МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1990

УДК 532.5.013.4:536.24

© 1990 г.

В. А. БУЧИН

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

В гидроаэромеханике известны многочисленные примеры барьерных неустойчивостей, появление которых существенно ухудшает характеристики различных процессов и аппаратов, поэтому разработка общего метода принудительного подавления этих неустойчивостей является одной из наиболее актуальных современных задач механики сплошных сред. В [1, 2] предложен общий алгоритм конструирования простых стабилизирующих систем с обратной связью, способных подавлять неустойчивость стационарных состояний в сплошных средах различной физической природы. В данной работе применимость развитой теории к гидродинамическим задачам проиллюстрирована на примере подавления конвекции в прямоугольной полости. Рассматриваемая задача носит методический характер. В качестве гидродинамических граничных условий, как и в задаче Рэлея [3], выбраны условия проскальзывания. Последнее позволяет получить решение в явном виде, доказать принципиальную возможность подавления конвекции, а также показать ряд качественных особенностей, возникающих и в других гидродинамических задачах (появление кратных собственных значений, необходимость использования многоконтурных регуляторов и т. д.). Приведенная схема решения является общей и пригодна для решения других задач и, в частности, может быть использована при численном решении аналогичной задачи о подавлении конвекции при реальных граничных условиях. Задача о подавлении конвекции рассматривалась ранее [4]. Решение искалось в классе распределенных систем управления. Построенные в данной работе стабилизирующие системы выгодно отличаются от предложенных в [4] в смысле простоты их практической реализации.

1. Рассмотрим двумерную область — прямоугольник со сторонами aL и L (L — характерный линейный размер), в котором находится вязкая несжимаемая жидкость, подогреваемая снизу. Начало координат поместим в нижний левый угол прямоугольника, ось абсцисс направим по нижней стороне прямоугольника, а ось координат — по левой стороне. Будем предполагать, что верхняя и нижняя стенки — изотермические (причем температура нижней стенки выше температуры верхней), а боковые — теплоизолированы. Сила тяжести $\mathbf{g}=(0-g)$ направлена вертикально вниз. Будем также предполагать, что динамика жидкости, включающая поведение полей температуры T, компонент скорости u_1, u_2 и давления p, описывается системой уравнений Буссинеска [3, 5], которая в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{1}{\Pr}\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\Delta u_1,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{1}{\Pr}\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\Delta u_2+RT$$

$$\Pr\frac{\partial T}{\partial t}+u_1\frac{\partial T}{\partial x}+u_2\frac{\partial T}{\partial y}=\Delta T,\qquad \Pr=\frac{\nu}{\chi},\qquad R=\frac{g\beta AL^4}{\chi\nu}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность, β — коэффициент теплового расширения жидкости, A — стационарный градиент температуры в жидкости.

Система граничных условий, соответствующая задаче Рэлея [3], имеет вид

$$u_1=0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \quad x=0, \quad x=a; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y}=0, \quad u_2=0, \quad y=0, \quad y=1 \qquad (1.2)$$

$$T=1, \quad y=0; \quad T=0, \quad y=1; \quad \frac{\partial T}{\partial x}=0, \quad x=0, \quad x=a \qquad (1.3)$$

Очевидно, что при любых значениях чисел Прандтля Pr и Рэлея R система уравнений и граничных условий (1.1)—(1.3) имеет стационарное решение, соответствующее состоянию равновесия

$$u_{10}=0, \ u_{20}=0, \ p_0=R(y-{}^1/_2y^2), \ T_0=1-y \qquad (1.4)$$

Линейный анализ устойчивости показывает, что решение (1.4) может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от значений параметров задачи R, Pr, a. В дальнейшем при построении стабилизирующей системы потребуется знание ряда характеристик, соответствующих нестационарной линеаризованной системе, описывающей динамику малых отклонений параметров задачи $\mathbf{W}$ от стационарных значений (1.4)

$$u_1=u_{10}+W_1, \quad u_2=u_{20}+W_2, \quad T=T_0+W_3, \quad p=p_0+W_4$$

$$\mathbf{W}=(W_1, W_2, W_3, W_4)^\tau, \ \mathbf{W}=\mathbf{W}(t, x, y)$$

Здесь индексом τ отмечена операция транспонирования, так что $\mathbf{W}$ — вектор-столбец. Систему линейных уравнений для компонент вектора $\mathbf{W}$ можно представить, следуя [2], в виде

$$\mathbf{LW}=0, \ \mathbf{lW}|_\Gamma=0 \qquad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{L}$ — матричный дифференциальный оператор, определяющий систему уравнений для компонент вектор-функции $\mathbf{W}$, а $\mathbf{l}$ — матричный дифференциальный оператор, определяющий систему граничных условий для $\mathbf{W}$. Операторы $\mathbf{L}$, заданный в области Ω ($0<x<a$, $0<y<1$), и $\mathbf{l}$, заданный на ее границе Γ, имеют следующий вид:

$$\mathbf{L}=(L_{ij})=\begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ \partial/\partial t-\Delta & 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial t-\Delta & -R & \partial/\partial y \\ 0 & -1 & \Pr\partial/\partial t-\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad 1\leqslant i, \quad j\leqslant 4$$

$$\mathbf{l}=(l_{ii}\delta_{ij})$$

$$l_{11}=1, \quad l_{22}=\frac{\partial}{\partial x}, \quad l_{33}=\frac{\partial}{\partial x}, \quad l_{44}=0, \quad x=0, \quad x=a$$

$$l_{11}=\frac{\partial}{\partial y}, \quad l_{22}=1, \quad l_{33}=1, \quad l_{44}=0, \quad y=0, \quad y=1$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$.

Исследование устойчивости стационарного решения $\mathbf{W}=0$ (соответствующего решению (1.4)) системы уравнений (1.5) с помощью стандартной подстановки $\mathbf{W}=e^{\lambda t}\mathbf{V}$, $\mathbf{V}=(V_1, V_2, V_3, V_4)^\tau$, $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\lambda, x, y)$ сводится к изучению спектра краевой задачи

$$\mathbf{L^*V}=0, \ \mathbf{l^*V}|_\Gamma=0 \qquad (1.6)$$

Здесь операторы $\mathbf{L^*}$ и $\mathbf{l^*}$ получаются из операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{l}$ заменой в них оператора $\partial/\partial t$ на λ. В случае граничных условий (1.2), (1.3), не содержащих оператора дифференцирования по t в явном виде, оператор $\mathbf{l}^*$ тождественно совпадает с $\mathbf{l}$.

