

УДК 533.6.011.7

© 1990 г.

Н. А. ВЕКЛИЧ

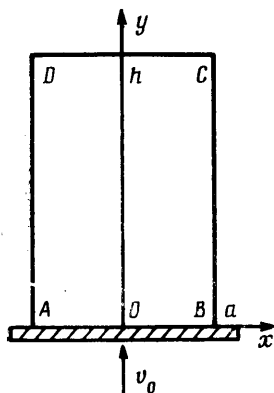
УДАР ПОЛОСЫ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ О ПРЕГРАДУ

В линеаризованной постановке получено точное решение плоской задачи об ударе конечной жидкой полосы о жесткую преграду. Компоненты скоростей, давление и другие элементы течения жидкости определялись с помощью потенциала скоростей, удовлетворяющего двумерному волновому уравнению. Для них даны конечные выражения через элементарные функции, четко отражающие волновой характер движения жидкости. Точное решение обстоятельно проанализировано во многих частных задачах.

Непосредственно показано, что решение волновой задачи в пределе выходит на решение аналогичной задачи об ударе полосы несжимаемой жидкости, полученное [1]. Выделена логарифмическая особенность скорости, параллельной преграде, в угле полосы. Предложена одномерная модель движения, описывающая поведение сжимаемой жидкости в тонком слое при ударе и позволившая получить простое решение, осредняющее точное волновое решение. Усовершенствованы неэффективные решения в рядах и уточнены некоторые числовые данные о характеристиках удара по полубесконечной полосе сжимаемой жидкости, рассмотренной ранее [2-4] в связи с изучением сейсмостойкости плотины, подпирающей воду в полубесконечном бассейне.

Полученное решение может быть использовано для оценки силового воздействия при соударении твердых тел с жидкостью. Представляется, что оно принесет определенную пользу в развитии правильных и достоверных численных методов решения нелинейных задач об ударе жидкости по твердым телам, которые часто рассматриваются в современной литературе [5].

1. С целью некоторого упрощения выкладок задачу об ударе полосы сжимаемой жидкости о преграду решаем, обращая движение. Будем считать, что полоса покоится. Жесткая недеформируемая преграда совершает по ней удар со скоростью v_0 . После удара скорость преграды поддерживается постоянной.



Фиг. 1

Движение жидкости считаем плоским и потенциальным. Для его описания выберем в плоскости движения неподвижную прямоугольную систему координат с началом в центре O грани AB (фиг. 1), по которой наносится удар. Ось x расположим вдоль этой грани, ось y — вдоль оси симметрии полосы. Полоса имеет высоту h и ширину $2a$. В направлении, перпендикулярном плоскости движения, она неограниченная. Очевидно, что в силу симметрии движение не изменится, если вдоль оси y поставить тонкую непроницаемую перегородку. Тогда при $h \rightarrow \infty$ получим задачу, рассмотренную [2-4].

Введем потенциал скоростей $\varphi = \varphi(x, y, t)$, t — время. Поскольку задача решается в акустическом приближении, то для φ , давления $p = p(x, y, t)$ и составляющих скорости $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ можно записать уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

где ρ — плотность, c — скорость звука в жидкости ($c \gg v_0$).

В начальный момент времени давление p всюду было равно нулю и полоса покоилась, поэтому $\varphi(x, y, 0) = \partial \varphi(x, y, 0) / \partial t = 0$.

Граничные условия для потенциала φ в линеаризованной постановке задаем на первоначальной недеформированной поверхности полосы. Учитывая, что на гранях AD , DC и CB давление все время равно нулю, получим

$$\varphi(x, h, t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial y} = v_0, \quad |x| < a \quad (1.2)$$

$$\varphi(\pm a, y, t) = 0, \quad 0 < y < h \quad (1.3)$$

Для записи решения задачи (1.1)–(1.3) воспользуемся безразмерными координатами $x^* = x/a$, $y^* = y/a$, временем $\tau = ct/a$ и высотой $h^* = h/a$ (звездочки у x^* , y^* и h^* в дальнейшем не пишем). Тогда

