

УДК 532.592.2

© 1990 г.

Г. А. ХАБАХПАШЕВ

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкой системе, ограниченной твердыми горизонтальными дном и крышкой, исследовалось лишь в нескольких работах. В [1] были предприняты две попытки теоретически учесть влияние вязкости путем применения подходов [2, 3] к возмущениям границы раздела жидкостей. Первая из них заключалась в использовании энергетических соотношений и трения, усредненного на длине волны. Это позволило получить формулу для уменьшения амплитуды солитонов по мере их распространения. Кроме того, с помощью стандартного метода разложения по малому параметру и преобразования Фурье для глубины нижней жидкости выведено уравнение типа уравнения Кортевега — де Вриза с диссипативным интегральным членом. Оно дает возможность рассчитать эволюцию возмущения. Следует подчеркнуть, что в обоих случаях трение между слоями принималось равным трению о дно и крышку. Однако при сопоставлении предсказаний модели [1] с опытными данными [4] наблюдается их существенное расхождение.

Целью данной работы является получение уравнения волнового типа и сравнение его решений с результатами экспериментов.

1. Упрощение исходных уравнений. Пусть обе жидкости несжимаемые, не смешиваются друг с другом и плотность верхней меньше плотности нижней. Будем считать, что характерный горизонтальный размер возмущения x_0 больше, а амплитуда возмущения Δh значительно меньше расстояния между дном и крышкой H ($H/x_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\Delta h/H \sim \varepsilon$, где ε — малый параметр). Допустим, что вся система первоначально находилась в состоянии покоя. Наконец, предположим умеренность капиллярных эффектов (число Бонда $Bo = \rho g H^2 / \sigma \gg 1$, где ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, σ — поверхностное натяжение) и тонкость возникающих пограничных слоев (число гидродинамической гомотронности $Ho_v = \nu t_0 / H^2 \ll \varepsilon^2$, где ν — кинематическая вязкость, t_0 — характерное время волнового процесса). Тогда при рассмотрении плоских возмущений границы раздела, бегущих вдоль оси x , уравнения неразрывности и движения для каждой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial w_l}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial x} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0 \quad (1.3)$$

Здесь u и w — соответственно x - и z -компоненты скорости (ось z направлена вертикально вверх, $z=0$ — дно, $z=H$ — крышка), p — давление; индекс $l=1$ относится к величинам верхнего слоя, а $l=2$ — нижнего.

В первом приближении можно пренебречь нелинейными, диссипативными и инерционными членами, т. е. систему уравнений движения запи-

шем в предельно простой форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} + g = 0 \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.5) получаем для давления гидростатические профили

$$p_i = p_i - \rho_i g (z - h_2) \quad (1.6)$$

где p_i — давление на границе раздела жидкостей, а h_2 — глубина нижнего слоя.

Принтегрируем уравнения (1.1), (1.4) и (1.6) по координате z в пределах от h_2 до H , если $l=1$, и в пределах от 0 до h_2 , если $l=2$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + h_i^\circ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

$$h_i^\circ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\rho_i} \left[h_i^\circ \frac{\partial \langle p_i \rangle}{\partial x} + (\langle p_i \rangle - p_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.8)$$

$$\langle p_i \rangle = p_i - (-1)^l \rho_i g h_i / 2 \quad (1.9)$$

Здесь угловыми скобками помечены средние по глубине слоя значения переменных. При выводе этих уравнений использовались условия «непротекания» на крышке и дне ($w_1=0$ при $z=H$ и $w_2=0$ при $z=0$), кинематическое условие на границе раздела жидкостей ($w_1=w_2=\partial h_2/\partial t$ при $z=h_2$) и равенства $h_1' = h_1 - h_1^\circ = -(h_2 - h_2^\circ) = -h_2'$, где штрихом помечены возмущения глубин слоев, а градусом — их равновесные значения.

Для исключения скорости жидкости продифференцируем уравнение (1.7) по времени, а уравнение (1.8) по координате x и вычтем второе из первого. После подстановки выражений (1.9) получим

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} - \frac{h_i^\circ}{\rho_i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} - (-1)^l g h_i^\circ \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = 0 \quad (1.10)$$

Давление на границе раздела находим из условия тождественности уравнений (1.10), описывающих один и тот же процесс

$$p_i = \rho_1 \rho_2 g H h_i / \chi, \quad \chi = \rho_1 h_2^\circ + \rho_2 h_1^\circ \quad (1.11)$$

Из решения системы уравнений (1.7) и (1.8) с помощью формул (1.9) и (1.11) легко определяем аналоги инвариантов Римана

$$\langle u_i \rangle = \pm c_0 h_i' / h_i^\circ, \quad c_0^2 = \Delta \rho g h_1^\circ h_2^\circ / \chi \quad (1.12)$$

Здесь знаки минус соответствуют волнам, распространяющимся в направлении оси x , а знаки плюс — волнам, бегущим в обратном направлении; $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$.