Множество всех собственных значений краевой задачи (1.6) и соответствующую им систему ортонормированных собственных вектор-функций можно выписать в явном виде

$$\lambda_{km\omega}=\frac{\mathrm{Pr}+1}{2\,\mathrm{Pr}\,a^2}\pi^2(k^2+a^2m^2)\left[-1\pm\sqrt{1+\frac{4\,\mathrm{Pr}}{(\mathrm{Pr}+1)^2}\left(\frac{Rk^2a^4}{\pi^4(k^2+a^2m^2)^3}-1\right)}\right] \tag{1.7}$$

$$k,\ m=1,\ 2,\dots,\ \omega=1,\ 2$$

Здесь $\omega=1$ соответствует знаку плюс в (1.7), а $\omega=2$ — знаку минус

$$\mathbf{V}_{km\omega}=(V_{1km\omega},\ V_{2km\omega},\ V_{3km\omega})^\tau$$

$$V_{1km\omega}=\alpha_{km\omega}\sin\frac{\pi kx}{a}\cos\pi my,\qquad V_{2km\omega}=\beta_{km\omega}\cos\frac{\pi kx}{a}\sin\pi my \tag{1.8}$$

$$V_{3km\omega}=\gamma_{km\omega}\cos\frac{\pi kx}{a}\sin\pi my$$

$$\alpha_{km\omega}=-\frac{2m\sqrt{a}C_{km\omega}}{kB_{km\omega}},\qquad \beta_{km\omega}=\frac{2C_{km\omega}}{\sqrt{a}B_{km\omega}},\qquad \gamma_{km\omega}=\frac{2}{\sqrt{a}B_{km\omega}}$$

$$C_{km\omega}=\mathrm{Pr}\,\lambda_{km\omega}+\frac{\pi^2}{a^2}(k^2+a^2m^2),$$

$$B_{km\omega}=\sqrt{\left(1+\frac{a^2m^2}{k^2}\right)C^2_{km\omega}+R\,\mathrm{Pr}},\qquad k,m=1,2,\dots,\omega=1,2$$

$$\lambda_{0m}=-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\pi^2m^2,\qquad m=1,2,\dots \tag{1.9}$$

$$\mathbf{V}_{0m}=(V_{10m},\ V_{20m},\ V_{30m})^\tau=(0,0,\gamma\sin\pi my)^\tau,\qquad \gamma=\sqrt{\frac{2}{R\,\mathrm{Pr}\,a}},\qquad m=1,2\dots \tag{1.10}$$

Система собственных вектор-функций (1.8), (1.10) ортогональна относительно скалярного произведения, задаваемого соотношением [3]

$$\langle\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\rangle=\int\limits_0^a\int\limits_0^1(f_{11}f_{12}+f_{21}f_{22}+R\,\mathrm{Pr}\,f_{31}f_{32})\,dx\,dy$$

$$\mathbf{f}_\omega=(f_{1\omega},\ f_{2\omega},\ f_{3\omega})^\tau,\quad \omega=1,\ 2$$

Состояние равновесия (1.4) будет устойчиво в линейном приближении, если все собственные значения краевой задачи (1.6) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости λ, и неустойчиво, если это не так. Из выражений (1.7), (1.9) непосредственно следует, что при любых значениях k и m все собственные значения λ_{km2} и λ_{0m} лежат в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda<0$. В отличие от этой ситуации при определенных значениях параметров R, a среди собственных значений из множества $\{\lambda_{km1}\}$ могут быть положительные. Точнее, существует бесконечная последовательность критических чисел Рэлея $0<R_2<R_2<\dots$, $R_l=R_l(a)$, такая, что при значениях R, удовлетворяющих неравенству $R_l<R<R_{l+1}$, ровно l мод неустойчиво. Первое критическое число R_1 отделяет область параметров R, a, при которых решение (1.4) устойчиво ($R<R_1$), от области параметров, при которых оно неустойчиво ($R>R_1$). Уравнение для первого и высших критических значений числа Рэлея имеет вид

$\lambda_{km1}(R, \Pr, a)=0$. Нетрудно показать, что решением этого уравнения относительно R будет

$$R_{km}=\frac{\pi^4 a^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{a^2}+m^2\right)^3, \qquad k, m=1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

Упорядочив множество (1.11), получаем последовательность $\{R_l\}$. В зависимости от значения a отображение $(k, m)\to l$ различно.

Из выражения (1.7) для λ_{km1} следует, что при любых значениях параметров задачи R, a в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ может находиться лишь конечное число собственных значений краевой задачи (1.6). Последнее позволяет использовать общий подход, развитый в [1, 2], для решения задачи стабилизации неустойчивого решения (1.4) при $R>R_1$.

2. Предположим, что число Рэлея удовлетворяет неравенству $R_n<R<R_{n+1}$, т. е. ровно n мод неустойчивы. Сформулируем задачу стабилизации неустойчивого решения (1.4) в этом случае. Для этого рассмотрим частный вид регуляторов из класса регуляторов, предложенных в [2]. Будем предполагать, что управляющее воздействие осуществляется на границе (при $x=0$) так, что вместо условия теплоизоляции (1.3) выставлено более сложное условие

$$\frac{\partial T}{\partial x}=s_1(t)g_1^-(y), \qquad x=0, \qquad 0<y<1 \tag{2.1}$$

Физический смысл граничного условия (2.1) состоит в том, что при $x=0$ задан нестационарный теплопоток. Будем предполагать, что функция $g_1^-(y)$, задающая неоднородность управляющего воздействия вдоль границы, известна. Все остальные граничные условия (1.2), (1.3) по предположению остаются неизменными. Нестационарная функция $s_1(t)$ заранее неизвестна. Ее текущее значение определяется системой обратной связи. Переходя к образам преобразования Лапласа (с помощью стандартной подстановки $s_1(t)=e^{\lambda t}S_1(\lambda)$), получим с учетом (2.1) модификацию граничного условия для V_3 при $x=0$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x}=S_1(\lambda)g_1^-(y), \qquad x=0, \qquad 0<y<1$$

Конкретизируем вид обратной связи

$$S_1(\lambda)=Q_1(\lambda)F_1\mathbf{V}(\lambda, \cdot, \cdot) \tag{2.2}$$

Здесь F_1 — линейный однородный непрерывный функционал, определенный на вектор-функциях как функциях от x и y. Это обстоятельство формально отмечено в выражении $F_1\mathbf{V}(\lambda, \cdot, \cdot)$ заменой этих переменных точками. Переменная λ рассматривается как параметр. Вид функционала считается известным.

Пример. Внутри прямоугольника в точке с координатами (x_1, y_1) $(0<x_1<a,\ 0<y_1<1)$ помещен точечный датчик, непрерывно измеряющий текущее значение вертикальной компоненты скорости $u_2(t, x_1, y_1)$ в этой точке. В таком случае имеем

$$F_1\mathbf{W}(t, \cdot, \cdot)=W_2(t, x_1, y_1),\ F_1\mathbf{V}(\lambda, \cdot, \cdot)=V_2(\lambda, x_1, y_1) \tag{2.3}$$

Функция $Q_1(\lambda)$, входящая в выражение (2.2), заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения. Эта функция имеет смысл передаточной функции блока обратной связи. По предположению, будем искать ее в классе дробно-рациональных функций, степень числителя которых не превышает степени знаменателя

$$Q_1(\lambda)=\frac{P_s(\lambda)}{P_q(\lambda)}, \qquad s\leqslant q, \qquad P_s(\lambda_{km1})\neq 0, \qquad P_q(\lambda_{km1})\neq 0 \tag{2.4}$$

Таким образом, вместо краевой задачи (1.6) получаем обобщенную краевую задачу

$$\mathbf{L}^*\mathbf{V}=0,\ \mathbf{l}^*\mathbf{V}|_\Gamma=Q_1(\lambda)F_1\mathbf{V}(\lambda,\ \cdot,\ \cdot)\mathbf{g}_1|_\Gamma \tag{2.5}$$

Здесь вектор-функция $\mathbf{g}_1$ определена на границе Г прямоугольника Ω соотношениями (1.3) и (2.1), так что

$$\mathbf{g}_1=\mathbf{g}_1^-=(0,\ 0,\ g_{31}^-,\ 0)^\tau,\ g_{31}^-=g_1^-(y),\ x=0,\ 0<y<1 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{g}_1^-=0,\ x=a,\ 0<y<1;\ 0<x<a,\ y=0;\ 0<x<a,\ y=1$$

Физический смысл введенной системы управления заключается в следующем. Система измерения (вид которой конкретизируется заданием функционала F_1) непрерывно измеряет текущее значение контролируемого параметра, которое подается в блок обратной связи с передаточной функцией $Q_1(\lambda)$, после чего преобразованный сигнал поступает в систему управления, формирующую текущее воздействие на стабилизируемый объект (в данном случае величину потока тепла на боковой стенке; отметим, что в стационарном случае величина потока тепла на боковой стенке равна нулю). Таким образом, имеем одноконтурный регулятор, который полностью характеризуется следующим набором: $\{\mathbf{g}_1,\ F_1,\ Q_1\}$. В отличие от регуляторов, введенных в [2], здесь отсутствует вектор-функция $\mathbf{f}_1$, которая определяла воздействие внутри области; $\mathbf{f}_1$ полагается тождественно равной нулю.