$$\varphi = -4ahv_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \beta_n x}{\lambda_{mn}^2 \beta_n^2} \left(1 - \cos \lambda_{mn} \frac{\tau}{h} \right) \cos \beta_m \frac{y}{h} \quad (1.4)$$

$$\lambda_{mn}^2 = \beta_m^2 + \beta_n^2 h^2, \quad \beta_n = \pi(n + 1/2)$$

2. Сначала определим давление. Для этого продифференцируем почленно двойной ряд (1.4) по времени τ и воспользуемся (1.1). После дифференцирования ряд можно просуммировать известными в литературе методами и выразить давление p в виде следующей конечной суммы:

$$p(x, y, \tau) = p_+ \left\{ p_*(x, y, \tau) + \lambda^{k_1} (k_1 - k_2) p_*(x, 2k_1 h - y, \tau) + \sum_{m=1}^{k_2} \lambda^m [p_*(x, 2mh + y, \tau) + p_*(x, 2mh - y, \tau)] \right\}$$

$$p_+ = \rho v_0 c, \quad \lambda = -1, \quad k_1 = \text{Ent} \left(\frac{\tau + y}{2h} \right), \quad k_2 = \text{Ent} \left(\frac{\tau - y}{2h} \right) \quad (2.1)$$

где $\text{Ent}(x)$ — целая часть x .

Произведение $p_+ p_*(x, y, \tau)$ представляет собой давление в полубесконечной полосе ($h \rightarrow \infty$) при ударе преграды, а остальные члены (2.1) обусловлены суперпозицией волн, отраженных от граней AB и CD .

Полезно отметить, что формула (2.1) для давления $p(x, y, \tau)$ сохранится и тогда, когда грань CD полосы будет не свободной, а закрепленной, причем на ней имеет место равенство $\partial \varphi(x, h, \tau) / \partial y = 0$, заменяющее первое краевое условие (1.2) при $y = h$. Необходимо только в (2.1) положить $\lambda = 1$.

Формула (2.1) удобна для расчета поля давления в конечной свободной или закрепленной полосе на ЭВМ, поскольку в нее входит только одна функция $p_*(x, y, \tau)$ — безразмерное давление в полубесконечной полосе.

Суммирование двойного ряда (1.4) одновременно дает и выражение для $p_*(x, y, \tau)$ при $y < \tau$ (при $y > \tau$ оно равно нулю)

$$p_*(x, y, \tau) = p_0(x, \sqrt{\tau^2 - y^2}), \quad p_0(x, \tau) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^{\tau} \frac{f(x, \xi)}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\xi \quad (2.2)$$

$$f(x, \xi) = 1, \quad 0 < \xi < 1 - x, \quad 3 + x < \xi < 4$$

$$f(x, \xi) = 0, \quad 1 - x < \xi < 1 + x, \quad 3 - x < \xi < 3 + x$$

$$f(x, \xi) = -1, \quad 1 + x < \xi < 3 - x; \quad f(x, \xi + 4) = f(x, \xi)$$

Здесь $p_0(x, \tau)$ — давление на преграде (площадке контакта) при $y=0$, а $f(x, \xi)$ — вспомогательная периодическая кусочно-постоянная функция.

Поскольку интеграл (2.2) элементарный, то давление $p_0(x, \tau)$ на площадке контакта можно представить в виде конечной суммы арксинусов

$$p_0(x, \tau) = f(x, \tau) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N (-1)^n \arcsin \frac{z(n, x)}{\tau}$$

$$m = \text{Ent} \left(\frac{n+1}{2} \right), \quad z(n, x) = n - \frac{(-1)^{n+1}}{2} + (-1)^n x \quad (2.3)$$

$$z(N, x) < \tau < N + \frac{(-1)^{N+1}}{2} + (-1)^{N+1} x, \quad N \geq 0$$

При $N=0$ сумму арксинусов в (2.3) считаем равной нулю.