Вертикальные профили нормальных компонент скоростей жидкостей в рассматриваемом приближении являются простыми (например, [5])

$$w_1 = \frac{H-z}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial t}, \quad w_2 = \frac{z}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad (1.13)$$

Конечность амплитуд и длин возмущений, а также наличие тонких пограничных слоев могут ввести в выражения (1.12) и (1.13) лишь поправки следующих порядков малости.

2. Учет нелинейных, инерционных, капиллярных и диссипативных эффектов. Вернемся к системе уравнений (1.1) — (1.3). Если перейти к средним по глубине слоя значениям переменных, то законы сохранения

массы и горизонтальной компоненты импульса запишутся в форме

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle h_i}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle h_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i^2 \rangle h_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i} \left[\frac{\partial \langle p_i \rangle h_i}{\partial x} - p_{ii} \frac{\partial h_i}{\partial x} + \tau_i \right] = 0 \quad (2.2)$$

где $\tau_1 = \tau_1 - \tau_c$, $\tau_2 = \tau_b - \tau_1$, τ_1 — трение у границы раздела жидкостей, τ_c — трение о крышку, τ_b — трение о дно. При получении этих уравнений использовались условия «прилипания» на крышке и дне, условия непрерывности скоростей и трения на границе раздела и условие капиллярного скачка давления на границе раздела

$$u_1 = w_1 = 0 \quad (z=H); \quad u_2 = w_2 = 0 \quad (z=0)$$

$$u_1 = u_2 = u_i, \quad w_1 = w_2 = \frac{\partial h_2}{\partial t} + u_i \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \tau_i, \quad \mu_i = \nu_i \rho_i \quad (z=h_2)$$

$$p_{ii} = p_{2i} + \sigma \partial^2 h_2 / dx^2$$

Члены уравнений (2.1) и (2.2), содержащие скорость жидкости линейно, исключим тем же способом, что и в предыдущем разделе

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} - h_i \circ \frac{\partial^2 \langle u_i^2 \rangle}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \langle p_i \rangle h_i}{\partial x} - p_{ii} \frac{\partial h_i}{\partial x} + \tau_i \right] = 0 \quad (2.3)$$

Во вторых членах этих уравнений опущена поправка третьего порядка малости. Кроме того, при сделанных предположениях $\langle u_i^2 \rangle \approx \langle u_i \rangle^2$, т. е. скорости жидкостей можно заменить с помощью формул (1.12). Теперь необходимо выразить через глубины слоев давления и трения.

Подставляя зависимости (1.13) в уравнения (1.3), интегрируя по координате z и переходя к усредненным значениям, имеем

$$\langle p_i \rangle = p_{ii} - (-1)^i \rho_i g \frac{h_i}{2} + \rho_i \frac{h_i \circ}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

Формулы для трений о крышку, дно и между жидкостями могут быть найдены точно так же, как это сделано в [6]

$$\tau_c = \psi_1 \int_0^t \frac{\partial h_1(x, t-t_s)}{\partial x} \frac{dt_s}{\sqrt{t_s}}, \quad \tau_b = -\psi_2 \int_0^t \frac{\partial h_2(x, t-t_s)}{\partial x} \frac{dt_s}{\sqrt{t_s}} \quad (2.5)$$

$$\psi_1 = \frac{\kappa_1 c_0^2}{\sqrt{\pi} h_1 \circ}, \quad \kappa_1 = \sqrt{\nu_1} \rho_1$$

$$\tau_i = \psi \int_0^t \frac{\partial h_2(x, t-t_s)}{\partial x} \frac{dt_s}{\sqrt{t_s}}, \quad \psi = \frac{\kappa c_0^2 H}{\sqrt{\pi} h_1 \circ h_2 \circ}, \quad \kappa = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$$

Если аналитические решения данной задачи существуют, то входящие в выражения (2.5) интегралы Дюамеля значительно усложняют их поиск.