Единственный неизвестный элемент набора $\{\mathbf{g}_1,\ F_1,\ Q_1\}$ – дробно-рациональная функция $Q_1(\lambda)$ – должна быть определена так, чтобы обобщенная краевая задача (2.5) не имела собственных значений в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$. Создание блоков обратной связи с такими передаточными функциями не представляет принципиальных трудностей [6].

Обобщением одноканальных регуляторов $\{g_1,\ F_1,\ Q_1\}$ являются многоканальные регуляторы $\{\mathbf{g}_1,\ F_1,\ Q_1,\ldots,\ \mathbf{g}_N,\ F_N,\ Q_N\}$, состоящие из N каналов обратной связи, каждый из которых имеет независимую систему наблюдения, блок обратной связи и систему воздействия: $\{\mathbf{g}_\alpha,\ F_\alpha,\ Q_\alpha\}$. Краевая задача (2.5) обобщается следующим образом:

$$\mathbf{L}^*\mathbf{V}=0,\quad \mathbf{l}^*\mathbf{V}|_\Gamma=\sum_{\alpha=1}^{N}Q_\alpha(\lambda)F_\alpha\mathbf{V}(\lambda,\cdot,\cdot)\mathbf{g}_\alpha|_\Gamma \tag{2.7}$$

Смысл величин $\mathbf{g}_\alpha$, F_α, Q_α аналогичен введенному выше для величин $\mathbf{g}_1$, F_1, Q_1. При этом вектор-функция $\mathbf{g}_\alpha$ задана на границе Г и, вообще говоря, отличается от $\mathbf{g}_1$. Так, можно, обобщая $\mathbf{g}_1$, рассмотреть $\mathbf{g}_\alpha$ следующего вида:

$$\mathbf{g}_\alpha=c_{1\alpha}\mathbf{g}_\alpha^-+c_{2\alpha}\mathbf{g}_\alpha^+,\quad c_{1\alpha},\ c_{2\alpha}=\text{const} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{g}_\alpha^-=(0,\ 0,\ g_{3\alpha}^-,\ 0)^\tau,\quad g_{3\alpha}^-=g_\alpha^-(y),\quad x=0,\quad 0<y<1 \tag{2.9}$$

$$\mathbf{g}_\alpha^-=0,\quad x=a,\quad 0<y<1;\quad 0<x<a,\quad y=0;\quad 0<x<a,\quad y=1$$

$$\mathbf{g}_\alpha^+=(0,\ 0,\ g_{3\alpha}^+,\ 0)^\tau,\quad g_{3\alpha}^+=g_\alpha^+(y),\quad x=a,\quad 0<y<1 \tag{2.10}$$

$$\mathbf{g}_\alpha^+=0,\quad x=0,\quad 0<y<1;\quad 0<x<a,\quad y=0;\quad 0<x<a,\quad y=1$$

По предположению, функции $g_\alpha^-(y)$ и $g_\alpha^+(y)$ – кусочно-непрерывные функции от y. Задание $\mathbf{g}_\alpha$ в виде (2.8) означает, что управляющее воздействие имеет вид нестационарного теплопотока через боковые границы, причем $\mathbf{g}_\alpha^-$ определяет ту его часть, которая задана при $x=0$, а $\mathbf{g}_\alpha^+$ – при $x=a$. Задавая $\mathbf{g}_\alpha^-$ и $\mathbf{g}_\alpha^+$ соотношениями, отличными от (2.9) и (2.10), можно получить краевые задачи, отвечающие другим способам воздействия (например, с помощью нестационарного изменения температуры верхней и нижней стенки).

По-прежнему считаем $\mathbf{g}_1,\ldots,\ \mathbf{g}_N,\ F_1,\ldots,\ F_N$ заданными. Неизвестные функции $Q_\alpha(\lambda)$ должны быть определены из условия отсутствия собственных значений краевой задачи (2.7) при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$. Функции $Q_\alpha(\lambda)=P_{\alpha s}(\lambda)/P_{\alpha q}(\lambda)$, по предложению, удовлетворяют условиям (2.4).

3. Построим общее решение поставленной задачи стабилизации – определение функций $Q_\alpha(\lambda)$ для общего случая кусочно-непрерывных вектор-функций $\mathbf{g}_\alpha$, заданных на Г.

Введем в рассмотрение целую функцию $\Delta(\lambda)$, корнями которой являются собственные значения (1.7), (1.9) краевой задачи (1.6) (эту функцию можно, например, ввести по формуле Вейерштрасса [7]), а также мероморфные вектор-функции $\mathbf{Z}_\alpha(\lambda, x, y)$ и $\mathbf{X}_\beta(\lambda, x, y)$, удовлетворяющие следующим неоднородным краевым задачам:

$$\mathbf{L}^*\mathbf{Z}_\alpha=0, \quad \mathbf{l}^*\mathbf{Z}_\alpha|_\Gamma=\mathbf{g}_\alpha|_\Gamma, \quad \mathbf{Z}_\alpha=(Z_{\alpha1}, Z_{\alpha2}, Z_{\alpha3}, Z_{\alpha4})^\tau, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant N \tag{3.1}$$

$$\mathbf{L}^*\mathbf{X}_\beta=0, \quad \mathbf{l}^*\mathbf{X}_\beta|_\Gamma=\sum_{\alpha=1}^{\beta-1} Q_\alpha(\lambda)F_\alpha\mathbf{X}_\beta(\lambda, \cdot, \cdot)\mathbf{g}_\alpha|_\Gamma+\mathbf{g}_\beta|_\Gamma, \quad 1\leqslant\beta\leqslant N \tag{3.2}$$

$$\mathbf{X}_\beta=(X_{\beta1}, X_{\beta2}, X_{\beta3}, X_{\beta4})^\tau, \quad \mathbf{X}_1\equiv\mathbf{Z}_1$$

Наряду с четырехкомпонентной записью вектор-функций будем использовать и трехкомпонентную запись, опуская четвертую компоненту, наличие которой подразумевается. В том случае, когда $\mathbf{g}_\alpha$ заданы соотношениями (2.8) – (2.10), решение (3.1), разложенное по ортонормированной системе собственных вектор-функций (1.8), (1.10), имеет вид

$$\mathbf{Z}_\alpha=c_{1\alpha}\mathbf{Y}_{1\alpha}+c_{2\alpha}\mathbf{Y}_{2\alpha}, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant N \tag{3.3}$$

$$\mathbf{Y}_{i\alpha}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{\overset{\alpha}{D}_{kmij}}{\lambda-\lambda_{kmj}}\mathbf{V}_{kmj}(x, y)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overset{\alpha}{D}_{0mi}}{\lambda-\lambda_{0m}}\mathbf{V}_{0m}(y) \tag{3.4}$$

$$\overset{\alpha}{D}_{kmij}=\langle\mathbf{Y}_{i\alpha}, \mathbf{V}_{kmj}\rangle, \quad \overset{\alpha}{D}_{0mi}=\langle\mathbf{Y}_{i\alpha}, \mathbf{V}_{0m}\rangle, \quad i, j=1, 2, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant N$$

$$\overset{\alpha}{D}_{km1j}=-R\int_0^1 V_{3kmj}(0, y)g_\alpha^-(y)\,dy, \quad \overset{\alpha}{D}_{0m1}=-R\int_0^1 V_{30m}(y)g_\alpha^-(y)\,dy \tag{3.5}$$

$$\overset{\alpha}{D}_{km2j}=R\int_0^1 V_{3kmj}(a, y)g_\alpha^+(y)\,dy, \quad \overset{\alpha}{D}_{0m2}=R\int_0^1 V_{30m}(y)g_\alpha^+(y)\,dy \tag{3.6}$$