Несложный анализ показывает, что, несмотря на разрывы функции $f(x, \tau)$, вошедшей в (2.3) в явном виде, давление $p_0(x, \tau)$ непрерывно зависит от аргументов x и τ . При расчете давления $p_*(x, y, \tau)$ по формулам (2.1)–(2.3) в полубесконечной полосе $|x| < 1$, $y > 0$ легко выделяются волновые области, для которых величина N принимает одно определенное значение. В каждый момент времени τ эти области ограничены фронтами — дугами окружностей одинакового радиуса τ с центрами на оси x в точках $x = \pm 1, \pm 3$ и т. д. (отражения волн от граней полосы $|x|=1$), плоским фронтом $y = \tau$ и гранями полосы $|x|=1$, $y=0$. Давление p_* в любой точке (x, y) полосы получается равным сумме давлений всех волн сжатия (положительные слагаемые в сумме (2.3)) и волн разрежения (отрицательные слагаемые), фронты которых прошли к моменту времени τ через эту точку.

В полосе конечной высоты образуется также множество других волновых областей, ограниченных дугами окружностей радиуса τ с центрами в точках $x = \pm(2n+1)$, $y = \pm 2mh$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$). Внесет свой вклад и плоский фронт, вынужденный курсировать между гранями $y=0$ и h с постоянной скоростью.

Определим полную силу $ap_+F_*(\tau)$, действующую на преграду на единицу ее длины. Безразмерная функция $F_*(\tau)$ получается интегрированием $p_0(x, \tau)$ по координате x

$$F_*(\tau) = 1 - \frac{2}{\pi} \tau, \quad 0 < \tau < 2$$

$$F_*(\tau) = \frac{8}{\pi} \arcsin \frac{2}{\tau} + \frac{4}{\pi} \sqrt{\tau^2 - 4} - \frac{2}{\pi} \tau - 3, \quad 2 < \tau < 4 \quad (2.4)$$

и т. д.

Для полосы конечной высоты h полная сила находится из соотношения, аналогичного (2.1).

Интегрируя силу $ap_+F_*(\tau)$ по времени τ , можно было бы получить полный импульс $Q(\tau)$, действующий на преграду при ударе. Анализ соответствующего выражения показывает, что полный импульс в зависимости от времени сначала увеличивается от нуля до максимального значения $Q_+ = \pi \rho a^2 v_0 / 4$, причем Q_+ достигается в момент времени $\tau = \pi/2$ (в [2] на основе неэффективного решения задачи в виде ряда этот момент времени получился равным $\tau = 2\mu_0/\pi$, где μ_0 — первый корень функции Бесселя нулевого порядка, что на 3% меньше точного значения). Затем $Q(\tau)$ колеблется (с затуханием) относительно значения полного импульса Q_* для несжимаемой жидкости. Напомним [1], что $Q_*/\rho a^2 v_0 = 14\zeta(3)/\pi^3$, где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, так что, в частности, $Q_+/Q_* = \pi^4/56\zeta(3) = 1,447$ (согласно [2], $Q_+/Q_* = 1,5$).

3. Поле скоростей определяем так же, как и давление. Но чтобы не загромождать текст формулами, сделаем одно замечание. Для ограниченной полосы безразмерная составляющая скорости $u(x, y, \tau)/v_0$ выражается через безразмерную скорость $u_*(x, y, \tau)$ частиц полубесконечной полосы аналогично формуле (2.1). Другая составляющая скорости $v(x, y, \tau)/v_0$ связана с соответствующей безразмерной скоростью $v_*(x, y, \tau)$ несколько иным соотношением, причем слагаемые, зависящие от аргументов $2k_1h-y$ и $2mh-y$, входят в сумму типа (2.1) со знаком минус, а не со знаком плюс. Параметр λ определяется аналогично разд. 2.

