонно увеличивается от 0 до $\sim 0,9$ (заметьте, что G_T , W_T отрицательны). Кроме того, требования к точности расчета ξ_T более высокие (см. разд. 1).

Тем не менее упрощения возможны и состоят в следующем. Во-первых, $1+W_T$ можно линеаризовать по D_T , положив $w=0$, $\Delta=0$ в выражении для δ . В случае максвелловских молекул $\delta=0$. Для варианта II при $q=1$ и 0,5 максимальная относительная погрешность при линеаризации составляет 1,5%, для варианта III — 3,5%.

Во-вторых, при $1 \leq m^* \leq 2$ имеем $W_T=0$ с максимальной погрешностью около 5%. Этот вывод при $q=1$ иллюстрируется на фиг. 1 ($W_T^m \approx 0,7$ при $m^*=65,6$), где данные 2 и 3 отвечают значениям W_T^m для вариантов III, I. Разброс значений для функции W_T^m (m^*) больше, чем для W_u^m , W^m .

Метод Максвелла дает для ξ_T выражение, не зависящее от q и следующее из (4.1) — (4.3), если в них положить $q=0$ (в частности, $2+q$ в (4.1) заменяется на 2). Был рассмотрен вопрос о возможности аппроксимации этим методом множителя $1+W_T$. Погрешность такой аппроксимации при $q=1$, а также степень влияния q на $1+W_T$ характеризуются величиной

$$\delta_T = \max_{q, T} | [W_T|_{q=1} - W_T|_{q=0}] [1+W_T|_{q=0}]^{-1} |$$

Расчеты показали, что $\delta_T \leq 0,05$ при $m^* \leq 2,5$; с ростом m^* величина δ_T , вообще говоря, возрастает, достигая при $m^*=65,6$ значений 0,14 и 0,56 для вариантов I и III соответственно.

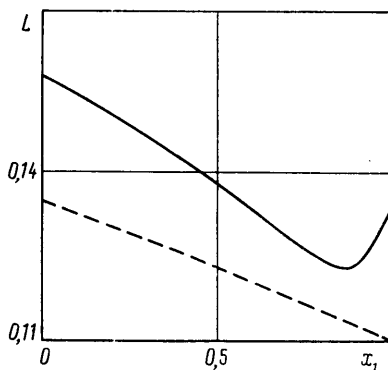
Таким образом, формула для ξ_T допускает большие упрощения только при m^* , близком к единице.

5. Коэффициент диффузионного скольжения. В однокомпонентном газе диффузионное скольжение отсутствует, поэтому формула для ξ_d имеет иную структуру, чем для ξ_u и ξ_T

$$\xi_d = (2-q) D_{12} (2\Delta_{1/2} \Delta_1)^{-1} [\bar{V} \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{V} \bar{\mu}_2 - \bar{V} \bar{\mu}_1) + L] \quad (5.1)$$

$$L = \frac{2+q}{2-q} \frac{\sigma}{5} k_T^* \Delta_{1/2} (1+\alpha_2) + \frac{\Delta}{\sigma} \left[\frac{2q}{2-q} \Delta_{1/2} (b_2^* - b_1^*) + \bar{V} \bar{\mu}_2 - \bar{V} \bar{\mu}_1 \right] + \bar{V} \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{V} \bar{\mu}_2 - \bar{V} \bar{\mu}_1) \alpha_1 \quad (5.2)$$

Здесь α_1, α_2 определены формулами (4.3).



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены характерные графики зависимостей $L(x_1)$ при $T=500$ К: сплошная кривая для смеси $\text{H}_2 - \text{CO}_2$ ($m^*=22$), штриховая для $\text{Ne} - \text{N}_2$ ($m^*=1,39$). Во многих случаях зависимость $L(x_1)$ близка к линейной либо может быть представлена ломаной, составленной из двух отрезков прямых, соединяющих точки $x_1=0; 0,86; 1$. Обозначим значения $L(x_1)$, рассчитанные по такой ломаной, через $L^*(x_1)$. Точность замены L на L^* в ξ_d определяется величиной

$$\delta_d = \max_{x_1, T} | (L-L^*) [\bar{V} \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{V} \bar{\mu}_2 - \bar{V} \bar{\mu}_1) + L]^{-1} |$$

Как показали расчеты при $q=1$, для подавляющего числа пар газов $\delta_d=0$ в рамках точности метода (с погрешностью до 2%). Исключения составляют $\text{SO}_2 - \text{Kr}$ ($\delta_d \approx 0,04$), $\text{H}_2 - \text{Kr}$ и $\text{H}_2 - \text{Xe}$ ($\delta_d=0,03$). С уменьшением q величина δ_d уменьшается вместе с L .