С учетом (3.3), (3.4) каждую функцию $\mathbf{Z}_\alpha$ при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$ можно представить в виде

$$\mathbf{Z}_\alpha=\sum_{l=1}^{n}\frac{A_{\alpha l}}{\lambda-\lambda_l}\mathbf{V}_l(x, y)+\mathbf{Z}_{\alpha0}(\lambda, x, y)$$
$$A_{\alpha l}=c_{1\alpha}\overset{\alpha}{D}_{km11}+c_{2\alpha}\overset{\alpha}{D}_{km12}, \quad \mathbf{V}_l=\mathbf{V}_{km1}, \quad (k, m)\to l \tag{3.7}$$

Здесь соответствие $(k, m)\to l$ устанавливается соотношением $R_l=R_{km}$, $\mathbf{Z}_{\alpha0}$ – аналитическая функция λ при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$.

Среди собственных значений λ_l могут быть совпадающие. Последнее означает, что кратность ν_l такого собственного значения λ_l больше единицы. Наряду с представлением (3.7) для $\mathbf{Z}_\alpha$ в окрестности каждой точки λ_l справедливо представление

$$\mathbf{Z}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\nu_l}\frac{A_{\alpha l}{}^\beta\mathbf{V}_l{}^\beta(x, y)}{\lambda-\lambda_l}+\mathbf{Z}_{\alpha lr}(\lambda, x, y) \tag{3.8}$$

Вектор-функция $\mathbf{Z}_{\alpha lr}$ аналитична (r – регулярная) в окрестности $\lambda=\lambda_l$, $\mathbf{V}_l{}^\beta$ – β-я собственная функция, соответствующая λ_l, $A_{\alpha l}{}^\beta$ – коэффициент в разложении (3.7), (3.8) перед $\mathbf{V}_l{}^\beta$. При $\nu_l=1$ сумма в (3.8) содержит одно слагаемое, при $\nu_l>1$ каждая $V_l{}^\beta$ совпадает с какой-то из функций V_δ из суммы в (3.7) с индексом δ таким, что $\lambda_\delta=\lambda_l$.

Решение поставленной задачи стабилизации дают следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть λ_0 – собственное значение (2.7). Если $\lambda_0\neq\lambda_l$, $1\leqslant l\leqslant n$, $\Delta(\lambda_l)=0$, то любая собственная функция задачи (2.7) соответствующая λ_0, может быть представлена в виде

$$\mathbf{V}_0=\sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(\lambda_0)F_\alpha\mathbf{V}_0(\cdot, \cdot)\mathbf{Z}_\alpha(\lambda_0, x, y), \quad \lambda_0\neq\lambda_l \tag{3.9}$$

причем произвольные константы $F_\alpha V_0$ удовлетворяют следующей системе N линейных алгебраических уравнений:

$$F_\gamma V_0=\sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(\lambda_0)F_\alpha V_0 F_\gamma Z_\alpha(\lambda_0,\cdot,\cdot),\quad \gamma=1,2,\ldots,N \tag{3.10}$$

Если $\lambda_0=\lambda_l$, $\Delta(\lambda_l)=0$, то любая собственная функция V_0 задачи (2.7), соответствующая $\lambda_0=\lambda_l$, может быть представлена в виде

$$V_0=\sum_{\beta=1}^{\nu_l} c_\beta V_l{}^\beta+\sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(\lambda_l)F_\alpha V_0(\cdot,\cdot)Z_{\alpha lr}(\lambda_l,x,y),\quad \lambda_0=\lambda_l \tag{3.11}$$

причем произвольные константы $c_1,\ldots,c_{\nu_l}$, $F_1V_0,\ldots,F_NV_0$ удовлетворяют системе ν_l+N линейных алгебраических уравнений

$$F_\gamma V_0=\sum_{\beta=1}^{\nu_l} c_\beta F_\gamma V_l{}^\beta+\sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(\lambda_l)F_\alpha V_0 F_\gamma Z_{\alpha lr}(\lambda_l,\cdot,\cdot),\quad \gamma=1,2,\ldots,N \tag{3.12}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(\lambda_l)F_\alpha V_0 A_{\alpha l}{}^\beta=0,\quad \beta=1,2,\ldots,\nu_l \tag{3.13}$$

Если λ_0 – собственное значение (2.7), то система (3.10) относительно $F_1V_0,\ldots$ $\ldots, F_NV_0$ или система (3.12), (3.13) относительно $c_1,\ldots, c_\gamma$, $F_1V_0,\ldots, F_NV_0$ имеют ненулевое решение и наоборот.

Доказательство. Выражения (3.9), (3.11) дают общий вид ограниченного решения (2.7) в каждом из рассматриваемых случаев. Соотношения (3.10) и (3.12) непосредственно следуют из (3.9) и (3.11) соответственно. Соотношения (3.13) являются условиями существования ограниченного решения (2.7) при $\lambda=\lambda_l$. По условию теоремы при $\lambda=\lambda_0$ существует собственная функция V_0, поэтому определители систем (3.10) и (3.12), (3.13) обязаны быть равными нулю.

Пусть $\mathbf{H}$ – матрица этих систем. В случае системы (3.10)

$$\mathbf{H}=\mathbf{D},\ \mathbf{D}=\{d_{\gamma\alpha}\},\ d_{\gamma\alpha}=Q_\alpha(\lambda_0)F_\gamma Z_\alpha(\lambda_0,\cdot,\cdot)-\delta_{\gamma\alpha},\ 1\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant N$$

$\delta_{j\alpha}$ – символ Кронекера. В случае системы (3.12), (3.13)

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{D}\\ 0 & \mathbf{A}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}\equiv\mathbf{H}_l \tag{3.14}$$

$$\mathbf{A}=\{a_{\beta\alpha}\},\ \mathbf{B}=\{b_{\gamma\beta}\},\ \mathbf{D}=\{d_{\gamma\alpha}\},\ a_{\beta\alpha}=Q_\alpha(\lambda_l)A_{\alpha l}{}^\beta,\ b_{\gamma\beta}=F_\gamma V_l{}^\beta$$

$$d_{\gamma\alpha}=Q_\alpha(\lambda_l)F_\gamma Z_{\alpha lr}(\lambda_l,\cdot,\cdot)-\delta_{\gamma\alpha},\ 1\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant N,\ 1\leqslant\beta\leqslant\nu_l$$

Если $\lambda=\lambda_0$ – собственное значение (2.7), то $\det\mathbf{H}=0$.

Если $\det\mathbf{H}=0$, то существуют ненулевые решения систем (3.11) или (3.12), (3.13), а значит существуют ненулевые решения V_0 (2.7) и λ_0 есть собственное значение (2.7).