Поэтому ограничимся только детальным рассмотрением безразмерных скоростей $u_*(x, y, \tau)$ и $v_*(x, y, \tau)$ для полубесконечной полосы сжимаемой жидкости. Имеем

$$u_*(x, y, \tau) = - \int_0^{\tau'} \frac{\partial p_0(x, \xi)}{\partial x} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \quad (3.1)$$

$$v_*(x, y, \tau) = 1 + y \int_0^{\tau'} \frac{\partial p_0(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + y^2}}$$

$$\tau' = \sqrt{\tau^2 - y^2}$$

Из (3.1) следует, что в области равномерного сжатия $0 < \tau' < 1-x$, где $p_0=1$, имеем $u_*=0$, $v_*=1$. В других же областях после подстановки (2.3) в (3.1) найдем

$$u_*(x, y, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N (-1)^r \ln \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - y^2 - z^2(n, x)}}{\sqrt{y^2 + z^2(n, x)}} \quad (3.2)$$

$$v_*(x, y, \tau) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{y \sqrt{\tau^2 - y^2 - z^2(n, x)}}{\tau z(n, x)} \quad (3.3)$$

$$r = \operatorname{Ent} \left(\frac{n}{2} \right), \quad s = \operatorname{Ent} \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

$$z(N, x) < \sqrt{\tau^2 - y^2} < N + \frac{(-1)^{N+1}}{2} + (-1)^{N+1}x, \quad N \geq 1$$

Зависимость скоростей u_* и v_* от координат x, y и времени τ также носит четко выраженный волновой характер.

В пределе при $c \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow \infty$) конечные суммы (3.2) и (3.3) превращаются в ряды, допускающие аналитическое суммирование, причем

$$u_*(x, y, \infty) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(\pi y/2) + \sin(\pi x/2)}{\operatorname{ch}(\pi y/2) - \sin(\pi x/2)} \quad (3.4)$$

$$v_*(x, y, \infty) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos(\pi x/2)}{\operatorname{sh}(\pi y/2)} \quad (3.5)$$

Таким образом, в пределе из решения для полосы сжимаемой жидкости непосредственно получаем поле скоростей для несжимаемой полосы. Компоненты скоростей (3.4)–(3.5) удовлетворяют уравнению Лапласа. При необходимости после несложных преобразований им можно придать более удобный для расчетов вид, приведенный в [1, с. 102, (1.12)].

Согласно (3.2) и (3.4), вблизи вершины угла (1, 0) полосы как сжимаемой, так и несжимаемой жидкости скорость u_* стремится к бесконечности, т. е. имеет особенность. Главный член этой особенности с точностью до множителя $-2/\pi$ равен логарифму расстояния от точки (x, y) до вершины и, вопреки распространенному мнению [5], не зависит от направления подхода к вершине.

4. При исследовании удара по полосе сжимаемой жидкости с переменной скоростью также полезно применять метод суммирования рядов. Обозначив скорость преграды через $v_0 v(\tau)$, где v_0 — характерная размерная скорость, а $v(\tau)$ — безразмерная функция, получим для безразмерного давле-

ния p_* аналог соотношения (2.2)

$$p_*(x, y, \tau) = v(0) p_0(x, \sqrt{\tau^2 - y^2}) + \int_0^{\tau-y} \frac{dv(\xi)}{d\xi} p_0(x, \sqrt{(\tau-\xi)^2 - y^2}) d\xi \quad (4.1)$$

Функция $p_0(x, \tau)$ по-прежнему определяется формулой (2.3), хотя в данном случае и не является давлением на площадке контакта при $y=0$, ибо $p_*(x, 0, \tau) \neq p_0(x, \tau)$. Полная сила $ap_+F_*(\tau)$, действующая на преграду, находится интегрированием (4.1) по x при $y=0$.

Формулы (2.1), (4.1) при $\lambda=1$ дают полное и эффективное общее решение задачи, рассмотренной [3, 4] для частного случая гармонического колебания преграды и полубесконечной полосы сжимаемой жидкости.

