

УДК 532.546

© 1990 г.

М. Б. ПАНФИЛОВ

## ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕТВЯЩИХСЯ МОДЕЛЕЙ ПОРИСТЫХ СРЕД

Рассматривается статическая картина распределения флюидов в поровом пространстве после проникновения в среду жидкости  $A$  при начальном заполнении жидкостью  $B$ . Исследуются характеристики образующихся кластеров. Кластер моделируется ветвящимся процессом марковского типа, для описания которого вместо метода циклов и графической техники, предложенных в [1, 2], применен метод производящих функций. Для параметров кластеров получены явные аналитические соотношения. Учет диспергирования вытесняемой фазы вносит в определяющие соотношения нелинейность, которая порождает еще одно пороговое явление наряду с порогом перколяции: в любой среде существует верхний порог возможного насыщения вытесняемой фазой, отличный от единицы. Выделен класс сред, в которых невозможно образование бесконечного кластера фазы  $A$  ни при каких условиях.

**1. Модель процесса.** Согласно принятой терминологии [3, 4], относительно закачиваемой жидкости  $A$  все поры делятся на проводник и диэлектрики. В последние жидкости  $A$  проникнуть не может из-за большого капиллярного противодавления. Поры являются цилиндрами случайного радиуса  $r$  и случайной длины  $l$  с плотностью распределения  $f(r, l)$ . Для учета ветвлений обычно используются регулярные решетки либо случайные решетки с частичным упорядочением (решетки Бете). Поскольку постоянная решетки (расстояние между случайными узлами) на практике всегда много меньше характерной длины макропроцесса, то в [1, 2] было предложено использовать решетки с независимыми ветвлениями и непрерывным «временем». Появление ответвления есть случайное событие, которое может произойти даже в бесконечно близкой точке к исходному узлу.

Гипотеза независимости ветвлений допустима, так как в реальном процессе при встречном движении языков фазы  $A$  между ними неизбежно происходит блокировка целика фазы  $B$ , препятствующего их слиянию.

Будем полагать, что произвольный проводник в сечении  $x$  среды может превращаться не более чем в  $N$  проводников (ветвиться) в сечении  $x+dx$  или уничтожаться (переходить в сопротивление) независимо от других пор и своей предыстории. С началом координатной оси  $x$  совместим произвольный фиксированный проводник и исследуем систему его потомков.

Пусть  $\xi_x$  — число потомков, существующих в точке  $x$ . Тогда случайная функция  $\{\xi_x, x \in R\}$  со счетным числом состояний является марковским однородным ветвящимся процессом с непрерывным временем ( $x$ ). Для его задания достаточно определить начальное состояние:  $\xi_0=1$  с вероятностью  $p=1$ , а также строку коэффициентов  $\lambda_{i1}$  ( $i=0, 1, \dots$ ) инфинитезимальной матрицы  $\Lambda$ .

Ограничимся случаем дихотомического ветвления ( $N=2$ ), который имеет аналитические решения. В этом случае обозначим:  $\lambda_{10}=\lambda$  — плотность вероятности уничтожения проводника,  $\lambda_{12}=\nu$  — плотность вероятности ветвления проводника. Тогда  $\lambda_{11}=-(\lambda+\nu)$ ;  $\lambda_{i1}=0$  ( $i>2$ ). Процесс задан полностью, если известен способ вычисления параметров  $\lambda, \nu$ . Выражения для них получены в [1]

$$\lambda(\eta) = (1-\eta)/\langle l \rangle, \quad \nu(\eta) = 2m\eta \langle r l \rangle \langle r^2 \rangle^{-1} \langle l \rangle^{-1}$$

где  $m$  — пористость,  $\langle \cdot \rangle$  — символ математического ожидания,  $\eta$  — поля проводников в системе. Величина  $\eta$  считается заданной. При желании ее легко связать с насыщенностью или перепадом давления. Требуется определить: финальные вероятности процесса, вероятность образования связанного кластера проводников произвольной длины, остаточную насыщенность фазы  $B$ .