Введем в рассмотрение функцию $\Delta_N(\lambda)$

$$\Delta_N(\lambda)=\Delta(\lambda)\det|Q_\alpha(\lambda)F_\gamma Z_\alpha(\lambda,\cdot,\cdot)-\delta_{\gamma\alpha}\Big|\prod_{\alpha=1}^{N}P_{\alpha q}(\lambda),\quad 1\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant N$$

Теорема 2. Функция $\Delta_N(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$, причем справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_l}\Delta_N(\lambda)=\det\mathbf{H}\equiv0,\quad \nu_l>N \tag{3.15}$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_l}\Delta_N(\lambda)=\varkappa\det\mathbf{H}\neq0,\quad N\geqslant\nu_l,\quad \varkappa=(-1)^{\nu_l(\nu_l+N)}\lim_{\lambda\to\lambda_l}(\lambda-\lambda_l)^{-p_l}\Delta(\lambda)\neq0$$

Здесь p_l — алгебраическая кратность λ_l как корня уравнения $\Delta(\lambda)=0$. В рассматриваемой задаче о подавлении конвекции $p_l=\nu_l$.

Доказательство следует из непосредственной проверки соотношений (3.15).

Теорема 3. Для того чтобы $\lambda=\lambda_0$ было собственным значением краевой задачи (2.7), необходимо и достаточно, чтобы $\lambda=\lambda_0$ было корнем уравнения

$$\Delta_N(\lambda)=0 \tag{3.16}$$

Доказательство следует из теоремы 1, 2; в случае, когда $N=1$, уравнение (3.16) имеет вид

$$\Delta(\lambda)[Q_1(\lambda)F_1\mathbf{Z}_1(\lambda,\cdot,\cdot)-1]P_{1q}(\lambda)=0 \tag{3.17}$$

Теорема 4. Для того чтобы в классе функций вида (2.4) существовала функция $Q_1(\lambda)$, обеспечивающая отсутствие корней уравнения (3.17) при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, необходимо и достаточно выполнения для всех неустойчивых мод условий

$$\nu_l=1,\quad F_1\mathbf{V}_l(\cdot,\cdot)\neq 0,\quad A_l\neq 0,\quad l=1,2,\ldots,n \tag{3.18}$$

Доказательство. Необходимость следует из результатов теорем 1–3. Достаточность устанавливается конструктивным построением функции $Q_1(\lambda)$. В силу (3.18) $\Delta_1(\lambda_l)\neq 0$, $1\leqslant l\leqslant n$. Во всех остальных точках λ, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, $\Delta(\lambda)\neq 0$, поэтому вместо (3.17) можно рассматривать уравнение

$$Q_1(\lambda)F_1\mathbf{Z}_1(\lambda,\cdot,\cdot)=1 \tag{3.19}$$

Выберем функцию $Q_1(\lambda)$ в виде

$$Q_1(\lambda)=\frac{\alpha_0}{1+\alpha_0\Phi_p(\lambda)+\alpha_0\Psi_q(\lambda)},\quad \Phi_p(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k}{\lambda-\mu_k},\quad p=\sum_{l=1}^{n}p_l=n \tag{3.20}$$

Здесь α_0, α_k, μ_k, q — искомые константы, $\Psi_q(\lambda)$ — рациональная функция, которую можно представить в виде отношения двух полиномов степени q. Подставим (3.7), (3.20) в уравнение (3.19). С помощью элементарных преобразований его можно привести к виду

$$G_n(\lambda)=\chi_q(\lambda) \tag{3.21}$$

$$G_n(\lambda)=1+\alpha_0\Phi_n(\lambda)-\alpha_0\sum_{l=1}^{n}\frac{A_lF_1\mathbf{V}_l}{\lambda-\lambda_l},\quad \chi_q(\lambda)=\alpha_0[F_1\mathbf{Z}_0(\lambda,\cdot,\cdot)-\Psi_q(\lambda)] \tag{3.22}$$

Неизвестные константы α_0, α_k, μ_k, q и функция $\Psi_q(\lambda)$ должны быть определены из условия отсутствия корней у уравнения (3.19) или (3.21) при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$. Для этого, например, можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в [1]. Константы α_k, μ_k определяются из условия $G_n(\lambda)\neq 0$ при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$. В качестве системы функций $\Psi_q(\lambda)$, $q=1,2,\ldots$, выбирается система дробно-рациональных функций, аппроксимирующих функцию $\eta(\lambda)=F_1\mathbf{Z}_0(\lambda,\cdot,\cdot)$ [1]. При $q\to\infty$ имеем в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ $\max|\chi_q(\lambda)|\to 0$. Уравнение (3.19) заведомо не имеет корней в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, если выполнено неравенство

$$\min|G_n(\lambda)|>\max|\chi_q(\lambda)|,\quad \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0 \tag{3.23}$$

Оценку для значений q (завышенную) можно получить из условия выполнения неравенства (3.23). Параметр α_0 можно выбирать из различных оптимизационных соображений.

Теорема 5. Справедливо представление

$$\det|Q_\alpha(\lambda)F_\gamma\mathbf{Z}_\alpha(\lambda,\cdot,\cdot)-\delta_{\gamma\alpha}|=\prod_{\beta=1}^{N}[Q_\beta(\lambda)F_\beta\mathbf{X}_\beta(\lambda,\cdot,\cdot)-1],\quad 1\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant N \tag{3.24}$$

Доказательство вытекает из представления для $\mathbf{X}_\beta$, следующего из (3.2)

$$\mathbf{X}_\beta=\sum_{\alpha=1}^{\beta-1}Q_\alpha(\lambda)F_\alpha\mathbf{X}_\beta(\lambda,\cdot,\cdot)\mathbf{Z}_\alpha+\mathbf{Z}_\beta,\quad 1\leqslant\beta\leqslant N \tag{3.25}$$

Используя (3.25), можно выразить $\mathbf{X}_\beta$ и $F_\beta\mathbf{X}_\beta$ через $\mathbf{Z}_\alpha$. Так, для $F_\beta\mathbf{X}_\beta$ имеем

$$Q_\beta(\lambda)F_\beta\mathbf{X}_\beta(\lambda,\cdot,\cdot)-1=\det{}_\beta/\det{}_{\beta-1},\quad \det{}_0=1,\quad 1\leqslant\beta\leqslant N \tag{3.26}$$

$$\det{}_\beta=\det|Q_\alpha(\lambda)F_\gamma\mathbf{Z}_\alpha(\lambda,\cdot,\cdot)-\delta_{\gamma\alpha}|,\quad 1\leqslant\alpha,\quad \gamma\leqslant\beta \tag{3.27}$$

Подставив (3.26), (3.27) в (3.24), убеждаемся в справедливости (3.24).

Теорема 6. Для того чтобы в классе функций вида (2.4) существовал набор $Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda)$, обеспечивающий отсутствие корней у уравнения (3.16) при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы для всех неустойчивых мод были выполнены следующие условия:

$$N \geqslant \nu_l, \quad \det \mathbf{H}_l \neq 0, \quad l=1, 2, \ldots, n \tag{3.28}$$

Необходимость следует из теорем 1–3. Достаточность устанавливается с помощью конструктивного построения функций $Q_\beta(\lambda)$, которые определяются последовательно, начиная с $Q_1(\lambda)$. При уже найденных $Q_1(\lambda), \ldots, Q_{\beta-1}(\lambda)$ задача нахождения $Q_\beta(\lambda)$ аналогична рассмотренной в теореме 4. $Q_\beta(\lambda)$ должна быть найдена из условия отсутствия при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ корней у уравнения

$$Q_\beta(\lambda) F_\beta \mathbf{X}_\beta(\lambda, \cdot, \cdot) = 1$$

После того как найдены $Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda)$, в силу теорем 3, 5 получаем, что уравнение (3.16) не имеет корней при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ и, следовательно, краевая задача (2.7) не имеет собственных значений при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Следствие. $N_{\min} = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant n} \nu_l$.