В качестве примера определим давление жидкости на преграду при «сейсмическом ударе» [2], характеризуемом равноускоренным движением преграды из состояния покоя в течение времени Δt . Тогда $p(x, 0, \tau) = \rho \Delta t w_0 c p_*(x, 0, \tau)$

$$p_*(x, 0, \tau) = \frac{1}{\Delta \tau} \int_0^{\tau} p_0(x, \xi) d\xi, \quad 0 < \tau < \Delta \tau \quad (4.2)$$

$$p_*(x, 0, \tau) = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau-\Delta \tau}^{\tau} p_0(x, \xi) d\xi, \quad \tau > \Delta \tau; \quad \Delta \tau = c \frac{\Delta t}{a}$$

где w_0 — ускорение преграды. Проверка показывает, что в случае «сейсмического удара» давление $p_*(x, 0, \tau)$ выражается через конечную комбинацию элементарных функций арксинус и логарифм, однако на деталях соответствующего выражения не останавливаемся.

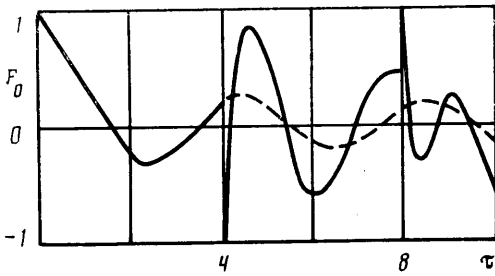
5. Полученное точное решение для давления и скоростей имеет элементарный вид, удобный для проведения расчетов и анализа различных элементов движения полосы сжимаемой жидкости.

Чтобы избежать ошибок в вычислениях и одновременно облегчить анализ получаемых результатов расчета, полезно сопоставить их с картиной волн в плоскости xu , правило построения которой кратко описано в разд. 2. Волновая картина весьма облегчает расшифровку подчас чрезвычайно сложных зависимостей давления и скоростей в какой-нибудь точке полосы (x, y) от времени τ , указывая, какие именно волны внесли свой вклад в расчетные величины. Она дает простое объяснение таким не совсем очевидным особенностям в поведении полубесконечной полосы при ударе, как знакопеременность давления p_* в той или иной точке (x, y) в зависимости от времени (напомним, что в принятой постановке задачи эффектом кавитационного разрушения жидкости пренебрегается).

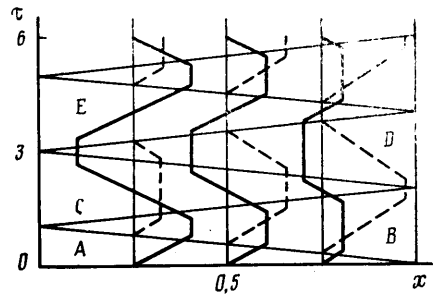
Взаимодействие волн приводит к тому, что после прохождения переднего плоского фронта частицы сначала как бы раскачиваются, причем их скорость колеблется относительно «несжимаемых» значений (3.4), (3.5). В процессе раскачки частицы могут в течение определенного времени иметь отрицательную составляющую скорости v_* , т. е. двигаться навстречу преграде. С течением времени эти колебания затухают. Но выход решения волнового уравнения на решение уравнения Лапласа совершается все же медленно и неравномерно.

Так, на поверхности $|x|=1$ полосы сжимаемой жидкости даже при $\tau = 1000$ частицы ($y < 10$) продолжают колебаться с амплитудой 0,03 скорости u_* около значений, определяемых формулой (3.4). «Полочка» функции $v_*(x, y, \tau) = 1$ перемещается вслед за передним фронтом сколь угодно далеко в направлении оси y , хотя ее ширина и уменьшается. В то же время «несжимаемое» решение требует $v_* \rightarrow 0$ и т. п.

Для полосы конечной высоты различных особенностей можно, естественно, выделить намного больше. Причем даже для такой интегральной



Фиг. 2



Фиг. 3

характеристики, как сила $F(\tau) = a p_+ F_0(\tau)$, действующая на преграду при ударе по свободной полосе квадратного поперечного сечения $h=2$ (удар жидкой «капли»), в интервале времени до $\tau=10$ можно видеть два резких «выброса» на две единицы вниз и вверх на графике безразмерной силы $F_0(\tau)$ (сплошная линия на фиг. 2). Они вызваны влиянием плоского ударного фронта и настолько узки, что при грубом счете со сравнительно большим шагом по τ их можно и не заметить, тем более что с увеличением τ они сужаются. Но в остальном график безразмерной силы $F_0(\tau)$ имеет довольно регулярный вид.