Как и для ξ_T , формулы метода Максвелла получаем из (5.1), (5.2), полагая $q=0$. Этот метод дает, вообще говоря, не только большие количественные, но и качественные ошибки [2].

Таким образом, коэффициент ξ_d является наиболее чувствительным из всех рассмотренных к изменению параметров и не может быть существенно упрощен.

6. Многоатомный газ. Рассмотрим формулы для τ, ξ_u, ξ_T в однокомпонентном многоатомном газе при условии легкого возбуждения внутренних степеней свободы молекул. Применительно к τ для полностью диффузного отражения ($q=\kappa=1$) метод Максвелла — Лоялки применен в [11]. Скалярные коэффициенты A_i при $\bar{V} \ln T$ в разложении Чепмена — Энского аппроксимированы первым приближением по полиномам Сонина и Вальдмана — Трюбенбахера [8] (i теперь характеризует не компоненту смеси, а внутреннее состояние молекул). Формула для τ имеет вид (3.1), где теперь $\lambda = \lambda_i + \lambda_v$, λ_i и λ_v — коэффициенты теплопроводности, обусловленные переносом поступательной и внутренней энергиями молекул соответ-

ственно, а

$$1+W = \left(1 + \frac{104}{25\pi}\right)^{-1} \left[1 + \frac{2+c_v/k}{\pi(1+\lambda_*^2)} \left(\frac{52}{25} + \frac{4k}{c_v} \lambda_*^2\right)\right], \quad \lambda_* = \frac{\lambda_v}{\lambda_i} \quad (6.1)$$

Здесь c_v — удельная теплоемкость, обусловленная внутренней энергией молекул. Для оценки W ограничимся модифицированным приближением Эйкана [8], в соответствии с которым в коэффициентах переноса пренебрегается «неупругими» членами $O(1/Z)$ по сравнению с единицей, где Z — отношение времен релаксации внутренних и поступательных степеней свободы молекул. Тогда имеем [8]

$$\lambda_* = \frac{nDc_v}{\lambda_i}, \quad \lambda_i = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \eta, \quad \frac{c_v}{k} = \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}$$

где D — коэффициент самодиффузии. Полагая [8] $\rho D/\eta = 1,328$, приведем (6.1) к виду

$$1+W = 0,862 \left[\frac{1}{2} + (\gamma+1)(0,106\gamma - 0,066)(0,469\gamma - 0,115)^{-2}\right] \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что можно положить $W=0$: при $\gamma=1,4$ и $1,2$ имеем $|W| < 0,01$, при $\gamma=1$ $W \approx -0,02$. Анализ результатов [3] для зеркально-диффузного отражения, когда ψ дается формулой (3.3), показывает, что этот вывод тем более справедлив при уменьшении q .

Анализ ξ_u , ξ_T можно провести, используя методику [2]. Коэффициент ξ_u выражается через B_i (множитель перед $\nabla \mathbf{u}$ в разложении Чепмена — Энскога), а коэффициент ξ_T — через B_i и (линейно) через «поступательные части» A_i . Пренебрегая в выражениях для этих коэффициентов членами $O(1/Z)$ по сравнению с единицей, получим, что тогда ξ_u , ξ_T даются формулами для одноатомного газа (при соответствующих ядрах рассеяния молекул поверхностью, в частности при полностью диффузном отражении).

В заключение подчеркнем, что целью работы был поиск глобальных упрощений. В частных случаях могут иметь место дальнейшие упрощения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Loyalka S. K. Approximate method in the kinetic theory // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 11. P. 2291–2294.
2. Loyalka S. K. Velocity slip coefficient and the diffusion slip velocity for a multi-component gas mixture // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 12. P. 2599–2604.
3. Loyalka S. K. Temperature jump in a gas mixture // Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 5. P. 897–899.
4. Kogan M. N. Transport processes in Knudsen layers // Rarefied Gas Dynam. V. 1. N. Y.: Plenum Press, 1985. P. 545–560.
5. Галоян В. С., Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 207 с.
6. Гайдуков М. Н., Компанец В. Н., Яламов Ю. И. Приближенный метод решения кинетического уравнения для умеренно плотных газов вблизи границы. Скольжение бинарной смеси // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 113–119.
7. Компанец В. Н., Гайдуков М. Н., Яламов Ю. И. Приближенный метод решения кинетического уравнения для умеренно плотных газов вблизи границы. Скачок температуры в бинарной смеси // Теплофизика высоких температур. 1982. Т. 20. № 5. С. 848–852.
8. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
9. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.
10. Носик В. И. О граничных условиях для уравнений двухтемпературной газовой динамики бинарной смеси с существенно разными массами компонент // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 93–98.
11. Кузнецов В. М., Кузнецов М. М. О граничных условиях для течений многоатомных газов // ПМТФ, 1975. № 4. С. 93–102.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1989