В результате с помощью зависимостей (1.12), (2.4) и (2.5) уравнения (2.3) переписутся в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} - \frac{h_i \circ}{\rho_i} \frac{\partial^2 p_{ii}}{\partial x^2} - (-1)^i g h_i \circ \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} - \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial}{\partial x} \left(h_l' \frac{\partial p_{li}}{\partial x} \right) - \left[\frac{c_0^2}{h_l^\circ} - (-1)^l \frac{g}{2} \right] \frac{\partial^2 [(h_l')^2]}{\partial x^2} - \\
& - \frac{(h_l^\circ)^2}{3} \frac{\partial^4 h_l}{\partial t^2 \partial x^2} + \psi_l (1 + \varphi_l) \int_0^t \frac{\partial^2 h_l}{\partial x^2} \frac{dt_s}{\sqrt{t_s}} = 0 \\
& \varphi_1 = \frac{1 + h_1^\circ / h_2^\circ}{1 + \kappa_1 / \kappa_2}, \quad \varphi_2 = \frac{1 + h_2^\circ / h_1^\circ}{1 + \kappa_2 / \kappa_1}
\end{aligned}$$

Из условия тождественности уравнений (2.6) при использовании условия капиллярного скачка давления на границе раздела определяем

$$\begin{aligned}
p_{li} = & \frac{\rho_1 \rho_2 g H}{\chi} h_l - \frac{3 \rho_1 \rho_2 c_0^2 H}{2 h_1^\circ h_2^\circ \chi} (h_2')^2 - \frac{\rho_1 \rho_2 [(h_2^\circ)^2 - (h_1^\circ)^2]}{3 \chi} \times \\
& \times \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} - (-1)^l \frac{\sigma_l}{\chi} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \frac{\psi_1 \rho_2 - \psi_2 \rho_1 + \psi \Delta \rho}{\chi} \int_0^t \frac{h_2}{\sqrt{t_s}} dt_s. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_1 = \sigma \rho_1 h_2^\circ$, $\sigma_2 = \sigma \rho_2 h_1^\circ$. Подставляя формулу (2.7) в уравнения (2.6), имеем для глубины слоя уравнение волнового типа

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 h_l}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 h_l}{\partial x^2} - (-1)^l \alpha \frac{\partial^2 [(h_2')^2]}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^4 h_l}{\partial t^2 \partial x^2} + \\
& + \gamma \frac{\partial^4 h_l}{\partial x^4} + \delta \int_0^t \frac{\partial^2 h_l(x, t-t_s)}{\partial x^2} \frac{dt_s}{\sqrt{t_s}} = 0 \\
\alpha = & \frac{3c_0^2 [\rho_2 (h_0^\circ)^2 - \rho_1 (h_2^\circ)^2]}{2h_1^\circ h_2^\circ \chi}, \quad \beta = \frac{h_1^\circ h_2^\circ (\rho_1 h_1^\circ + \rho_2 h_2^\circ)}{3\chi} \\
\gamma = & \frac{\sigma h_1^\circ h_2^\circ}{\nu}, \quad \delta = \frac{\psi_1 h_2^\circ + \psi_2 h_1^\circ + \psi H}{\nu}
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, уравнение (2.8) учитывает слабую нелинейность возмущений, длинноволновые вклады инерции слоев и поверхностного натяжения, а также нестационарное трение на границах.

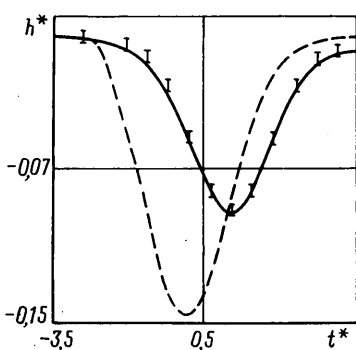
Уравнение (2.8) подобно волновым уравнениям, выведенным в [5, 6]. Поэтому выполненный в этих работах дисперсионный анализ применим и к данному случаю.

3. Расчет эволюции уединенных возмущений и сравнение с экспериментальными данными. Одним из частных решений невязкого уравнения (2.8) являются солитоны

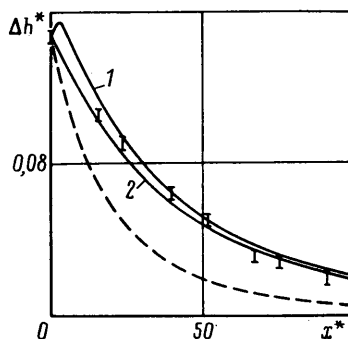
$$h_l = h_l^\circ + \Delta h_l^\circ \operatorname{sech}^2 [(x - Ut)/L], \quad \Delta h_l^\circ = (-1)^l \Delta h^\circ \quad (3.1)$$

$$U = c_0 \left(1 + \frac{2\alpha \Delta h_l^\circ}{3c_0^2} \right)^{1/2}, \quad L = \left[\frac{6(\beta U^2 - \gamma)}{\alpha \Delta h_2^\circ} \right]^{1/2}$$

Так как исследовавшиеся в [4] волны были близки к солитонам, то удобно перейти в систему отсчета $t' = t - x/U$ и $x' = x$, в которой $U \partial / \partial x' \ll \partial / \partial t'$. Проинтегрировав уравнение (2.8) один раз по t' и домножив все