При экспериментальном исследовании выбросы $F_0(\tau)$, безусловно, сгладятся, и ни при какой постановке опытов, видимо, нельзя обнаружить выбросы на две единицы.

На фиг. 2 штриховой линией при $\tau > 4$ продолжен график безразмерной силы $F_*(\tau)$ (2.4) при ударе по полубесконечной полосе. При $\tau < 4$ $F_0(\tau)$ и $F_*(\tau)$ совпадают. Прямолинейность графиков этих функций в интервале $0 < \tau < 2$ оказалась довольно неожиданным свойством, присущим именно плоской задаче.

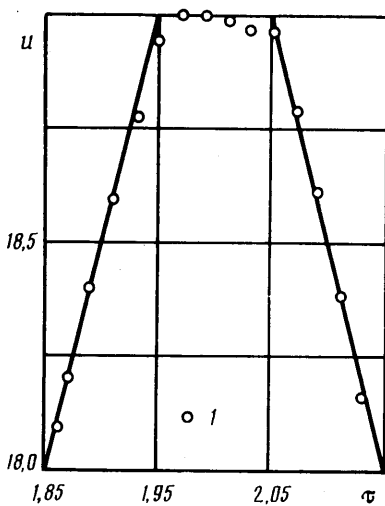
Дадим краткое описание результатов исследования поведения тонкого слоя сжимаемой жидкости при ударе, чтобы отметить некоторые особенности, обусловленные малостью толщины. Для определенности ограничимся рассмотрением поведения закрепленного слоя толщиной $h=0,1$, поскольку рассмотрение поведения свободного слоя представляет, видимо, только чисто теоретический интерес, например, чтобы ответить на вопросы: как быстро выходят параметры, характеризующие поведение тонкого слоя, на заранее известные значения, как быстро исчезает влияние скачков давления, вызванных плоской ударной волной, и т. д.

Расчет давления $p(x, y, \tau)$ и скоростей $u(x, y, \tau)$, $v(x, y, \tau)$ в различных фиксированных точках тонкого закрепленного слоя, когда $x=0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,95; y=0; 0,5h; h$, показал, что эти величины хорошо отражают волновой характер процесса, развивающегося в слое при ударе.

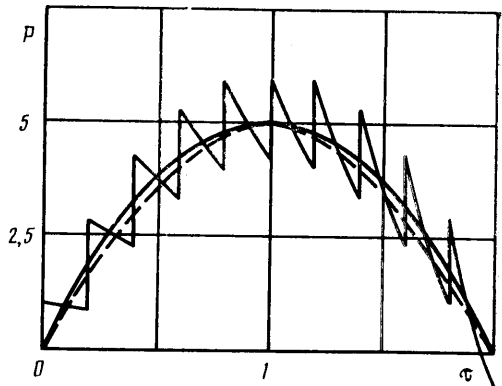
График скорости v как функции времени (он не воспроизводится здесь для экономии места) имеет весьма немонотонный вид. Он содержит множество всплесков единичной высоты и изломов, но в целом v изменяется так, что ее среднее значение оказывается постоянным и равным скорости v в соответствующей точке тонкого слоя несжимаемой жидкости [1].

На графиках давления p и скорости u в различных точках (x, y) имеются «крупномасштабные» изменения и «мелкомасштабные» колебания во времени. Крупномасштабные изменения p и u имеют трапецевидную форму и свидетельствуют о поведении тонкого слоя сжимаемой жидкости как одномерного.

Образно говоря, ЭВМ «подказала» следующую волновую картину при сжатии тонкого слоя сжимаемой жидкости. Его можно рассматривать как слой газа, заключенный между плоскостями $y=0$ и $y=h$ и имеющий ширину 2. Начиная с момента времени $\tau=0$ давление в слое начинает возрастать по линейному закону $p=\tau/h$. Если бы не свободные боковые по-



Фиг. 4



Фиг. 5

верхности $x=\pm 1$, то давление в газе всюду оставалось бы равным τ/h , а сам газ был бы неподвижным. Однако от этих поверхностей внутрь газа пойдут волны разрежения, поддерживающие нулевое давление при $x=\pm 1$, и газ придет в движение.