**2. Метод производящих функций.** Определим переходные вероятности процесса  $p_{ij}(x)$ . Пусть

$$P_i(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(x) z^k, \quad P = P_1 \quad (2.1)$$

— производящие функции. Ветвящийся процесс полностью определяется своей функцией  $P$ , для которой можно получить аналитическое соотношение. Используем дифференциальные уравнения Колмогорова — Чепмена для однородного марковского процесса, а также основное соотношение теории ветвящихся процессов [5]

$$\frac{dP_{ij}}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik} P_{kj}(x), \quad P_i = P^i, \quad \forall i, j$$

Комбинируя их, можно получить для  $P_i$ :  $\partial P_i / \partial x = \sum_{m \geq 0} \lambda_{im} P^m$ .

В рассматриваемом случае последнее соотношение сводится к уравнению Риккати для  $P$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\lambda - (\lambda + \nu)P + \nu P^2, \quad P(0, z) = z \quad (2.2)$$

Начальное условие вытекает из (2.1).

Уравнение (2.2) решается в квадратурах. Решение задачи имеет вид

$$P(x, z) = \frac{z - \mu + \mu(1-z)\psi(x)}{z - \mu + (1-z)\psi(x)}, \quad \mu \neq 1$$

$$P(x, z) = 1 - \frac{1-z}{1+\nu x(1-z)}, \quad \mu = 1$$

$$\mu = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{1-\eta}{\eta\kappa}, \quad \psi(x) = \exp[-\nu(\mu-1)x], \quad \kappa = \frac{2m\langle rl \rangle}{\langle r^2 \rangle}$$

Здесь  $\kappa$  — параметр разветвленности порового пространства [6], имеющий смысл среднего числа ветвей, отходящих от одной поры длиной  $\langle l \rangle$ .

Выражение для  $p_{ij}$  получается разложением величины  $P_k$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x, 0)$

$$P_k(x, z) = a_{\mu}^k(x) + O(z)$$

$$a_{\mu}(x) = \mu(1-\psi)(\mu-\psi)^{-1}, \quad \mu \neq 1; \quad a_{\mu}(x) = \nu x(1+\nu x)^{-1}, \quad \mu = 1$$

откуда, сравнивая с (2.1), получим для вероятности уничтожения  $p_{k0}$  ветвей

$$p_{k0}(x) = a_{\mu}^k(x), \quad p_{k0}(\infty) = \mu^k, \quad \mu < 1, \quad p_{k0}(\infty) = 1, \quad \mu \geq 1$$

При  $\mu < 1$  процесс обладает эргодическим свойством или, по терминологии [5], является надкритическим, при этом  $0 < p_{k0}(\infty) < 1$ . В противном случае бесконечный кластер не образуется.

**3. Характеристики кластера.** Вероятность  $y(x)$  того, что произвольный проводник образует по одну сторону от себя связанный кластер из

проводников длины не менее  $x$ , есть  $y(x) = 1 - p_{10}(x)$ . Поэтому

$$y(x) = \psi(\mu - 1)(\mu - \psi)^{-1}, \quad \mu \neq 1; \quad y(x) = (1 + vx)^{-1}, \quad \mu = 1 \quad (3.1)$$

С другой стороны,  $y$  есть доля проводников, образующих связную систему в сечении  $x$  среды, или вероятность заполнения жидкостью  $A$  произвольного проводника в сечении  $x$  от начала среды.

Соотношение (3.1) является новым результатом. В работах [1, 2] задача об определении  $y(x)$  методом циклов была сведена к системе дифференциальных уравнений бесконечного порядка, неразрешимой явно.

При любом  $\mu > 0$  функция  $y(x)$  монотонно убывает с ростом  $x$ : при  $\mu > 1$  — экспоненциально быстро до нуля, при  $\mu = 1$  — также до нуля, но по закону гиперболы, а при  $\mu < 1$  функция имеет конечный предел  $y(\infty) = 1 - \mu$ .

Пусть случайная величина  $h$  — проекция длины кластера из проводников на ось  $x$ , которую будем называть просто длиной кластера. Вероятность того, что длина кластера не превышает  $x$ , совпадает с вероятностью его уничтожения на отрезке  $[0, x]$ , поэтому функция распределения длин кластера есть

$$F_h(x) = p(0 \leq h \leq x) = p_{10}(x) = a_\mu(x)$$

Можно убедиться, что  $a_\mu(x)$  при  $\mu \geq 1$  удовлетворяет свойствам функции распределения, в частности она монотонна,  $a_\mu(0) = 0$ ,  $a_\mu(\infty) = 1$ . Плотность распределения длин кластеров есть