Фиг. 1



Фиг. 2

его члены на $U/2c_0^2$, получаем приближенное уравнение

$$\frac{\partial h_1}{\partial x'} + \frac{U^2 - c_0^2 - (-1)^i 2\alpha h_1'}{2Uc_0^2} \frac{\partial h_1}{\partial t'} - \frac{\beta - \gamma/U^2}{2Uc_0^2} \times \\ \times \frac{\partial^3 h_1}{(\partial t')^3} + \frac{\delta}{2Uc_0^2} \int_{-x'/U}^{t'} \frac{\partial h_1(x', t' - t_s')}{\partial t_s'} \frac{dt_s'}{\sqrt{t_s' + x'/U}} = 0 \quad (3.2)$$

Кроме того, при сопоставлении с опытами [4] необходимо принять во внимание и трение о боковые стенки лабораторной установки. В итоге приходим к следующему равенству для постоянной δ :

$$\delta = \frac{1}{\chi} \left[\psi_1 h_2^\circ \left(1 + \frac{2h_1^\circ}{W} \right) + \psi_2 h_1^\circ \left(1 + \frac{2h_2^\circ}{W} \right) + \psi H \right]$$

где W — ширина канала экспериментальной установки.

На фиг. 1 представлено изменение формы уединенного возмущения по мере его распространения ($h^* = h_2'/H$, $t^* = t'c_0/H$) при $h_2^\circ = 45$ мм, $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\sigma = 34$ мН/м, $\nu_2 = 1,08$ мм²/с, $W = 0,2$ м, $h_2^\circ/h_1^\circ = 3$, $\rho_1/\rho_2 = 0,8$ и $\nu_1/\nu_2 = 1,5$. Здесь штриховая линия — интерполяция показаний первого датчика в опыте [4], принимаемая за начальное условие для вычислений ($x^* = x'/H = 0$); сплошная линия — расчет по уравнению (3.2), отрезки вертикальных прямых — показания второго датчика с учетом погрешности измерения ($x^* = 24$). Этот график демонстрирует способность рассматриваемой теоретической модели описывать эволюцию профиля экспериментально наблюдаемых волн.

На фиг. 2 приведена зависимость амплитуды уединенного возмущения ($\Delta h^* = |\Delta h_2^\circ|/H$) от пройденного им расстояния. Здесь кривая 1 — расчет по уравнению (3.2) с начальным профилем волны из опыта [4], кривая 2 — расчет по уравнению (3.2) с начальным профилем (3.1) и Δh_2° из эксперимента [4]; штриховая линия — расчет по методике [7]. Участок кривой 1 при $x^* < 5$ характеризуется преобладанием нелинейных эффектов над дисперсионными и диссипативными.

Строго говоря, в работе [7] была найдена формула для затухания внутренних солитонов по мере их распространения в двухслойной жидкости со свободной поверхностью, но ее удалось легко модифицировать для задачи с твердой крышкой [4]. По сравнению с первым подходом работы [1] в [7] лучше учтено трение на границе раздела. Однако сопоставление с опытом [4] подтверждает вывод о том, что использование энергетических соотношений и трения, усредненного на длине возмущения, не дает возможности достичь удовлетворительного согласия. Аналогичная картина наблюдается и при наличии свободной поверхности [6].

Сформулируем основные результаты работы. Получено уравнение волнового типа, учитывающее слабую нелинейность возмущений, длинноволновые вклады инерции слоев и поверхностного натяжения, а также нестационарное трение на границах. Численное решение модельного интегродифференциального уравнения хорошо описывает экспериментальные данные по эволюции уединенных возмущений.

Автор благодарит А. А. Борисова, Н. В. Гаврилова и О. Ю. Цвелодуба за полезное обсуждение ряда вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Koop C. G., Butler G.* An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 112. P. 225–251.
2. *Keulegan G. H.* Gradual damping of solitary waves // *J. Res. Nat. Bureau Standards.* 1948. V. 40. № 6. P. 487–498.
3. *Kakutani T., Matsuuchi K.* Effect of viscosity on long gravity waves // *J. Phys. Soc. Jap.* 1975. V. 39. № 1. P. 237–246.
4. *Гаврилов Н. В.* Вязкое затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // *ПМТФ.* 1988. № 4. С. 51–55.
5. *Хабахпашев Г. А.* Влияние трения жидкости о дно на динамику гравитационных возмущений // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 3.
6. *Хабахпашев Г. А.* Моделирование распространения внутренних волн в двухслойном океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26. № 1. С. 72–82.
7. *Leone C., Segur H., Hammack J. L.* Viscous decay of long internal solitary waves // *Phys. Fluids.* 1982. V. 25. № 6. P. 942–944.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.XII.1989