Результаты, полученные в теоремах *1–6*, дают решение задачи стабилизации для широкого класса операторов $\{\mathbf{L}, \mathbf{l}\}$ и областей Ω, отличных от рассмотренных в разд. 1. Как видно из доказательств этих теорем, $\{\mathbf{L}, \mathbf{l}\}$ и Ω должны быть таковы, что спектр исходной краевой задачи (при отсутствии управления) не должен содержать непрерывной компоненты при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, число неустойчивых мод должно быть конечно, а соответствующие им собственные значения должны иметь конечную кратность (и как собственное значение и как корень соответствующего уравнения $\Delta(\lambda)=0$) и, кроме того, решение неоднородной задачи типа (3.1) при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ должно иметь вид суммы конечного числа слагаемых с особенностями типа полюсов как функций от λ и слагаемого, аналитичного по λ. В частности, теоремы *1–6* дают решение задачи стабилизации неустойчивых состояний равновесия в различных задачах о подавлении конвекции при реальных граничных условиях при соответствующем определении $\mathbf{L}$, $\mathbf{l}$, Ω, $\mathbf{g}_\alpha$ и т. д.

4. Проиллюстрируем полученные результаты на примере стабилизации стационарного решения (1.4) при $n=1$ и 2. Будем рассматривать случай однократных собственных значений. Решение ищем в классе одноканальных регуляторов $\{\mathbf{g}_1, F_1, Q_1\}$. Общий вид решения (соотношения (3.20)) дает теорема 4. Функционал F_1 зададим в виде (2.3), функцию $\mathbf{g}_1$ – в виде (2.6) (т. е. $c_{11}=1$, $c_{21}=0$ в (2.8)). Отдельно приведем соотношения, дающие примеры решений для случаев $n=1$ и 2.

Положим $n=1$, $R=2500$, $\mathrm{Pr}=10$, $a=1$. При этом с учетом (1.8), (2.3), (2.6), (3.5) имеем

$$\lambda_1 = \lambda_{111}, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{111}, \quad F_1 \mathbf{V}_1(\cdot, \cdot) = \beta_{111} \cos \pi x_1 \sin \pi y_1, \quad A_1 = D^1_{1111},$$

$$A_1 = -R\gamma_{111} \int\limits_0^1 g_1^-(y) \sin \pi y \, dy$$

Условия (3.18) налагают ограничения на x_1, y_1 и $g_1^-(y)$

$$x_1 \neq \frac{1}{2}, \quad y_1 \neq 0, \quad y_1 \neq 1, \quad \int\limits_0^1 g_1^-(y) \sin \pi y \, dy \neq 0 \tag{4.1}$$

Смысл условий (4.1) состоит в том, что датчик нельзя помещать в точки на прямой $x=1/2$, а также на верхнюю и нижнюю стенки. При задании знакоопределенной функции $g_1^-(y)$ последнее условие (4.1) выполнено автоматически. При выполнении (4.1) уравнение (3.19) для собственных значений краевой задачи (2.5) (замкнутой системы) имеет вид

$$Q_1(\lambda) \mathbf{Z}_{12}(\lambda, x_1, y_1) = 1, \quad \mathbf{Z}_1 = (Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{14})^\tau \tag{4.2}$$

Согласно теореме 4 разд. 3, существует дробно-радиональная функция $Q_1(\lambda)$ вида (3.20), такая, что уравнение (4.2) не имеет корней при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$. Переходим к определению функции $Q_1(\lambda)$. Зададим корнями функции $G_1(\lambda)$ (см. (3.22)) числа Λ_1 и Λ_2, $\operatorname{Re}\Lambda_1<0$, $\operatorname{Re}\Lambda_2<0$, получим для констант α_1 и μ_1 следующие выражения:

$$\mu_1=\lambda_1+\frac{(\lambda_1-\Lambda_1)(\lambda_1-\Lambda_2)}{\alpha_0 D^1_{1111}},\qquad \alpha_1=\frac{(\mu_1-\Lambda_1)(\mu_1-\Lambda_2)}{\alpha_0(\mu_1-\lambda_1)}.$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть функция $g_1^-(y)$ и константы задачи заданы следующим образом:

$$g_1^-(y)=0{,}4,\ 0<y<0{,}75;\ g_1^-(y)=0,\ 0{,}75<y<1 \tag{4.3}$$

$$x_1=0{,}25,\ y_1=0{,}25,\ \Lambda_1=\Lambda_2=-1,\ \alpha_0=1 \tag{4.4}$$

$$\lambda_1=\lambda_{111}=3{,}42,\ \mu_1=-6{,}86,\ \alpha_1=-3{,}34$$

При этом численный анализ уравнения (4.2) (или эквивалентных ему уравнений (3.19) и (3.21)) при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ показывает, что функцию $\Psi_q(\lambda)$ в выражении (3.20) можно положить равной нулю (при определении $\Psi_q(\lambda)$ из условия (3.23) получаем достаточно громоздкое выражение), причем функция $Q_1(\lambda)$, при которой уравнение (4.2) не имеет корней при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, может быть выписана в явном виде

$$Q_1(\lambda)=\alpha_0\frac{(\lambda-\mu_1)}{(\lambda-\omega_1)},\qquad \omega_1=-3{,}52 \tag{4.5}$$

Как следует из результатов разд. 3, регулятор $\{\mathrm{g}_1, F_1, Q_1\}$ стабилизирует неустойчивое состояние покоя в задаче (1.5), если g_1, F_1, Q_1 заданы соотношениями (4.3), (2.3), (4.4), (4.5).

Пусть $n=2$, $R=25\,000$, $\mathrm{Pr}=10$, $a=1/2$. При этом с учетом (1.8), (2.3), (2.6), (3.5) имеем

$$\lambda_i=\lambda_{1i1},\ F_1\mathrm{V}_i=\beta_{1i1}\cos 2\pi x_1\sin i\pi y_1,\ i=1,\ 2$$

$$A_i=-R\gamma_{1i1}\int\limits_0^1 g_1^-(y)\sin i\pi y\,dy,\qquad A_i=D^1_{1i11}$$

Условия (3.18) накладывают ограничения на x_1, y_1, $g_1^-(y)$

$$x_1\neq\frac{1}{4},\quad y_1\neq 0,\quad y_1\neq\frac{1}{2},\quad y_1\neq 1,\quad A_1\neq 0,\quad A_2\neq 0 \tag{4.6}$$