$$\frac{dF_h}{dx} = f_h(x) = \lambda(\mu - 1)^2 \psi(x) [\psi(x) - \mu]^{-2}, \quad \mu > 1$$

$$f_h(x) = v(1 + vx)^{-2}, \quad \mu = 1$$

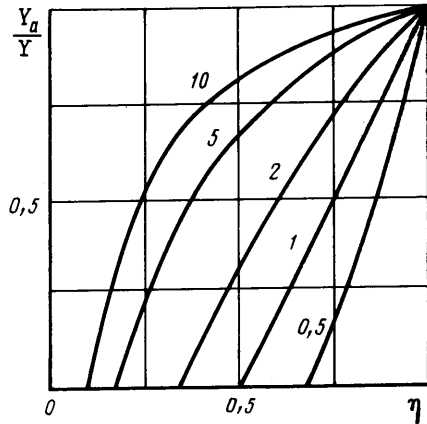
Средняя длина кластера (средняя глубина проникновения жидкости  $A$ ) есть

$$\langle h \rangle = \frac{1}{v} \ln \left( \frac{\mu}{\mu - 1} \right), \quad \mu > 1; \quad \langle h \rangle = \infty, \quad \mu = 1$$

Определим характеристики бесконечного кластера. Пусть среда бесконечна и  $\mu < 1$ . Бесконечный кластер включает в себя проводники, не уничтожающиеся одновременно с обеих сторон, поэтому вероятность его образования есть  $Y = 1 - p_{10}^2(\infty) = 1 - \mu^2$ . В него входят тупиковые проводники, примыкающие к кластеру лишь одним концом, и активные проводники, через которые возможно течение фазы  $A$ . Вероятность образования бесконечного кластера из активных проводников есть  $Y_a = [1 - p_{10}(\infty)]^2 = (1 - \mu)^2$ . Величина  $\mu^2$  есть вероятность диспергирования фазы  $A$ .

На фиг. 1 изображен график зависимости доли активных проводников в бесконечном кластере  $Y_a/Y = [\eta(\kappa + 1) - 1][\eta(\kappa - 1) + 1]^{-1}$  от концентрации  $\eta$  при разных  $\kappa$  (число у кривой соответствует значению  $\kappa$ ). Уже при  $\mu > 1/3$  кластер более чем наполовину состоит из тупиковых пор, что качественно согласуется с численными результатами, полученными на регулярных сетках [3, 4].

Из выражения для  $Y_a$  и  $\mu$  вытекает соотношение для порога протекания фазы  $A$ :  $\eta_* = (1 + \kappa)^{-1}$ .



Фиг. 1

4. **Насыщенность среды и фазовая проницаемость.** Пусть случайные величины  $R, L$  — радиус и длина поры при условии, что она проводник. Тогда для объемной полной, активной и дисперсной насыщенностей нагнетаемой фазы  $A$  имеет место

$$s = Y \langle R^2 L \rangle / \langle r^2 l \rangle, s_a = Y_a s, s_d = s(1 - Y)$$

Проницаемость среды по вытесняющей фазе  $K_A$  можно рассчитать следующим образом:  $K_A = - \langle \mathbf{V}, \text{grad}^{-1} P \rangle \mu_v^{-1}$ , где  $\mu_v$  — вязкость фазы  $A$ ,  $P$  — давление,  $\mathbf{V} = U_m s_a$  — скорость фильтрации в точке,  $U$  — истинная скорость,  $\langle \langle \rangle \rangle$  — символ осреднения по всему объему среды. Полагая, что градиент давления равен перепаду давления на единице длины проводника  $\Delta P/L$  и принимая течение Пуазейля  $U = 8\mu_v \Delta P/L \cdot R^2$ , получим

$$K_A(s_a) = 8m s_a \langle R^4 L \rangle / \langle r^4 l \rangle, k_A(s_a) = K_A/K = s_a \langle R^4 L \rangle / \langle r^4 l \rangle$$

Конкретные случаи вытеснения различаются определением переменных  $R, L$  и их распределений. Так, при нагнетании несмачивающей жидкости (процесс дренирования) проводникам отвечают широкие поры, поэтому

$$\eta = \int_0^\infty \left( \int_\omega^\infty f(r, l) dr \right) dl, \quad \langle R^k L \rangle = \int_0^\infty \left( \int_\omega^\infty f(r, l) r^k l dr \right) \frac{dl}{\eta} \quad (4.1)$$

$$\omega = \sigma \cos \theta / \Delta P(\eta)$$

где  $\omega$  — параметр состояния системы,  $\sigma, \theta$  — поверхностное натяжение и краевой угол смачивания.