Если исходить из одномерного волнового уравнения для давления $p(x, \tau)$ и скорости $u(x, \tau)$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.1)$$

то методом характеристик можно установить следующие соотношения в слое в волновых областях A, B, C, D и E плоскости $x\tau$ (фиг. 3) (из соображения симметрии рассматривается только половина слоя $x \geq 0$)

$$\begin{aligned} A: \quad p &= \frac{\tau}{h}, \quad u=0 \\ B: \quad p &= \frac{1-x}{h}, \quad u = \frac{x+\tau-1}{h} \\ C: \quad p &= \frac{2-\tau}{h}, \quad u = \frac{2x}{h} \\ D: \quad p &= \frac{x-1}{h}, \quad u = \frac{x-\tau+3}{h} \\ E: \quad p &= \frac{\tau-4}{h}, \quad u=0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

В треугольных областях выше E имеем периодическое повторение p и u с периодом $T=4$.

На фиг. 3 нарисованы (качественно, без строгого соблюдения масштаба) трапеции, изображающие изменение давления p (сплошная линия) и скорости u (штриховая линия) при $x=0,25; 0,5$ и $0,75$ согласно (5.2). Прямые $x=\text{const}$ служат при этом осями отсчета. Для сечения $x=0,95$ на фиг. 4 начерчена вершина трапеции u при $1,85 < \tau < 2,15$. Точкой 1 отмечены результаты расчета по точному двумерному решению.

Из рассмотрения одномерной задачи скорость v не определяется.

Интегрируя давление $p(x, \tau)$ (5.2) по площадке контакта, найдем общее давление $ap_{\perp}P(\tau)$ жидкого слоя на стенке

$$P(\tau) = \frac{\tau(2-\tau)}{2h}, \quad 0 < \tau < 2; \quad P(\tau) = \frac{(\tau-2)(\tau-4)}{2h}, \quad 2 < \tau < 4 \quad (5.3)$$

При $\tau > 4$ параболы (5.3) будут периодически ($T=4$) повторяться.

На фиг. 5 приведен график $P(\tau)$ для $0 < \tau < 2$ в случае удара по слою толщиной $h=0,1$. Пилообразная кривая со скачками («гребешок») — результат вычисления P на подвижной стенке (преграде) с использованием точного решения плоской волновой задачи. Там же начерчена парабола (5.3), а штриховой линией — синусоида $P=5 \sin \pi\tau/2$. Из сравнения видно, что парабола (5.3) осредняет точное решение. Для других интервалов времени τ ситуация с осреднением аналогичная, хотя «гребешок» выглядит несколько иначе.

Синусоида достаточно удовлетворительно (с точностью до 5%) аппроксимирует решение одномерной задачи. Она может быть использована при приближенном расчете поведения (действия) тонкого жидкого слоя, в том числе и слоя переменной толщины $h(\tau)$.

Аналогично этой одномерной задаче возникает задача о распространении продольных термоупругих волн в свободном стеклянном стержне, возникающих при его быстром равномерном по всему объему нагреве мощным световым потоком.

Результаты были получены автором под научным руководством

Б. М. Малышева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Плоская задача об ударе по жидкой полосе // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 99–121.
2. Шильман С. Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. М.: Энергия, 1976. 336 с.
3. Kotsubo S. Dynamic water pressure on dams during earthquakes // Proc. 2nd World Conf. on Earth. Engng., Tokyo – Kyoto, 1960. Tokyo, 1960. V. 2. P. 799–814.
4. Westergaard H. Water pressures on dams during earthquakes // Trans. Amer. Soc. Civil. Engng. 1933. V. 98. № 1835. P. 418–472.
5. Гонор А. Л., Ривкинд В. Я. Динамика капли // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1982. Т. 17. С. 86–159.

Москва

Поступила в редакцию
12.1.1989