Условие $A_2\neq 0$ может не выполняться для некоторых знакопостоянных функций $g_1^-(y)$. Так, $A_2=0$, если $g_1^-(y)=1$. При выполнении условий (4.6) уравнение (3.19) и в этом случае имеет вид (4.2). Задав корнями функции $G_2(y)$ (см. (3.23)) числа Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4, $\operatorname{Re}\Lambda_j<0$, получим для α_1, α_2, μ_1, μ_2 следующие выражения:

$$\alpha_1=\frac{R_4(\mu_1)}{\alpha_0 R_2(\mu_1)},\qquad \alpha_2=-\frac{R_4(\mu_2)}{\alpha_0 R_2(\mu_2)}$$

$$R_2(\lambda)=(\mu_1-\mu_2)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),\qquad R_4(\lambda)=\prod_{j=1}^{4}(\lambda-\Lambda_{-j})$$

$$\mu_{1,2}=\frac{-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4C_2}}{2},\qquad C_1=-\lambda_1-\lambda_2+\frac{B_1-B_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$

$$C_2=\lambda_1\lambda_2-\frac{B_1\lambda_2-B_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad B_i=(-1)^i\frac{R_4(\lambda_i)}{\alpha_0 D^1_{1i11}(\lambda_1-\lambda_2)},\qquad i=1,2$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $g_1^-(y)$ и константы задачи заданы в виде

$$g_1^-(y)=0{,}04,\ 0<y<0{,}75;\ g_1^-(y)=0,\ 0{,}75<y<1 \tag{4.7}$$

$$x_1=0{,}125,\ y_1=0{,}75,\ \Lambda_j=-10,\ \alpha_0=20 \tag{4.8}$$

$$\lambda_1=\lambda_{111}=22{,}8,\ \lambda_2=\lambda_{121}=6{,}7,\ \mu_1=-0{,}867,\ \mu_2=-64{,}4,$$

$$\alpha_1=0{,}03\quad \alpha_2=-1{,}11$$

Численный анализ уравнения (4.2) при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ показывает, что в этом случае функцию $\Psi_q(\lambda)$ в (3.20) уже нельзя положить равной нулю. В данном случае (в отличие от [1]) в качестве системы аппроксимирующих функций $\{\Psi_q(\lambda)\}$ может быть выбрана последовательность частичных сумм в разложении $F_1\mathbf{Z}_0$ на простейшие дроби с учетом (3.4). Для системы числовых параметров (4.7), (4.8) из этого разложения достаточно взять лишь один член, так что $\Psi_1(\lambda)$ имеет вид

$$\Psi_1(\lambda)=\frac{D_{1111}F_1\mathbf{V}_{112}(\cdot\ \cdot)}{\lambda-\lambda_{112}},\qquad D_{1111}^2F_1\mathbf{V}_{112}(\cdot,\cdot)=1{,}74,\qquad \lambda_{112}=-77{,}1$$

При этом функция $Q_1(\lambda)$, при которой уравнение (4.2) не имеет корней при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, имеет вид

$$Q_1(\lambda)=\alpha_0\frac{(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)(\lambda-\lambda_{112})}{(\lambda-\omega_1)(\lambda-\omega_2)(\lambda-\omega_3)},\ \omega_1=-0{,}88,\ \omega_2=-1{,}42,\quad \omega_3=-56 \tag{4.9}$$

Регулятор $\{\mathbf{g}_1,\ F_1,\ Q_1\}$ решает задачу стабилизации, если $\mathbf{g}_1,\ F_1,\ Q_1$ заданы соотношениями (4.7), (2.3), (4.8), (4.9).

Построенные регуляторы $\{\mathbf{g}_1,\ F_1,\ Q_1\}$ существенно проще, чем распределенные регуляторы, предложенные в [4].

5. Существенной особенностью распределенных систем различной физической природы является возможность появления кратных собственных значений, соответствующих неустойчивым модам, при некоторых значениях параметров задачи [2]. Как это следует из результатов разд. 3, для подавления неустойчивости в этом случае необходимо использовать многоканальные регуляторы. Проиллюстрируем это на примере подавления конвекции.

Уравнение для определения значений числа Рэлея $R=R(\mathrm{Pr},\ a)$, при которых существуют неоднократные собственные значения, имеет вид

$$\lambda_{km1}(R,\ \mathrm{Pr},\ a)=\lambda_{k_1m_11}(R,\ \mathrm{Pr},\ a),\quad (k,\ m)\neq(k_1,\ m_1) \tag{5.1}$$

Нетрудно показать, что существуют значения Pr, a, при которых уравнение (5.1) имеет решение $R=R_{kmk_1m_1}(\mathrm{Pr},\ a)$, причем $\lambda_{km1}\geqslant 0$. Анализ показывает, что типичной является ситуация, при которой среди конечного множества собственных значений λ_l, $\operatorname{Re}\lambda_l\geqslant 0$ краевой задачи (1.7), (1.9) одно-двукратное, остальные однократные. Малые вариации Pr и a приводят, вообще говоря, к снятию вырождения спектра.

Рассмотрим случай, при котором в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ находятся три собственных значения λ_1, λ_2, λ_3, причем $\lambda_2=\lambda_3$, так что можно считать $\nu_1=1$, $\nu_2=2$. Остановимся на следующих числовых значениях параметров:

$$R=R_{1221}=20417{,}11,\quad \mathrm{Pr}=10,\quad a=0{,}625$$

$$\lambda_1=\lambda_{111}=22{,}1,\quad \lambda_2=\lambda_{121}=4{,}96,\quad \lambda_3=\lambda_{211}=4{,}96,\quad \lambda_2=\lambda_3 \tag{5.2}$$

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_{111},\quad \mathbf{V}_2^1=\mathbf{V}_{121},\quad \mathbf{V}_2^2=\mathbf{V}_{211}$$

Для решения задачи стабилизации рассмотрим двухканальный регулятор $\{\mathbf{g}_1, F_1, Q_1, \mathbf{g}_2, F_2, Q_2\}$, причем $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ имеют вид (2.8) со следующими значениями констант: $c_{11}=1$, $c_{21}=0$, $c_{12}=0$, $c_{22}=1$. Функционалы F_1 и F_2 аналогичны (2.3)

$$F_i\mathbf{V}=V_2(\lambda,\ x_i,\ y_i),\quad \mathbf{V}=(V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4)^\tau,\quad (x_i,\ y_i)\in\Omega,\quad i=1,\ 2 \tag{5.3}$$

Физический смысл выбранной системы управления состоит в том, что нестационарный теплоподвод осуществляется на обеих боковых стенках, так что

$$\frac{dT}{\partial x}=s_1(t)g_1^-(y),\quad x=0,\quad 0<y<1;\quad \frac{dT}{\partial x}=s_2(t)g_2^+(y),\quad x=a,\quad 0<y<1$$

$$S_1(\lambda)=Q_1(\lambda)V_2(\lambda, x_1, y_1),\quad s_1(t)=S_1(\lambda)e^{\lambda t};$$

$$S_2(\lambda)=Q_2(\lambda)V_2(\lambda, x_2, y_2),\quad s_2(t)=S_2(\lambda)e^{\lambda t}$$

Передаточные функции $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ первого и второго контуров обратной связи, имеющие, по предположению, вид (2.4), должны быть определены из условия отсутствия при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$ собственных значений краевой задачи (2.7) (соответствует замкнутой системе объект – регулятор), которая в данном случае имеет вид

$$\mathbf{L}^*\mathbf{V}=0,\quad \mathbf{l}^*\mathbf{V}|_\Gamma=Q_1(\lambda)V_2(\lambda, x_1, y_1)\mathbf{g}_1|_\Gamma+Q_2(\lambda)V_2(\lambda, x_2, y_2)\mathbf{g}_2|_\Gamma \tag{5.4}$$

Условия стабилизируемости (3.28) имеют вид

$$\nu_1=1<N,\quad \det\mathbf{H}_1\neq0;\quad \nu_2=2=N,\quad \det\mathbf{H}_2\neq0,\quad N=2 \tag{5.5}$$