При рэлеевском распределении радиусов пор [6] и независимости величин  $r$  и  $l$  можно получить для процесса дренирования

$$J(s) = \Delta P \sqrt{K/m} / 2\sigma \cos \theta = 2\sqrt{6} / \ln(1 + \kappa - \kappa \sqrt{1-s})$$

$$k_A(s) = (1-s)(1-\sqrt{s})^2, s_d = s(1-s)$$

где  $J(s)$  — функция Леверетта,  $s$  — насыщенность смачивающей фазой,  $K$  — проницаемость среды.

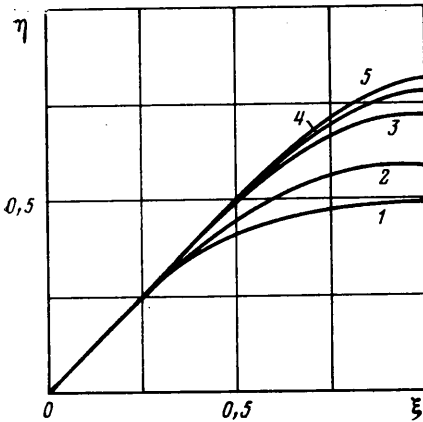
Эти зависимости качественно адекватны известным экспериментальным данным, за исключением малых насыщенностей  $s$ , когда на процесс заполнения среды существенное влияние оказывает диспергированность вытесняемой фазы.

Все результаты легко переносятся на случай макронеоднородных сред. Пусть неоднородный пласт состоит из случайно разбросанных кубических блоков двух основных типов: большой проницаемости  $K_1$  и малой  $K_2$ . Сторона блока —  $b$ . Пусть время заполнения малопроницаемого блока гораздо больше времени его обтекания по окружающим высокопроницаемым участкам. Тогда можно считать блоки  $K_2$  изоляторами, а  $K_1$  — проводниками. Моделируя кластер проводников ветвящимся процессом, можно использовать результаты, приведенные выше, если учесть, что параметры  $\nu, \kappa, \mu$  определяются теперь иначе

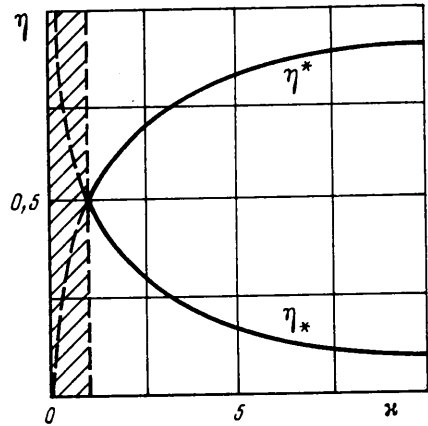
$$\nu = 4\eta / \langle b \rangle, \kappa = 4, \mu = (1-\eta) / 4\eta$$

Величина  $\eta$  на практике определяется с достаточной долей условности по кривой распределения проницаемости блоков. Для насыщенностей теперь имеет место  $s = Y, s_a = Y_a$ , так как распределение размеров блоков не зависит от их принадлежности к тому или иному классу.

5. **Учет диспергирования вытесняемой фазы.** Выражения типа (4.1) для концентрации проводников достаточно грубые, так как часть проводников всегда занята дисперсными каплями фазы  $B$ , которые остаются неподвижными при любых изменениях состояния, сохраняющих их несвязность. Влияние диспергирования вытесняемой фазы исследовалось в [7, 8] методами Монте-Карло на регулярных сетках.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть  $\zeta(\omega)$  — вероятность того, что произвольная пора в состоянии  $\omega$  содержит дисперсную фазу  $B$ . Тогда при изменении состояния на величину  $-d\omega$  (например, путем увеличения  $\Delta P$ ) доля проводников увеличивается на величину  $d\eta = -f_r(\omega)[1-\zeta]d\omega$ . Здесь считается для простоты, что  $r$  и  $l$  независимы, так что в (4.1)  $f(r', l') = f_r(r')f_l(l')$ . Для полученного дифференциального уравнения ставится естественное начальное условие  $\eta(\infty) = 0$ .