Здесь матрицы $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ и их элементы определены соотношениями

$$\mathbf{H}_1=\begin{pmatrix} F_1\mathbf{V}_1 & Q_1(\lambda_1)F_1\mathbf{Z}_{11r}-1 & Q_2(\lambda_1)F_1\mathbf{Z}_{21r} \\ F_2\mathbf{V}_1 & Q_1(\lambda_1)F_2\mathbf{Z}_{11r} & Q_2(\lambda_1)F_2\mathbf{Z}_{21r}-1 \\ 0 & Q_1(\lambda_1)A_{11}^1 & Q_2(\lambda_1)A_{21}^1 \end{pmatrix},\quad \lambda=\lambda_1$$

$$\mathbf{H}_2=\begin{pmatrix} F_1\mathbf{V}_2^1 & F_1\mathbf{V}_2^2 & Q_1(\lambda_2)F_1\mathbf{Z}_{12r}-1 & Q_2(\lambda)F_1\mathbf{Z}_{22r} \\ F_2\mathbf{V}_2^1 & F_2\mathbf{V}_2^2 & Q_1(\lambda_2)F_2\mathbf{Z}_{12r} & Q_2(\lambda_2)F_2\mathbf{Z}_{22r}-1 \\ 0 & 0 & Q_1(\lambda_2)A_{12}^1 & Q_2(\lambda_2)A_{22}^1 \\ 0 & 0 & Q_1(\lambda_2)A_{12}^2 & Q_2(\lambda_2)A_{22}^2 \end{pmatrix},\quad \lambda=\lambda_2$$

$$F_i\mathbf{V}_1=\beta_{11i}\cos\frac{\pi x_i}{a}\sin\pi y_i,\quad F_i\mathbf{V}_2^1=\beta_{12i}\cos\frac{\pi x_i}{a}\sin 2\pi y_i,$$

$$F_i\mathbf{V}_2^2=\beta_{21i}\cos\frac{2\pi x_i}{a}\sin\pi y_i,\quad i=1,2 \tag{5.6}$$

$$A_{1l}^\beta=-R\delta_{\beta l}\int_0^1 g_1^-(y)\sin\theta_{\beta l}y\,dy,\quad A_{2l}^\beta=-R\delta_l\cos\pi(\beta-1)\int_0^1 g_2^+(y)\sin\theta_{\beta l}y\,dy \tag{5.7}$$

$$\delta_{11}=\gamma_{111},\quad \delta_{12}=\gamma_{121},\quad \delta_{22}=\gamma_{211};\quad \theta_{11}=1,\quad \theta_{12}=2,\quad \theta_{22}=1,\quad (\beta, l)=(1, 1),$$

$$(\beta, l)=(1, 2),\quad (\beta, l)=(2, 2)$$

Соотношения (5.6) получены с учетом (1.8), (5.3), соотношения (5.7) следуют из (3.5), (3.6), (3.8). Для вектор-функций $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ справедливы разложения (3.3) – (3.6) с учетом соотношений для $c_{1\alpha}$ и $c_{2\alpha}: c_{\gamma\alpha}=\delta_{\gamma\alpha}$. Представления (3.8) для функций $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, удовлетворяющих (3.1), в окрестности точек λ_1 и λ_2 имеют вид

$$\mathbf{Z}_i=\frac{A_{i1}^1\mathbf{V}_1}{\lambda-\lambda_1}+\mathbf{Z}_{i1r}(\lambda, x, y),\quad \mathbf{Z}_i=\frac{A_{i2}^1\mathbf{V}_2^1+A_{i2}^2\mathbf{V}_2^2}{\lambda-\lambda_2}+\mathbf{Z}_{i2r}(\lambda, x, y),\quad i=1,2$$

Вектор-функции $\mathbf{Z}_{\alpha lr}$ аналитичны в окрестности точки $\lambda=\lambda_l$, α – номер $\mathbf{Z}_\alpha$. У коэффициентов $A_{\alpha l}^\beta$ верхний индекс нумерует собственные функции, соответствующие $\lambda=\lambda_l$.

Уравнение для собственных значений (5.4) следует из (3.16) и при выполнении (5.5) имеет вид

$$(Q_1(\lambda)F_1\mathbf{Z}_1-1)(Q_2(\lambda)F_2\mathbf{Z}_2-1)-Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)F_1\mathbf{Z}_2F_2\mathbf{Z}_1=0 \tag{5.8}$$

Функции $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ согласно теореме 6 разд. 3, находятся из условий отсутствия корней у уравнений

$$Q_1(\lambda)F_1\mathbf{X}_1(\lambda, \cdot, \cdot)=1,\quad Q_2(\lambda)F_2\mathbf{X}_2(\lambda, \cdot, \cdot)=1 \tag{5.9}$$

Вектор-функции X_1 и X_2 – решения краевых задач (3.2) – с помощью (3.25) – (3.27) можно выразить через $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$

$$\mathbf{X}_1\equiv\mathbf{Z}_1,\quad \mathbf{X}_2=\mathbf{Z}_2+\frac{Q_1(\lambda)F_2\mathbf{Z}_1(\lambda, \cdot, \cdot)}{1-Q_1(\lambda)F_1\mathbf{Z}_1(\lambda, \cdot, \cdot)}\mathbf{Z}_1$$

Таким образом, задача определения $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$, таких, что уравнение (5.8) не имеет корней при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, распадается на решение двух задач об определении $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ для уравнений (5.9), аналогичных рассмотренным в разд. 4. Можно показать, что разложение вектор-функции $\mathbf{X}_2(\lambda, x, y)$ при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ можно представить в виде

$$\mathbf{X}_2(\lambda,x,y)=\frac{G_2\Phi_2(x,y)}{\lambda-\lambda_2}+\mathbf{X}_{2r}(\lambda,x,y),\quad G_2=\text{const}$$

$$G_2=-\frac{\det\mathbf{A}_2^*}{A_{12}^1F_1\mathbf{V}_2^1+A_{12}^2F_1\mathbf{V}_2^2},\quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}A_{12}^1 & A_{22}^1\\ A_{12}^2 & A_{22}^2\end{pmatrix},\quad \Phi_2=\begin{vmatrix}\mathbf{V}_2^1 & \mathbf{V}_2^2\\ F_1\mathbf{V}_2^1 & F_1\mathbf{V}_2^2\end{vmatrix}$$

Здесь $\mathbf{X}_{2r}(\lambda, x, y)$ – вектор-функция, аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, $\Phi_2(x, y)$ – собственная функция для системы, замкнутой по первому контуру и разомкнутой по второму, соответствующая $\lambda=\lambda_2$. Условие стабилизируемости для второго уравнения (5.9), имеющее вид $G_2F_2\Phi_2(\cdot,\ \cdot)\neq 0$, эквивалентно условию (5.5) для $\mathbf{H}_2$, которое можно преобразовать к виду $\det\mathbf{A}_2\det\mathbf{B}_2\neq 0$, $\mathbf{B}_2=\{F_i\mathbf{V}_2^j\}$, i, $j=1$, 2, $\det\mathbf{B}_2=-F_2\Phi_2$. В этом случае условия (5.5) не столь просты, как аналогичные условия из разд. 4, поэтому их наглядная физическая интерпретация затруднительна.

Автор выражает благодарность М. П. Зекцеру за помощь в проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бучин В. А.* Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора с рециклом как объекта с распределенными параметрами посредством сосредоточенных систем управления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 11–24.
2. *Бучин В. А.* Стабилизация неустойчивых состояний распределенных механических систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. С. 164–184.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
4. *Ладиков Ю. П.* Стабилизация процессов в сплошных средах. М.: Наука, 1978. 432 с.
5. *Joseph Daniel D.* Stability of fluid motions. V. 1, 2. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1976. (Рус. перев.: Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.)
6. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 395 с.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию 21.IX.1989