Вероятность  $\zeta(\omega)$  определим, положив, что кластер из сопротивлений также описывается ветвящимся марковским процессом с параметрами  $\lambda'$ ,  $\nu'$ . Все величины, относящиеся к кластеру сопротивлений, помечаются штрихом:  $\eta' = 1 - \eta$  и т. п. Аналогично разд. 3 получим, что  $\zeta = \mu'^2$ , где  $\mu' = \eta/\kappa(1-\eta)$ . Таким образом, уравнение для  $\eta$  оказывается нелинейным

$$\frac{d\eta}{d\omega} = -f_r(\omega) \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{\kappa(1-\eta)} \right)^2 \right], \quad \eta(\infty) = 0 \quad (5.1)$$

Удобнее ввести вспомогательную величину  $\xi(\omega)$  — полную концентрацию проводников в состоянии  $\omega$  (без учета диспергирования). Тогда уравнение (5.1) примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 1 - \left[ \frac{\eta}{\kappa(1-\eta)} \right]^2, \quad \eta(0) = 0; \quad \xi = \int_{\omega}^{\infty} f_r(\rho) d\rho$$

Решение имеет неявную форму

$$\xi = \frac{\kappa}{2(\kappa^2 - 1)} \left\{ 2\kappa\eta - \alpha(\kappa) \ln \left( 1 - \frac{\eta(\kappa+1)}{\kappa} \right) + \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\eta(\kappa-1)}{\kappa} \right) \right\}, \quad \kappa \neq 1 \quad (5.2)$$

$$\xi = \frac{1}{2}\eta(3-\eta) - \frac{1}{2}\ln(1-2\eta), \quad \kappa = 1; \quad \alpha(\kappa) = (\kappa-1)/(\kappa+1)$$

Зависимость  $\eta(\xi)$  изображена на фиг. 2 при разных  $\kappa$ .

Решение (5.2) существует, если концентрация проводников  $\eta$  ограничена сверху

$$\eta < \eta^*(\kappa) = \kappa(\kappa+1)^{-1}$$

Таким образом, наряду с нижним порогом перколяции  $\eta_c$  существует и верхний порог насыщения  $\eta^*$  фазой  $A$  из-за того, что в среде всегда есть остаточная фаза  $B$  в некоторых проводниках.

Для бесконечных кластеров величина  $\eta$  ограничена снизу и сверху:  $\eta_c \leq \eta \leq \eta^*$ , причем это неравенство теряет смысл при  $\kappa < 1$ , так как в этом случае  $\eta_c > \eta^*$  (фиг. 3), что нефизично. Следовательно, существует целый класс пористых сред ( $\kappa < 1$ ), в которых бесконечный кластер нагнетаемой

фазы  $A$  не образуется ни при каких перепадах давления. Такие среды назовем запертыми (на фиг. 3 заштрихованная область). Очевидно, в запертых средах уже на пороге перколяции возникает столь развитая система остаточных целиков фазы  $B$ , занимающих в том числе и проводники, что даже при дальнейшем увеличении  $\Delta P$  разрастание кластера  $A$  оказывается невозможным.

Учет диспергирования по предложенной схеме вносит нелинейность, порождающую пороговый эффект, однако еще не объясняет необратимость процесса при смене направления вытеснения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чизмаджев Ю. А., Маркин В. С., Тарасевич М. Р., Чирков Ю. Г. Макрокинетика процессов в пористых средах. (Топливные элементы). М.: Наука, 1971. 363 с.
2. Маркин В. С. О капиллярном равновесии в модели пористого тела с пересекающимися порами переменного сечения // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 620–623.
3. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
4. Shante V. K. S., Kirkpatrick S. An introduction to percolation theory // Adv. Phys. 1971. V. 20. № 85. P. 325–357.
5. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы // М.: Наука, 1971. 436 с.
6. Панфилов М. Б. Влияние структуры пористой среды на остаточную газонасыщенность при капиллярном впитывании жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 128–133.
7. Dodd C. G., Kiel O. G. Evaluation of Monte-Carlo methods in studying fluid-fluid displacement and wettability in porous rocks // J. Phys. Chem. 1959. V. 63. № 10. P. 1646–1652.
8. Ентов В. М., Фельдман А. Я., Чен-Син Э. Программное моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде // Программирование. 1975. № 3. С. 67–74.

Москва

Поступила в редакцию  
8.II.1989